

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-MARC DESHOUILLERS

Nombres ayant de grands facteurs premiers

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975), exp. n° G2, p. G1-G2

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A6_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES AYANT DE GRANDS FACTEURS PREMIERS

par Jean-Marc DESHOUILERS

L'exposé oral avait pour but de présenter aux éléments du groupe (d'étude) quelques problèmes, résultats et méthodes, relatifs à la fonction plus grand facteur premier ; la présente rédaction s'écarte de l'exposé oral pour deux raisons :

- (i) l'article de Michel LANGEVIN [2] recouvre le contenu de l'exposé oral,
- (ii) l'exposé de E. PREISSMANN [3] ne sera pas rédigé et je me propose de combler ici cette lacune.

Pour les notations, je suivrai celles introduites par LANGEVIN ; le point étudié est celui mentionné dans [2] (1.7) 1°), i. e. :

Déterminer un entier $n_1(k)$ et une minoration de $P(n, k)$ lorsque n est compris entre $k^{3/2}$ et $n_1(k)$.

En combinant le crible de Selberg et la méthode de Van Der CORPUT pour l'estimation de sommes trigonométriques, J. RAMACHANDRA [4] démontre que l'on a :

$$P(n, k) > k^{1+2\lambda(n,k)}$$

pour $\lambda(n, k) = -(8 + \log n / \log k)$ et $k^{3/2} \leq n \leq k^{\log \log k}$.

Par la même technique, mais en utilisant les estimations de VINOGRADOV, E. PREISSMANN démontre que l'on a :

$$P(n, k) > k^{1+2^{c_1 \lambda(n,k)}}$$

pour $k^{3/2} \leq n \leq k^{c_2 (\log k)^{(1/4)-\varepsilon}}$ (ε positif arbitraire).

Ces résultats ont été maintenant améliorés par M. JUTILA qui a démontré récemment [1] que l'on a :

$$(1) \quad P(n, k) \gg k^{1+c_1 \Lambda(k,n)}$$

où $\Lambda(k, n) = (\log k / \log n)^2$ et $k^{3/2} \leq n \leq k^{c_2 (\log k)^{1/2} / \log \log k}$.

La méthode de JUTILA étant plus simple (conceptuellement) et plus puissante, c'est la seule que nous exposerons.

La clef de la méthode est le lemme suivant.

LEMME. - Soient σ un nombre réel tel que $0 < \sigma \leq 1$, P un entier tel que $2 \leq P \leq n$, et soit $D(\sigma)$ le nombre de nombres premiers p compris entre P et $2P$, et tels que la partie fractionnaire de n/p (notée $\{n/p\}$) soit supérieure à $1 - \sigma$; on a :

$$D(\sigma) = \sigma(\pi(2P) - \pi(P)) + \Delta(P, n)$$

avec

$$\Delta(P, n) = O\left((P^{1-c} 3^{\Lambda(P,n)} + P^{3/2} n^{-1/2} (\log P)^{1/2}) \exp(c_4 (\log \log P)^2)\right).$$

Ce lemme qui concerne la discrépance de la suite $\{n/p\}$ se ramène à une estimation de sommes trigonométriques par une méthode classique (cf. le résultat d'ERDŐS-TURÁN :

$$|\Delta(P, n)| \ll \left(\frac{P}{H \log P} + \sum_{h=1}^H \frac{1}{h} \left| \sum_{p=P}^{2P} e(hn/p) \right| \right),$$

lesquelles sommes trigonométriques sont évaluées par la méthode de VINOGRADOV.

Pour appliquer ce lemme à notre problème, on choisit $P = ck^{1+c_1 \Lambda(k,n)}$, avec des constantes c et c_1 telles que $D(L(P, n)) > 0$, avec

$$L(p, n) = (P^{-c} 3^{\Lambda(P,n)} + P^{1/2} n^{-1/2} (\log P)^{1/2} \exp(c_4 + 1)(\log \log P)^2) \exp(c_2 (\log k)^{1/2} / \log \log k),$$

on vérifie que cela est possible si $n \leq k^{c_2 (\log k)^{1/2} / \log \log k}$. Il en résulte qu'il existe au moins un nombre premier p , supérieur à $P = ck^{1+c_1 \Lambda(k,n)}$ tel que :

$$1 - L(P, n) \leq \{n/p\}.$$

Il existe donc un entier u tel que l'on ait :

$$u - L(P, n) \leq n/p \leq u,$$

ou encore

$$pu - pL(P, n) \leq n \leq pu.$$

On a donc un entier (pu) , compris entre n et $n + pL(P, n)$, dont le plus grand facteur premier est supérieur ou égal à p ; puisque $pL(P, u)$ est inférieur à k , on a établi la relation (1).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JUTILA (Matti). - On number with a large prime factor, II (à paraître).
- [2] LANGEVIN (Michel). - Sur la fonction plus grand facteur premier, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G22, 29 p.
- [3] PREISSMANN (E.). - Calcul des grands facteurs premiers ..., Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Groupe d'étude de théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° G6 (non rédigé).
- [4] RAMACHANDRA (K.). - A note on number with a large prime factor, II., J. Indian math. Soc., t. 34, 1970, p. 39-48.

(Texte reçu le 7 octobre 1975)

Jean-Marc DESHOUILERS
UER de Mathématiques et Informatique
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE