MICHEL LANGEVIN

Quelques applications de nouveaux résultats de van der Poorten

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº G12, p. G1-G11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A16_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G12, 11 p.

2 février 1976

QUELQUES APPLICATIONS DE NOUVEAUX RÉSULTATS DE VAN DER POORTEN

par Michel LANGEVIN

1. Introduction ; les travaux de VAN DER POORTEN.

Au cours de sa conférence [17], A. J. VAN DER POORTEN a donné des minorants (les meilleurs actuellement) entièrement explicites pour les modules des formes linéaires de logarithmes à coefficients rationnels, aussi bien dans le cas complexe que dans le cas p-adique (cf. références [20] et [21] de [17]). Le but de cet exposé est de fournir des applications simples du corollaire suivant de ces résultats :

(C) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des rationnels > 0, satisfaisant à une hypothèse technique (H), de hauteurs majorées par $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivement (avec $e^2 \leq A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$) et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des rationnels de hauteurs toutes majorées par B (avec $e^2 \leq B$) tels que

$$L = |b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2 + \cdots + b_n \log a_n| \neq 0 .$$

Alors :

(C.1) $$L \geq \exp(-((2^5(n+1))^{6n+7} \prod_{1\leq i\leq n} \log A_i (\log(\prod_{1\leq i\leq n} \log A_i)) \log B)) .$$

De plus, si B ne désigne plus qu'un majorant des hauteurs de $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ et si l'on note B' un majorant de celle de b_n $(\neq 0)$ (avec $20 \leq B, B'$),

(C.2) $$L \geq \sup_{0<d<0,99} \exp(-(2^5(n+1))^{6n+9} \prod_{1\leq i\leq n} \log A_i (\log(\prod_{1\leq i\leq n} \log A_i))^2 \log(B' d^{-1}) - d(B/B')).$$

On s'attachera en particulier à montrer l'importance de la "dépendance en n" dans (C). On ne tiendra pas compte dans la suite de (H). Cela est sans grand inconvénient car dans les applications des § 2 et 4, (H) est vérifiée ; comme l'a montré BAKER, (H) est non indispensable et a pour but de simplifier les calculs ; enfin, la complication introduite par l'absence de (H) n'apporte pas de modification des ordres de grandeurs des constantes figurant dans (C) (cf. introduction de la référence [20] de [17]).

2. Plus grand facteur premier d'entiers voisins.

La lettre p est réservée aux nombres premiers. On note, comme d'habitude,

$$P(n) = \sup_{p|n} p , \quad \omega(n) = \sum_{p|n} 1 , \quad \pi(n) = \sum_{p\leq n} 1 ;$$

(p_k) désigne la suite des nombres premiers ; on note $\|x\|$ la distance de x à Z ; on écrit $\log_2$ pour $\log.\log$ ...

THÉORÈME 1. Soit k_n une suite d'entiers $\neq 0$, vérifiant

$$\lim\sup_{n\infty}(\log|k_n|)(\log n)^{-1} < 1 ,$$

alors

$$\lim\inf_{n\infty}(\sup(P(n) , P(n + k_n))/ \log_2 n \geqslant 1/6 .$$

Démonstration. - On se ramène aisément au cas où k_n est une suite d'entiers > 0. Par hypothèse, il existe un réel $t < 1$ tel qu'on ait, à partir d'un certain rang, $|k_n| < n^t$. Par suite, on a, d'une part,

$$(1) \qquad \log((n + k_n)/n) < k_n/n < n^{t-1} ,$$

d'autre part, en décomposant le rationnel $(n + k_n)/n$ en facteurs premiers,

$$(2) \quad \exp(-(2^5(\bar{\omega} + 1))^{6\bar{\omega}+7} (\log \bar{P})^{\bar{\omega}} (\bar{\omega} \log_2 \bar{P}) \log(\sup(e^2 , B))) \leq \log(n + k_n)/n$$

avec $\bar{\omega} = \omega((n + k_n)n)$, $\bar{P} = P((n + k_n)n)$, $B = \log 2n/\log 2$.

