

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PAUL ERDÖS

## Méthodes probabilistes en théorie des nombres

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 15, n° 1 (1973-1974),  
exp. n° 1, p. 1-4

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1973-1974\\_\\_15\\_1\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A1_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MÉTHODES PROBABILISTES EN THÉORIE DES NOMBRES

par Paul ERDÖS

Rédigé par Jean-Louis NICOLAS

## 1. Etablir des conjectures.

Les méthodes probabilistes permettent d'établir des conjectures en théorie des nombres. C'est ainsi que CRAMER [1], observant que, pour presque toutes les suites  $a_n$  vérifiant  $a_n \sim n \log n$ , on avait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(\log n)^2} = 1$$

a conjecturé que l'on avait pour  $p_n$  la suite des nombres premiers

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\log n)^2} = 1.$$

Les meilleurs résultats sur la différence  $p_{n+1} - p_n$  sont très loin de cette conjecture : HUXLEY [10] a démontré que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on avait

$$p_{n+1} - p_n = O(p_n^{(7/12)+\varepsilon}),$$

et d'autre part RANKIN [13] a montré que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité

$$p_{n+1} - p_n \geq (e^\gamma - \varepsilon) \log p_n \frac{(\log \log p_n)(\log \log \log \log p_n)}{(\log \log \log p_n)^2}$$

était vérifiée une infinité de fois ( $\gamma$  est la constante d'Euler).

## 2. Fonction de répartition.

Le livre de références est celui de KUBILIUS [11] dont l'introduction fait un très bon historique de la question et qui donne de nombreuses références, dont 9 articles de H. DELANGE qui a contribué à l'étude de ces problèmes.

Définition. - On dit qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  a une fonction de répartition  $F$ , si, pour tout  $x$  réel, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{card}\{n \in \mathbb{N} ; f(n) \leq x\} = F(x).$$

DAVENPORT [2] a montré que  $\sigma(n)/n$ , où  $\sigma(n)$  est la somme des diviseurs de  $n$ , a une fonction de répartition continue (cf. aussi [15]). SCHOENBERG a montré que  $\varphi(n)/n$ , où  $\varphi$  est l'indicateur d'Euler, a aussi une fonction de répartition [14].

Une fonction est dite additive, si, pour  $m$  et  $n$  premiers entre eux, on a  $f(mn) = f(m) f(n)$ , et fortement additive si on a toujours  $f(mn) = f(m) f(n)$ . ERDÖS et WINTNER [5] ont démontré qu'une fonction arithmétique additive a une fonction de répartition si, et seulement si, les séries

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{f'(p)}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{p \text{ premier}} \frac{(f'(p))^2}{p}$$

sont convergentes, avec  $f'(p) = f(p)$  si  $f(p) < 1$ , et  $f'(p) = 1$  si  $f(p) > 1$  (cf. [11], théorème 4.5, p. 74).

En 1936, ERDÖS [4] a démontré : Soit  $\omega(n)$  le nombre de diviseurs premiers de  $n$ , on a

$$\frac{1}{x} \text{card}\{n \leq x ; \omega(n) > \log \log n\} = \frac{1}{2}.$$

Ce résultat a été généralisé avec KAC [6] grâce au théorème central limite des probabilités et au crible de Brun.

**THÉOREME (ERDÖS-KAC).** - Soit  $f$  une fonction fortement additive vérifiant  $|f(p)| \leq M$  pour tout  $p$  premier, et telle que les séries  

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{f(p)}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{p \text{ premier}} \frac{f(p)^2}{p}$$
  
soient divergentes. On pose

$$A(x) = \sum_{p \leq x} \frac{f(p)}{p} \quad \text{et} \quad B(x) = \left( \sum_{p \leq x} \frac{f(p)^2}{p} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors on a :

$$\lim \frac{1}{x} \text{card}\{n \leq x ; f(n) \leq A(x) + tB(x)\} = G(t),$$

où

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp(-x^2/2) dx.$$

La démonstration se trouve dans KUBILIUS ([11], théorème 4.2, p. 61). Elle est basée sur le fait qu'une fonction fortement additive est la somme de variables aléatoires  $X_p$  qui valent  $f(p)$  avec la probabilité  $\frac{1}{p}$ , et 0 avec la probabilité  $(1 - \frac{1}{p})$ .

### 3. Comportement de $f(n)$ par rapport à $f(n+1)$ .

Si  $f$  est une fonction additive qui satisfait aux conditions du théorème de Erdős-Kac, on peut montrer (LEVÊQUE [12]) que  $f(n)$  et  $f(n+1)$  se comportent comme des variables indépendantes. En particulier, si  $d(n)$  est le nombre de diviseurs de  $n$ , l'ensemble des  $n$  vérifiant  $d(n+1) > d(n)$  a pour densité  $1/2$ ; et de même pour  $\omega(n)$ , le nombre de diviseurs premiers de  $n$  (ERDÖS [3]). On ne sait rien dire sur les entiers  $n$  tels que  $\omega(n+1) = \omega(n)$ .

Si l'on choisit pour  $f$  la fonction fortement additive, définie par  $f(p) = \log p$ , alors  $f(n) = \log n$ , et on a toujours  $f(n+1) > f(n)$ . Par contre, si l'on choisit  $f(p) = p$  ou  $f(p) = (\log p)^\alpha$  avec  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ , on ne peut rien dire sur la densité des  $n$  tels que  $f(n+1) > f(n)$ , car les grands nombres premiers sont décisifs.

