

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GILLES ROBERT

Nombres de Hurwitz et régularité des idéaux premiers

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1974-1975), exp. n° 21, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A16_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES DE HURWITZ ET RÉGULARITÉ DES IDÉAUX PREMIERS

par Gilles ROBERT

Introduction.

Soit p un nombre premier. Le corps $\mathbb{Q}(\mu_p)$, où μ_p est une racine primitive p -ième de l'unité, est la plus grande extension abélienne de $\mathbb{Q}$ de conducteur l'idéal (p) . On dit que p est régulier lorsque le nombre de classes $h_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$ de $\mathbb{Q}(\mu_p)$ est premier avec p ; cette notion a été introduite par KUMMER en liaison avec ses recherches sur l'équation de Fermat.

Soit $K = \mathbb{Q} \sqrt{-d}$ un corps quadratique imaginaire (d entier > 0 sans facteurs carrés). Soit p un idéal premier de K au-dessus de (p) . Notons H_p la plus grande extension abélienne de K de conducteur p . Le corps H_p est, comme $\mathbb{Q}(\mu_p)$, un corps de nombres, et nous dirons que p est régulier lorsque le nombre de classes h_{H_p} de H_p est premier avec p .

Nous voulons énoncer ici une condition numérique A qui implique la régularité de p .

1. Groupe des unités elliptiques.

Soit H la plus grande extension abélienne non ramifiée de K , c'est un sous-corps de H_p . Notons S l'anneau des entiers de K : le groupe de Galois $\text{Gal}(H/K)$ est isomorphe au groupe de classes d'idéaux de S (on a donc $H = K$ si S est principal), et $G = \text{Gal}(H_p/H)$ est isomorphe à un quotient du groupe multiplicatif $(S/p)^*$.

Notons Ω le sous-groupe du groupe U de toutes les unités de H_p construit dans [2] (Corollaire du théorème 16, §6). Les éléments du groupe Ω sont les valeurs singulières de fonctions elliptiques modulaires définies sur H , et Ω possède les propriétés suivantes :

THÉOREME 1.

- (i) Le groupe Ω est invariant par $\text{Gal}(H_p/k)$.
- (ii) Le groupe Ω contient le groupe des unités de H .
- (iii) L'indice de Ω dans U est fini ; il est donné par la formule

$$(U:\Omega) = 2^\alpha 3^\beta h_{H_p}/h_H,$$

où α et β sont des entiers ≥ 0 que nous savons calculer, et où h_{H_p} (resp. h_H) désigne le nombre de classes du corps H_p (resp. H).

Supposons que $p \neq 2, \neq 3$ et que p ne divise pas h_H , ce qui n'exclut qu'un nombre fini de p lorsque K est fixé. Nous déduisons de (iii) le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. - Pour que l'idéal $\mathfrak{p}$ soit régulier, il faut et il suffit que l'indice $(U:\Omega)$ soit premier avec p .

Considérons le p -groupe quotient $\Lambda = U/\Omega^p$. Pour que $(U:\Omega)$ soit premier avec p , il faut et il suffit que $\Lambda = (1)$. Comme Ω est stable par $G = \text{Gal}(H_p/H)$ d'après (i), le p -groupe Λ possède une structure de $\mathbb{F}_p[G]$ -module, où $\mathbb{F}_p$ désigne le corps premier à p éléments.

Vu que l'ordre de G divise $N(p) - 1 = \text{card}(S/p)^*$, les sommes

$$1_\chi = \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g / (G:1),$$

définies pour tout caractère irréductible χ de G dans $\mathbb{F}_p$, appartiennent à $\mathbb{F}_p(G)$. Les éléments 1_χ forment un système complet d'idempotents primitifs et orthogonaux de $\mathbb{F}_p(G)$, par conséquent nous avons

$$\Lambda = \bigoplus_\chi \Lambda_\chi, \text{ où } \Lambda_\chi = \Lambda \cdot 1_\chi.$$

Comme Ω contient les unités de H d'après (ii), le facteur Λ_1 est trivial, d'où le résultat suivant :

COROLLAIRE 2. - Pour que l'idéal $\mathfrak{p}$ soit régulier, il faut et il suffit que les facteurs Λ_χ soient triviaux pour tout caractère $\chi \neq 1$.