Les inégalités (1) et (2) montrent que $\bar{P}$ tend vers l'infini avec n puisque $p_{\bar{\omega}} \leq \bar{P}$; plus précisément, d'après le théorème 3 de [8], $\bar{\omega} \log \bar{\omega} \leq p_{\bar{\omega}} \leq \bar{P}$. Donc, le terme prépondérant dans le membre de gauche de (2) est $\bar{\omega} \log \bar{\omega}$, d'où le résultat.

Remarque. - Sous des hypothèses plus fortes, on peut trouver, dans le théorème 1, un résultat meilleur que $1/6$: par exemple, si

$$|k_n| \leq (\log n)^t \quad (\text{resp. } |k_n| < (\log n)^{t/2})$$

avec $t < 1$, on obtient $(1 - t)/5$ (resp. $(1 - t)/4$) (cf. [3]); si

$$|k_n| = 1 \text{ ou } 2 ,$$

on obtient 2 (cf. D. H. LEHMER [5] ou SCHINZEL [9]).

Soit f un polynôme à coefficients entiers ayant au moins deux zéros distincts. L'inégalité

$$(3) \qquad P(f(n)) > C(f) \log_2 n$$

est maintenant établie dans tous les cas (cf. (3.4), (3.5), (3.6) dans [4]). Le théorème 1 est seulement un cas particulier de ce résultat quand la suite (k_n) est constante (on peut même améliorer le $1/6$ en $1/4$, cf. [2]). La constante $C(f)$, effectivement calculable, figurant dans (3) est toujours apparue, quand on a su l'expliciter, comme une fonction décroissante du degré du polynôme f (exposant -9 dans [13], -2 dans [2]). Le corollaire suivant du théorème 1 montre un cas où il n'en est pas ainsi :

COROLLAIRE. - Soit f un polynôme à coefficients entiers ayant au moins deux zéros distincts dont un rationnel, alors

$$\lim\inf_{n\infty} P(f(n))/\log_2 n \geqslant 1/6 \;.$$

Démonstration. — Soient r/s un rationnel tel que $f(r/s) = 0$, d le degré de f, $m = sn - r$. On écrit $s^d f(n)$ sous la forme $mg(m)$, où g est un polynôme, de degré $d-1$, qu'on peut écrire $am^{d-1} + O(m^{d-2})$. Il est maintenant clair qu'il suffit d'appliquer le théorème 1 pour conclure.

On peut encore voir le théorème 1 sous un angle différent. Soient p et q $(p < q)$ deux entiers premiers entre eux, et (n_i) la suite croissante des entiers de la forme $p^u q^v$. TIJDEMAN (cf. [14] et [15]) a montré l'existence de deux constantes effectives C_1 et C_2 vérifiant, pour tout i,

$$n_i/(\log n_i)^{C_1} \ll n_{i+1} - n_i \ll n_i/(\log n_i)^{C_2} \;.$$

On va déduire de (C) des valeurs explicites pour C_1 et C_2.

THÉORÈME 2.

$$(2^{126} \log p \log_2 p \log q)^{-1} < C_2 < C_1 < (2^{126} \log p \log_2 p \log q) \;.$$

Démonstration. — Pour majorer C_1, il suffit de minorer comme précédemment le logarithme du rationnel n_{i+1}/n_i, écrit sous forme de produit de puissances de facteurs premiers. En supposant, par simplicité, p, $q \geqslant 8$ $(> e^2)$, on obtient le résultat voulu $((2^5 . 3)^{19} < 2^{126})$. Soit $n_i = p^u q^v$, et supposons, par exemple, $p^u > q^v$. Soit (r_n/s_n) la suite des rationnels convergente vers $\log p/\log q$, obtenue par développement en fraction continue. Soit n l'indice vérifiant $s_n \leqslant u < s_{n+1}$. L'un des rationnels r_{n-1}/s_{n-1}, r_n/s_n, soit $r_{n'}/s_{n'}$, est supérieur à $\log p/\log q$.