La condition A que nous voulons énoncer se réduit ainsi à un nombre fini de conditions A_χ , pour $\chi \neq 1$, telles que

$$A_\chi \Rightarrow \Lambda_\chi = (1).$$

2. Nombres de Hurwitz.

1° Les conditions A_χ font appel aux nombres de Hurwitz $s_{2k}(\Gamma)$, $k \geq 1$, associés à des réseaux $\Gamma \subset \mathbb{C}$ tels que $S\Gamma \subset \Gamma$.

Soit $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, avec $\text{Im}(w_1/w_2) > 0$, un réseau complexe. On pose, pour $k \geq 2$,

$$s_{2k}(\Gamma) = \left(\frac{2\pi i}{w_2}\right)^{2k} \left[-b_{2k}/(2k)! + \frac{2}{(2k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{2k-1}(n) q^n \right],$$

et

$$s_2(\Gamma) = \left(\frac{2\pi i}{w_2}\right)^2 \left[-b_2/2 + 2 \sum_{n>0} \sigma_1(n) q^n + 1/4\pi \text{Im}(w_1/w_2) \right],$$

où $q = \exp(2\pi i w_1/w_2)$, $\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{2k-1}$, et b_{2k} désigne le nombre de Bernoulli d'indice $2k$.

Les formes s_{2k} , $k \geq 1$, sont invariantes par $SL_2(\mathbb{Z})$; par conséquent, les nombres $s_{2k}(\Gamma)$ que nous venons de définir ne dépendent pas du choix de la base

(w_1, w_2) de Γ ; de plus, s_{2k} est homogène de poids $2k$, c'est-à-dire que, pour tout nombre complexe $\lambda \neq 0$, nous avons l'identité

$$s_{2k}(\Gamma) = \lambda^{2k} s_{2k}(\lambda\Gamma) .$$

2° Lorsque Γ est stable pour la multiplication par S , c'est-à-dire lorsque $S\Gamma \subset \Gamma$, il est bien connu que l'invariant modulaire $j(\Gamma)$ appartient au corps H . Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, choisir un multiple de Γ tel que les invariants $3s_4(\Gamma)$ et $5s_6(\Gamma)$ soient des éléments p-entiers de H .

Pour tout idéal entier α non nul de K , définissons les quantités $s_{2k}(\alpha, \Gamma)$, $k \geq 1$, par

$$s_{2k}(\alpha, \Gamma) = N(\alpha) s_{2k}(\Gamma) - s_{2k}(\alpha^{-1}\Gamma) ,$$

où $N(\alpha)$ désigne le nombre d'éléments de l'anneau résiduel S/α .

Posons $a = 2$ si p est invariant pour la conjugaison complexe, et $a = 1$ sinon. Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION.

(i) Les sommes $s_{2k}(\alpha, \Gamma)$ appartiennent à H .

(ii) Si $v_p(s_{2k}(\alpha, \Gamma))$ désigne la p-valuation de $s_{2k}(\alpha, \Gamma)$, normalisée par $v_p(p) = 1$, et $[2k/p^a - 1]$ la partie entière du quotient $2k/p^a - 1$, nous avons l'inégalité

$$v_p(s_{2k}(\alpha, \Gamma)) + [2k/p^a - 1] \geq 0 .$$

Cette proposition peut se démontrer en considérant la loi de groupe p-adique formel, attachée au tore $\mathbb{C}/\Gamma$, qui est de hauteur 1 ou 2 suivant que $a = 1$ ou 2.

Nous utiliserons les conséquences suivantes de la proposition :

COROLLAIRE 1. - Lorsque $0 < 2k < p^a - 1$, les sommes $s_{2k}(\alpha, \Gamma)$ sont des éléments p-entiers de H .