Par construction, $p^{u-s_{n'}} q^{v+r_{n'}}$ est entier et $> n_i$, donc $\geqslant n_{i+1}$. On en déduit :

$$\log(n_{i+1}/n_i) \leqslant \log q \|s_{n'}(\log p/\log q)\| \;.$$

Comme $s_{n-1}\|s_n(\log p/\log q)\| + s_n\|s_{n-1}(\log p/\log q)\| = 1$, que n' soit égal à $n-1$ ou n, on a

$$\|s_{n'}(\log p/\log q)\| < s_n^{-1} \;.$$

De plus, on déduit de (C) et de l'inégalité $s_{n+1}\|s_n(\log p/\log q)\| < 1$,

$$\exp(-2^{126} \log p \log_2 p \log q \log s_n)\, s_{n+1}/\log q < 1 \;,$$

ce qui prouve que s_n est minoré par s_{n+1}^c, c désignant une fonction de p et q seuls. En reportant, il vient :

$$\begin{aligned}&\log(1 + (n_{i+1} - n_i)/n_i)\\ &\quad< \log q(2(\log p)(\log q)(\log n_i)^{-1})^{2^{-126}(\log p)^{-1} (\log_2 p)^{-1} (\log q)^{-1}} ;\end{aligned}$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 3. - <u>Soient</u> A <u>et</u> ε <u>deux réels positifs. Il existe un rang</u> $K(A, \varepsilon)$ <u>tel que, pour tout couple d'entiers</u> (n, k) <u>satisfaisant à</u> $k > K(A, \varepsilon)$, $n \geq \exp\exp(\log k)^A$, <u>l'on ait</u> :

$$\pi(P((n+1)(n+2)\dots(n+k))) > (12 + 2/A + \varepsilon)^{-1} k \log_2 n/\log_3 n .$$

<u>Démonstration. - Par l'absurde, existent donc deux réels</u> A, ε <u>tels qu'on</u> puisse trouver des couples (n, k) d'entiers aussi grands qu'on le désire vérifiant :

$$(4)\ \pi(\bar{P}) \leq (12 + 2/A + \varepsilon)^{-1} k \log_2 n(\log_3 n)^{-1} \quad \text{avec} \quad \bar{P} = P((n+1)(n+2)\dots(n+k)).$$

Soit (n, k) un tel couple. Montrons d'abord qu'on peut choisir parmi

$$n+1, n+2, \dots, n+k$$

deux entiers n', n'' satisfaisant à $1 \leq n'' - n' \leq 2$ et

$$\bar{\omega} = \omega(n' n'') \leq 2k^{-1} \pi(\bar{P}) + 3 \log_2 k .$$

Cela est possible puisque la quantité $2\sum_{1\leq i\leq k} \omega(n+i)$, qu'on écrit

$$2\sum_{1\leq i\leq k'} \omega((n+2i-1)(n+2i)) \quad \text{si} \quad k = 2k'$$

ou

$$2\sum_{2\leq i\leq k'} \omega((n+2i)(n+2i+1)) + \omega((n+1)(n+2)) + \omega((n+2)(n+3))$$
$$+ \omega((n+3)(n+1)) \quad (+ \text{ éventuellement } 1) \quad \text{si} \quad k = 2k'-1 ,$$

est égale à $2\sum_{1\leq i\leq k} \sum_{p|(n+i)} 1$, donc majorée par

$$2\sum_{p\leq k}([(k-1)/p] + 1) + \pi(\bar{P}) - \pi(k) ,$$

donc par $2\pi(\bar{P}) + 2k(\log_2 k + 1)$ pour k assez grand.

En appliquant (4) et l'hypothèse $A \log_2 k \leq \log_3 n$, il vient :

$$\bar{\omega} \leq (6 + A^{-1} + \frac{1}{3\varepsilon}) \log_2 n (\log_3 n)^{-1} \quad \text{pour } k \text{ (et donc } n \text{) assez grand.}$$

D'autre part, en appliquant (C) comme dans la démonstration du théorème 1 au rationnel n''/n', on obtient :

$$(5)\ \log(\log n - \log 2) < (6\bar{\omega} + 7)(\log(\bar{\omega}+1) + 5\log 2) + \bar{\omega}\log_2 \bar{P} + \log\bar{\omega} + \log_3 \bar{P}$$
$$+ \log_2(\log 2\, n/\log 2) .$$

Comme $6\bar{\omega}\log\bar{\omega}$ est majoré par $(1 + (6A)^{-1} + \varepsilon/12)^{-1} \log_2 n$, l'inégalité précédente montre que $\bar{P}$ tend vers l'infini avec k. Mais, d'après (4),

$$\log \bar{P} \leq \log k + \log_2 k + \log_3 n \leq (\log_2 n)^{(1/A)+(\varepsilon/4)}$$

pour $n > N$ convenable. Il n'y a plus alors qu'à reporter dans (5) pour obtenir la contradiction cherchée.

Remarque. - Quand n est très grand devant k, on peut prouver un résultat meilleur :

$$\liminf_{n\infty} P((n+1)(n+2)\ldots(n+k))/\log_2 n \geqslant k \quad (\text{cf. } [3]).$$

Le théorème 1 établit, en particulier, qu'étant donnés deux entiers a et c, le plus grand facteur premier de $a^b + c$ tend vers l'infini avec b. Le théorème suivant montre que ce résultat est vrai uniformément en a.

THÉORÈME 4. - Soient $t < 1$ et $\varepsilon > 0$ deux réels. Il existe un rang $B(t, \varepsilon)$ pour lequel l'inégalité $b > B(t, \varepsilon)$ implique :

$$\inf_{a\geqslant 2, 0<|c|\leqslant a^{bt}} P(a^b + c) > ((1-\varepsilon)/6)\log b .$$

Démonstration. - Soit $a^b + c = \prod_{1\leq i\leq n} p_i^{b_i}$, les p_i étant premiers. Comme dans la preuve du théorème 1, on forme

$$\log(1 + ca^{-b}) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b_i \log p_i - b\log a ,$$

mais on applique maintenant l'inégalité (C.2) avec

$$d = \log 2 , \quad B' = b , \quad B = (b(\log a/\log 2) + 1) .$$

Il vient :

$$(1-t)b\log a \ll (2^5(n+2))^{6n+15} \log a(\prod_i \log p_i)(\log(\prod_i \log p_i))^2 \log b(\log 2)^{-1} + \log a + b^{-1}\log 2 .$$

La simplification par $(\log a)$ montre l'uniformité cherchée ; la démonstration se poursuit alors comme celle du théorème 1.

Remarque. - Un résultat voisin qu'on peut prouver de façon analogue a été obtenu par SHOREY et TIJDEMAN [12] :

Soit M un réel $> C$, il existe une constante $\bar{c}(M)$, effectivement calculable, telle que les inégalités (avec $a > 1$, $b > 1$, $c \neq 0$, $d > 0$ entiers) :

$$P(da^b + c) \leqslant M \quad \text{et} \quad P(d) \leqslant M \quad \text{impliquent} \quad |c| > (da^b)^{1-\bar{c}(M)(\log b)/b} .$$

Remarque. - Le résultat du théorème 4 est en particulier valable lorsque c est fixe. Dans ce cas, on peut aussi déduire ce résultat (sous une forme affaiblie) du théorème suivant :

THÉORÈME (SCHINZEL, TIJDEMAN [10]). - Soit f un polynôme à coefficients entiers ayant au moins deux zéros distincts. Il existe une constante $M(f)$, effectivement calculable, telle que, pour tout entier $m \geqslant M(f)$, l'équation diophantienne

$$y^m = f(x)$$

n'admette aucune solution.