COROLLAIRE 2. - Les nombres de Hurwitz $s_{2k}(\alpha^{-1}\Gamma)$ appartiennent à H , et nous avons l'inégalité

$$v_p(s_{2k}(\alpha^{-1}\Gamma)) + [2k/p^a - 1] + v_{2k} \geq 0 ,$$

où $v_{2k} = \inf_{\alpha \in S} v_p(N(\alpha) - \alpha^{2k})$.

Cette dernière inégalité résulte de la proposition et de l'identité

$$s_{2k}(\alpha, \Gamma) = N(\alpha) s_{2k}(\Gamma) - s_{2k}(\alpha^{-1}\Gamma) = (N(\alpha) - \alpha^{2k}) s_{2k}(\Gamma) .$$

Les entiers v_{2k} ne dépendent que de la classe de $2k$ modulo $N(p) - 1$; on a $v_{2k} = 1$ lorsque p est ramifié et $2k \equiv 2 \pmod{p-1}$, ou lorsque p est de degré 2 et $2k \equiv p+1 \pmod{p^2-1}$; dans tous les autres cas, $v_{2k} = 0$.

3. Les conditions numériques A_χ .

1° La possibilité d'exprimer les conditions A_χ à l'aide des sommes $s_{2k}(a, \Gamma)$ résulte du fait que les combinaisons linéaires finies

$$\sum_a m_a s_{2k}(a, \Gamma), \quad k \geq 1,$$

avec $\sum_a m_a = 0$ et m_a entier rationnel, apparaissent comme coefficients du développement en série de Taylor des dérivées logarithmiques de certaines fonctions elliptiques, celles-là mêmes dont les valeurs singulières sont les éléments du groupe d'unités Ω de H_p introduit précédemment. Cette idée se trouve déjà ébauchée dans le travail d'A. P. NOVIKOV [1].

2° Rappelons d'abord la description classique des caractères du groupe $G = \text{Gal}(H_p/H)$.

Notons e l'ordre du groupe des unités de $K = \mathbb{Q} \sqrt{-d}$ (on sait que $e = 2$ si $d \neq 1$ et $\neq 3$, et que $e = 4$ ou 6 suivant que $d = 1$ ou 3). Lorsque $p \neq 2$ et $\neq 3$, l'isomorphisme de réciprocity d'Artin identifie G au quotient du groupe multiplicatif $(S/p)^*$ par son sous-groupe cyclique d'ordre e .

Les caractères irréductibles $\chi \neq 1$ de $(S/p)^*$ dans $\mathbb{F}_p$, triviaux sur le sous-groupe cyclique d'ordre e , sont de deux sortes :

(i) Les caractères χ_k de degré 1 définis par

$$\chi_k(\alpha) = \alpha^k,$$

où $\alpha \in (S/p)^*$, et k est un entier tel que $0 < k < N(p) - 1$ et $e|k$ ou $(p+1)|k$ suivant que $N(p) = p$ ou p^2 .

(ii) Lorsque $N(p) = p^2$, les caractères $\chi_{k,k'}$ de degré 2 définis par

$$\chi_{k,k'}(\alpha) = \alpha^k + \alpha^{k'},$$

où $\alpha \in (S/p)^*$, et où k et k' sont des entiers tels que $0 < k < k' < p^2 - 1$, $e|k$, $e|k'$ et $pk \equiv k' \pmod{p^2 - 1}$.

3° Nous supposons désormais que p n'est pas ramifié. Cette nouvelle restriction qui s'ajoute aux précédentes ($p \neq 2$, $\neq 3$ et $p \nmid h_H$) n'exclut à nouveau qu'un ensemble fini de nombres premiers p . Nous avons alors $N(p) = p$ ou p^2 suivant que $a = 1$ ou 2 , soit $N(p) = p^a$.

Notons $\text{Cl}(K)$ le groupe de classes d'idéaux de l'anneau S , et $h = \deg(H/K)$ le nombre d'éléments de $\text{Cl}(K)$. Soient $a_1 = (1)$, $a_2, \dots, a_h$ des idéaux entiers de K premiers avec p formant un système complet de représentants de $\text{Cl}(K)$.