Supposons l'existence d'un réel M_1 tel qu'on puisse trouver une infinité d'entiers b et des entiers $a(b)$ vérifiant $P(a(b)^b + c) < M_1$. Soit $f_u = uX^2 - c$, et désignons par M_2 la borne supérieure des réels $M(f_u)$ lorsque u décrit l'ensemble des entiers sans facteur carré de diviseurs premiers $< M_1$. En considérant un couple $(a(b), b)$ avec $b > M_2$, et en écrivant $a(b)^b + c$ sous la forme ux^2, u étant sans facteur carré, on obtient la contradiction cherchée.

3. Bornes explicites pour les solutions de l'équation de Catalan.

L'équation $x^m - y^n = 1$ (x, y, m, n entiers $\geqslant 2$) n'a que la solution $3^2 - 2^3 = 1$; cette conjecture de CATALAN (1842) n'est pas encore prouvée, mais TIJDEMAN [16] a montré récemment l'existence d'un majorant effectivement calculable pour les solutions. Grâce à (C), on va en donner une évaluation explicite.

THÉORÈME 5. - $y^n < x^m < \exp\exp\exp\exp 730$.

Démonstration. - Elle repose sur le lemme suivant.

LEMME 1. - $P(mn) < \exp 241$.

Démonstration. - Soit p (resp. q) un facteur premier de m (resp. n). L'équation $x^m - y^n = 1$ se ramène à $x^p - y^q = 1$ (p, q premiers). Les résultats arithmétiques antérieurs (cf. [6], chapitre 30) montrent que $\inf(p, q) \geqslant 5$, p (resp. q) divise y (resp. x). On va en déduire le lemme ci-après.

LEMME 2. - Il existe un entier a (resp. b), multiple de p (resp. q), tel que $p(x - 1) = a^q$ (resp. $q(y + 1) = b^p$).

Démonstration. - Le reste de la division de $(1 + x + \dots + x^{p-1})$ par $(x - 1)$ étant p, il suffit pour montrer le résultat de prouver que q divise la valuation p-adique de $p(x - 1)$, soit $v_p(p(x - 1))$. p divisant y, on a

$$x^p = x = 1 \mod p ;$$

par suite, $v_p(x - 1) \geqslant 1$ et, puisque $p \neq 2$,

$$v_p(x^p - 1) = v_p((1 + p^{v_p(x-1)} x')^p - 1) = 1 + v_p(x - 1) = v_p(p(x - 1)) = qv_p(y).$$

C. Q. F. D.

On montrerait de même le résultat relatif à $q(y + 1)$ en observant que, q étant impair, $(y + 1)$ divise $y^q + 1$.

On applique maintenant (C) à la forme linéaire de logarithmes

$$L = |pq \log(a/b) + q \log q - p \log p| .$$

L est le logarithme de

$$p^p q^{-q}(b/a)^{pq} = (1 + (x - 1)^{-1})^p (y + 1)^q (y^q + 1)^{-1} > 1 .$$

Il est clair que L est majoré par $p(x-1)^{-1} + qy^{-1}$.

Lorsque $q > p$ (donc $x > y$), la hauteur de a/b est b, et on peut majorer L par

$$2qy^{-1} = (2q^2/q(y+1))(1+y^{-1}) \leq 3b^{2-p} .$$

Lorsque $p > q$ (donc $y > x$), la hauteur de a/b est a (observer que $x > p^{q-1}$ et $y > q^{p-2}$)), et on peut de même majorer L par $2a^{2-q}$. L'application de (C) donne alors, après simplification par $\log a$ (ou $\log b$).