Soit k un entier tel que $0 < k < N(p) - 1$ et $e|k$ ou $(p+1)|k$ suivant que $N(p) = p$ ou p^2 . Les restes modulo p des solutions $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \in S \times S \times \dots \times S = S^h$ de la congruence

$$\lambda_1 p^{\nu_k} s_k(\Gamma) + \sum_{i=2}^h \lambda_i s_k(a_i^{-1} \Gamma) \equiv 0 \pmod{p}$$

forment un $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel dont la dimension $d_k(\Gamma)$ ne dépend pas du choix du système de représentants $a_1, a_2, \dots, a_h$ de $Cl(K)$. Nous avons le résultat suivant :

THÉOREME 2. - Pour tout caractère χ_k de degré 1 du groupe $G = \text{Gal}(\mathbb{H}_p/\mathbb{H})$, le p-rang de Λ_{χ_k} est majoré par $d_k(\Gamma)$.

D'une manière analogue, supposons que $N(p) = p^2$, et soient k et k' deux entiers tels que $0 < k < k' < p^2 - 1$, et $e|k$, $e|k'$ et $pk \equiv k' \pmod{p^2 - 1}$. Les restes modulo p des solutions $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h) \in S^h$ des congruences

$$\begin{cases} \lambda_1 s_k(\Gamma) + \sum_{i=2}^h \lambda_i s_k(a_i^{-1} \Gamma) \equiv 0 \pmod{p} \\ \lambda_1^p s_{k'}(\Gamma) + \sum_{i=2}^h \lambda_i^p s_{k'}(a_i^{-1} \Gamma) \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

forment un $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel dont la dimension $d_{k,k'}(\Gamma)$ ne dépend pas du choix du système de représentants $a_1, a_2, \dots, a_h$ de $Cl(K)$. Nous avons le résultat suivant :

THÉOREME 3. - Pour tout caractère $\chi_{k,k'}$ de degré 2 du groupe $G = \text{Gal}(\mathbb{H}_p/\mathbb{H})$, le p-rang de $\Lambda_{\chi_{k,k'}}$ est majoré par $d_{k,k'}(\Gamma)$.

Dans le cas où $h = 1$, nous avons déjà énoncé ces résultats dans [3].

4. Analogie avec la théorie cyclotomique

1° Soit Ψ le groupe des unités circulaires de $\mathbb{Q}(\mu_p)$. Le groupe Ψ est un sous-groupe du groupe V des unités réelles de $\mathbb{Q}(\mu_p)$, dont les éléments sont les valeurs singulières de fonctions circulaires rationnelles, qui possède les propriétés suivantes :

THÉOREME 4.

(i) Le groupe Ψ est invariant par $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)^+/\mathbb{Q})$, où $\mathbb{Q}(\mu_p)^+$ désigne le sous-corps réel maximal de $\mathbb{Q}(\mu_p)$.

(ii) L'indice de Ψ dans V est fini ; il est donné par la formule

$$(V:\Psi) = h_{\mathbb{Q}(\mu_p)^+},$$

où $h_{\mathbb{Q}(\mu_p)^+}$ désigne le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\mu_p)^+$.

Il s'agit là de résultats bien connus. Le nombre $h_{\mathbb{Q}(\mu_p)^+}$ est un diviseur de $h_{\mathbb{Q}(\mu_p)}$, et on sait exprimer, à l'aide des nombres de Bernoulli, une condition (B) qui implique que $h_{\mathbb{Q}(\mu_p)^+}$ est premier avec p . Nous nous proposons de rappeler les grandes lignes de la construction de la condition (B) pour mettre en évidence son parallélisme avec la construction précédente.

Considérons le p -groupe quotient $\psi = V/\psi V^p$. Comme Ψ est stable par $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)^+/\mathbb{Q})$ d'après (i), le p -groupe ψ possède une structure de $\mathbb{F}_p[G]$ -

module. Comme l'ordre de G divise $p - 1$, nous pouvons décomposer χ selon les caractères irréductibles χ de G dans $\mathbb{F}_p$. Nous avons

$$\chi = \bigoplus_{\chi} \chi_{\chi}, \text{ où } \chi_{\chi} = \chi \cdot 1_{\chi}.$$

D'après (ii), pour que $h_{\mathbb{Q}(\mu_p)^+}$ soit premier avec p , il faut et il suffit que $\chi = (1)$; on en déduit comme précédemment le résultat suivant :

COROLLAIRE. - Pour que $(h_{\mathbb{Q}(\mu_p)^+}, p) = 1$ il faut et il suffit que les facteurs χ_{χ} soient triviaux pour tout caractère $\chi \neq 1$.