$$q - 3 < 2^{177}(\log p)^3 \ (\log_2 p) \quad \text{si} \quad p > q ,$$

$$p - 3 < 2^{177}(\log q)^3 \ (\log_2 q) \quad \text{si} \quad q > p .$$

Un calcul analogue, à partir de la forme

$$|p \log(xb^{-q}) + q \log q| \quad \text{si} \quad p > q , \quad \text{ou} \quad |q \log(ya^{-p}) + p \log p| \quad \text{si} \quad q > p ,$$

permet d'obtenir

$$p - 3 < 2^{126}(\log p)(q \log q \log_2 q) \quad \text{si} \quad p > q ,$$

$$q - 3 < 2^{126}(\log q)(p \log p \log_2 p) \quad \text{si} \quad q > p .$$

Il n'y a plus qu'à rapprocher les inégalités obtenues pour prouver le lemme 1.

Des résultats de BAKER [1] sur l'équation diophantienne $y^q = P(x)$ (P polynôme et q donnés), on déduit alors l'inégalité $y^q < x^p < \exp\exp\exp\exp 730$.

Comme on l'a expliqué au §1, on a négligé l'hypothèse technique (H). Par suite, les résultats numériques précédents n'apparaissent qu'à titre d'ordre de grandeur pour les constantes dont TIJDEMAN a montré l'existence. On s'est borné ici à l'application directe des travaux de cet auteur. Nul doute que les valeurs numériques données ci-avant, peuvent être grandement améliorées : d'une part, par l'emploi d'un corollaire (C) meilleur dans les cas $n = 2$, 3 (VAN DER POORTEN a annoncé des résultats dans ce sens), d'autre part, par l'emploi d'un résultat mieux adapté à l'équation $y^q = x^p - 1$, que celui, très général, de BAKER (cf. [1]), dont une amélioration importante est annoncée par SPRINDŽUK.

4. Approximation diophantienne des nombres algébriques.

Soit x un nombre algébrique irrationnel. Soit (r_n/s_n) la suite des rationnels approchant x formée par développement en fraction continue. K. MAHLER a prouvé, dès 1936, que $\lim_{n\infty} P(r_n s_n) = \infty$. Toutefois, ce résultat est ineffectif. SHOREY et TIJDEMAN ont montré comment préciser simplement et effectivement ce résultat grâce aux minorations de formes linéaires de logarithmes (cf. [11]). Il suffit en effet d'observer que $xr_n^{-1} s_n$ est voisin de 1 (à au plus $(r_n s_n)^{-1}$ près) de former le logarithme, d'appliquer un des résultats de VAN DER POORTEN ayant donné naissance à (C), pour obtenir aussi aisément qu'on l'a fait pour le théorème 1 une inégalité de la forme $P(r_n s_n) \gg \log_2 s_n$.

On voit facilement que cette démonstration peut être étendue à des approximations rationnelles de moins bonne qualité que celles fournies par développement en fraction continue. Le résultat reste par exemple acquis pour toute suite r_n/s_n vérifiant $|x - (r_n/s_n)| < (s_n)^{-t}$ $(t > 0)$. On va déduire maintenant du théorème 1 le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Soient x un nombre réel irrationnel dont une puissance soit rationnelle, t un réel positif, (x_n) une suite d'entiers véfifiant

$$|x_n - nx| < n^{1-t} .$$

Alors

$$\liminf_{n\infty} P(nx_n)/\log_2 n \geqslant 1/6 .$$

Démonstration. - Il existe des entiers d, r, s, tels que $x^d = r/s$. Pour n assez grand, on a

$$|(x_n/n)^d - (r/s)| < |(x_n/n) - x|\ d\ (2x)^{d-1} .$$

L'hypothèse faite sur x_n entraîne alors $|sx_n^d - rn^d| \ll n^{d-t}$, la constante sous-entendue ne dépendant que de x. En d'autres termes, sx^d ne diffère de rn^d que par une quantité de la forme $O(n^{1-t/d})$; il suffit donc d'appliquer le théorème 1 pour conclure.

Donnons une application de ces résultats : soit

$$x = \sum_{0\leqslant i\leqslant k} a_i\ 10^{k-i} + \sum_{j>0} b_j\ 10^{-j} \quad (0 \leqslant a_i\ ,\ b_j \leqslant 9)$$

un réel algébrique irrationnel ; autrement dit, en notation décimale,

$$x = a_1\ a_2 \ldots a_k\ ,\ b_1\ b_2 \ldots b_n \ldots .$$

Les entiers $a_1\ a_2 \ldots a_k$, $a_1\ a_2 \ldots a_k\ b_1$ $(\ldots)$ approchent respectivement x, $10\ x$, ... à moins de 1 près ; par conséquent,

$$\liminf_{n\infty} P(a_1\ a_2 \ldots a_k\ b_1\ b_2 \ldots b_n)/\log n > 0 .$$

Dans ce dernier résultat, puiqu'on ne modifie pas la nature de x en y ajoutant un rationnel, il n'est pas nécessaire de commencer la suite par $a_1\ a_2 \ldots a_k$; plus généralement, on peut écrire (toujours en notation décimale), pour tout entier m,

$$\liminf_{n\infty} P(b_m\ b_{m+1} \ldots b_{m+n})/\log n > 0$$

et même remplacer la suite $b_m \ldots b_{m+n}$ par une suite voisine.

On conserve les notations précédentes. La généralisation p-adique suivante du célèbre théorème de Roth :

THÉORÈME (RIDOUT [7]). - Soient x un nombre réel algébrique irrationnel, p_1, p_2, ..., p_k, q_1, q_2, ..., q_ℓ des nombres premiers donnés, d un

<u>réel</u> > 0 . <u>Il existe une constante</u> K <u>telle qu'on ait</u>, <u>pour tout système</u>

$$a_1 , a_2 , \dots , a_k , b_1 , b_2 , \dots , b_\ell$$

<u>et tout couple</u> (r' , s') <u>d'entiers</u>, <u>en posant</u>

$$r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k} r' , \quad s = q_1^{b_1} \dots q_\ell^{b_\ell} s' ,$$
$$|x - (r/s)|r' s'(rs)^d > K$$

admet pour corollaire :

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> (r_n/s_n) <u>une suite de rationnels convergeant vers un réel irrationnel algébrique</u> x , ε <u>un réel positif tel qu'on ait</u>, <u>pour tout entier</u> n , $|x - (r_n/s_n)| < s_n^{-(1+\varepsilon)}$. <u>Alors</u>,

$$\lim_{n\infty} P(r_n) = \lim_{n\infty} P(s_n) = \infty .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour montrer le résultat pour $P(s_n)$ (par exemple), il suffit d'appliquer le théorème avec $r = r'$, $s' = 1$, $d < \varepsilon/2$.

Grâce à ce corollaire, on peut construire aisément des nombres transcendants : Soit $x = a_1 a_2 \dots a_m , b_1 b_2 \dots b_n \dots$ l'écriture décimale d'un réel x ; soit n_k la suite croissante d'entiers définie par $b_{n_k} \neq 0$ (pour tout k), $b_n = 0$ pour $n_k < n < n_{k+1}$. Par construction, $10^{n_k - n_{k+1}} < \|x 10^{n_k}\| < 10^{n_k - n_{k+1} + 1}$, donc une condition suffisante pour que x soit transcendant et que $\limsup_{k\infty}(n_{k+1}/n_k) > 1$. Dans le système binaire, où la suite (n_k) se trouve toute construite

$$x = [x] + \sum_{k>0} 2^{-n_k} ,$$

on obtient un nombre transcendant dès que la condition précédente est réalisée.