La condition B se réduit ainsi à un nombre fini de conditions B_{χ} , pour $\chi \neq 1$, telles que

$$B_{\chi} \Rightarrow \chi_{\chi} = (1).$$

2° La propriété suivante des nombres de Bernoulli b_k , k pair, est également bien connue :

PROPOSITION. - Si $p \nmid k$, le nombre rationnel b_k est p -entier.

La possibilité d'exprimer les conditions B_{χ} à l'aide des nombres de Bernoulli résulte du fait que les combinaisons linéaires finies

$$\sum m_{\alpha} \alpha^k b_k / k!, \quad k \text{ pair},$$

avec $\sum m_{\alpha} = 0$, α et m_{α} entiers rationnels, apparaissent comme coefficients du développement en série de Taylor des dérivées logarithmiques de certaines fonctions circulaires, celles-là mêmes dont les valeurs singulières sont les éléments du groupe d'unités circulaires Ψ de $\mathbb{Q}(\mu_p)$.

Lorsque $p \neq 2$, l'isomorphisme de réciprocité d'Artin identifie G au quotient du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p)^*$ par $\{-1, +1\}$. Les caractères irréductibles $\chi \neq 1$ de $(\mathbb{Z}/p)^*$ dans $\mathbb{F}_p$ tels que $\chi(-1) = 1$ sont les caractères χ_k de degré 1, définis par

$$\chi_k(\alpha) = \alpha^k,$$

où $\alpha \in (\mathbb{Z}/p)^*$, et k est un entier pair tel que $0 < k < p - 1$. Nous avons le résultat suivant :

THÉOREME 5. - Soit χ_k un caractère $\neq 1$ du groupe $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)^+/\mathbb{Q})$, si $\chi_{\chi_k} \neq (1)$, alors $p \mid b_k$.

Notons encore que les techniques p -adiques utilisées pour démontrer les théorèmes 2 et 3 et pour démontrer le théorème 5 sont essentiellement identiques.

3° Un phénomène très remarquable de la théorie cyclotomique est que la conjonction B des conditions B_{χ} , $\chi \neq 1$, que nous venons de décrire, non seulement implique que $(h_{\mathbb{Q}(\mu_p)^+}, p) = 1$, mais se trouve aussi être équivalente à la régula-

rité du nombre premier p , c'est-à-dire que

$$B = \bigcup_{\chi \neq 1} B_{\chi} \iff (h_{\mathbb{Q}(\mu_p)}, p) = 1.$$

Il pourrait être intéressant d'examiner si une telle réciproque existe pour la condition $A = \bigcup_{\chi \neq 1} A_{\chi}$ énoncée plus haut.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] NOVIKOV (A. P.). - Sur la régularité des idéaux premiers de degré 1 d'un corps quadratique imaginaire [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat., t. 33, 1969, p. 1059-1079 ; [en anglais] Math. USSR-Izvestija, t. 3, 1969, p. 1001-1018.
- [2] ROBERT (G.). - Unités elliptiques et formules pour le nombre de classes des extensions abéliennes d'un corps quadratique imaginaire, Bull. Soc. math. France, Mémoire 36, 1973, 77 p.
- [3] ROBERT (G.). - Régularité des idéaux premiers d'un corps quadratique imaginaire de nombre de classes 1, "Journées arithmétiques [1974, Bordeaux]", Astérisque 24-25, 1975, p. 75-80.

On trouvera une bibliographie plus détaillée dans [2].

(Texte reçu le 21 juillet 1975)

Gilles ROBERT
99 rue Raymond Losserand
75014 PARIS