Soient x un réel algébrique irrationnel, et (p_n/q_n) la suite d'approximations obtenue par développement en fraction continue. Le corollaire précédent montre que $P(p_n)$ et $P(q_n)$ tendent vers l'infini avec n . Quand $x = d^{\frac{1}{2}}$ (d entier > 0 non carré parfait), on va prouver un résultat plus précis :

THÉORÈME 7.

$$\liminf_{n\infty} P(p_n)/\log_2 p_n \geqslant 1/4 \; ; \quad \liminf_{n\infty} P(q_n)/\log_2 q_n \geqslant 1/4 .$$

<u>Démonstration</u>. - $|p_n^2 - dq_n^2| = |p_n^2 - x^2 q_n^2| = \|xq_n\| \, |p_n + q_n x|$; cette quantité restant bornée, p_n^2 (resp. q_n^2) apparaît comme valeur prise par un polynôme du second degré, Le résultat est alors une conséquence du lemme de [2].

Dans le cas du théorème 7, on peut espérer obtenir de meilleurs résultat ainsi :

Le développement en fraction continue de tout irrationnel quadratique étant périodique à partir d'un certain rang, il existe un entier n tel qu'on ait

$$\binom{p_{n+1}}{p_n} = A^{[n/m]}\, P(n \mod m)$$

$$\binom{q_{n+1}}{q_n} = B^{[n/m]}\, Q(n \mod m)$$

où A et B sont des matrices 2×2 convenables, $P(n \mod m)$, $Q(n \mod m)$ des matrices 2×1 ne dépendant que de la classe de n modulo m. En envisageant les suites extraites de p_n et q_n obtenues en ne conservant que les entiers n congrus à un même nombre modulo m, on obtient des suites récurrentes linéaires auxquelles il suffirait d'appliquer les énoncés annoncés par C. STEWART. Les résultats attendus sont de l'ordre de

$$\inf(P(p_n)\ ,\ P(q_n)) \gg (n/\log n)^c\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). - Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation, Proc. Camb. phil. Soc., t. 65, 1969, p. 439-444.

[2] LANGEVIN (M.). - Plus grand facteur premier d'entiers consécutifs, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 1567-1570.

[3] LANGEVIN (M.). - Plus grand facteur premier d'entiers voisins, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, Série A, p. 491-493.

[4] LANGEVIN (M.). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.

[5] LEHMER (D. H.). - On a problem of Störmer, Illinois J. Math., t. 8, 1964, p. 57-79.

[6] MORDELL (L. J.). - Diophantine equations. - London, New York, Academic Press, 1969 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 30).

[7] RIDOUT (D.). - The p-adic generalization of the Thue-Siegel-Roth theorem, Mathematika, London, t. 5, 1958, p. 40-48.

[8] ROSSER (J. B.) and SCHOENFELD (L.). - Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math., t. 6, 1962, p. 64-94.

[9] SCHINZEL (A.). - On two theorems of Gel'fond and some of their applications, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1967, p. 177-236.

[10] SCHINZEL (A.) and TIJDEMAN (R.). - On the equation $y^m = P(x)$ (à paraître).

[11] SHOREY (T. N.) and TIJDEMAN (R.). - On the greatest prime factors of polynomials at integer points (à paraître).

[12] SHOREY (T. N.) and TIJDEMAN (R.). - New applications of diophantine approximations to diophantine equations (à paraître).

[13] SPRINDŽUK (V. G.). - Diviseurs sans facteurs carrés des polynômes et nombre de classes des corps de nombres algébriques [en russe], Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 143-149.

[14] TIJDEMAN (R.). - On integers with many small prime factors, Comp. Math. Groningen, t. 26, 1973, p. 319-330.

[15] TIJDEMAN (R.). - On the maximal distance between integers composed of small

primes, Comp. Math., Groningen, t. 28, 1974, p. 159-162.

[16] TIJDEMAN (R.). - On the equation of Catalan, Acta Arithm., Warszawa, t. 29, 1976, p. 197-209.

[17] VAN DER POORTEN (A. J.). - Computing the lower bound for linear forms in logarithms, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 17e année, 1975/76, n° 17, 9 p.

(Texte reçu le 11 octobre 1976)

Michel LANGEVIN
Ecole Normale Supérieure
Parc de Saint-Cloud
92210 SAINT CLOUD