Soit  $g(n)$  une fonction donnée. On pose  $f(n) = p$ , où  $p$  est le plus petit diviseur de  $n$  vérifiant  $p > g(n)$ . Si, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $g(n) = o(n^\varepsilon)$ , alors les  $n$ , tels que  $f(n+1) > f(n)$ , ont pour densité  $1/2$ . Mais si  $g(n) = n^c$ ,  $c > 0$ , on ne sait rien.

Rappelons qu'une fonction additive et croissante est proportionnelle à  $\log n$ .  
Une fonction  $f$ , vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) - f(n) = 0,$$

est aussi proportionnelle à  $\log n$ . Enfin WIRSING [16] a récemment démontré que si  $f$  additive vérifiait

$$f(n+1) - f(n) \leq C,$$

on avait  $f(n) = a \log n + g(n)$  avec  $g(n)$  borné.

#### 4. Problèmes de base additive d'ordre 2.

Pour ce genre de problème, voir le livre de HALBERSTAM et ROTH ([9], chapitre 3).

Etant donnée une suite  $(a_i)$ , on appelle  $g(n)$  le nombre de représentations  $n = a_i + a_j$ . SIDON avait demandé s'il était possible de trouver une suite  $(a_i)$  telle que  $g(n) > 0$  pour tout  $n$  assez grand, mais telle que  $g(n) = O(n^\epsilon)$  pour tout  $\epsilon$ . ERDÖS [7] a résolu ce problème par un argument probabilistique, et a même démontré que, pour presque toutes les suites, on avait :

$$c_1 \log n \leq g(n) \leq c_2 \log n.$$

Mais on ne connaît pas de suite explicite pour laquelle ces inégalités sont vérifiées. On ne sait pas non plus s'il existe une suite telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/\log n = c > 0.$$

CONJECTURE (primée 1000 francs suisses). - Pour toute suite, telle que  $g(n) > 0$  à partir d'un certain rang, on a  $\overline{\lim} g(n) = \infty$ . Peut-être a-t-on

$$\overline{\lim} \frac{g(n)}{\log n} > 0.$$

Une conjecture plus forte est la suivante. Pour toute suite  $(a_k)$ , vérifiant  $a_k < ck^2$ , on a  $\overline{\lim} g(n) = \infty$ .

#### 5. Problème de Erdős et Moser.

Etant donné  $x$ , trouver  $k = f(x)$  le nombre maximum d'entiers  $a_1 < a_2 < \dots < a_k < x$  tels que les sommes  $\sum_{i=1}^k \epsilon_i a_i$ , où  $\epsilon_i$  vaut 0 ou 1, soient toutes distinctes.

Si l'on prend  $x = 2^k$  et  $a_i = 2^{i-1}$ , on voit que  $f(2^k) \geq k$ . Si l'on prend  $x = 8$ , les nombres 3, 5, 6, 7 forment une meilleure famille. CONWAY et GUY ont un exemple numérique non publié de 24 nombres inférieurs à  $2^{22}$  ayant la propriété.

Par une méthode probabiliste, MOSER et ERDÖS [8] ont montré

$$f(x) \leq \frac{\log x}{\log 2} + \frac{\log \log x}{2 \log 2} + c.$$

CONJECTURE. - Montrer que  $f(x) < (\log x / \log 2) + c$ , et trouver un exemple numérique avec  $f(2^k) \geq k + 3$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CRAMER (H.). - On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers, *Acta Arithmetica*, Warszawa, t. 2, 1937, p. 23-46.
- [2] DAVENPORT (H.). - *Über numeri abundantes*, *Sitzungsber. Akad. Berlin*, 1933, p. 830-837.
- [3] ERDÖS (P.). - On a problem of Chowla and some related problems, *Proc. Cambridge philos. Soc.*, t. 32, 1936, p. 530-540.
- [4] ERDÖS (P.). - Note on the number of prime divisors of integers, *J. London math. Soc.*, t. 12, 1937, p. 308-314.
- [5] ERDÖS (P.) and WINTNER (A.). - Additive arithmetic functions and statistical independance, *Amer. J. of Math.*, t. 61, 1939, p. 713-722.
- [6] ERDÖS (P.) and KAC (M.). - The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions, *Amer. J. of Math.*, t. 62, 1940, p. 738-742.
- [7] ERDÖS (P.). - On a problem of Sidon in additive number theory, *Acta Scient. Math.*, Szeged, t. 15, 1954, p. 255-259.
- [8] ERDÖS (P.). - Problems and results in additive number theory, "Colloque sur la théorie des nombres [1955. Bruxelles]", p. 127-137. - Liège, G. Thone ; Paris, Masson, 1956 (Centre belge de Recherches mathématiques).
- [9] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - *Sequences*. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.
- [10] HUXLEY (M. N.). - *The distribution of prime numbers. Large sieves and zero-density theorems*. - Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).
- [11] KUBILIUS (J.). - *Probabilistic methods in the theory of numbers*, vol. 11. *Translations of mathematical Monographs*.
- [12] LEVÊQUE (W. J.). - On the size of certain number theoretic functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 66, 1949, p. 440-463.
- [13] RANKIN (R. A.). - The difference between consecutive prime numbers, V, *Proc. Edimburgh math. Soc.*, t. 13, 1963, p. 331-332.
- [14] SCHOENBERG (I. J.). - On asymptotic distributions of arithmetical functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 39, 1936, p. 315-330.
- [15] WALL (C. R.). - Density bounds for the sum of divisors function, "The theory of arithmetic functions [1971. Kalamazoo]", p. 283-287. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in Mathematics*, 251).
- [16] WIRSING (E.). - A characterization of  $\log n$  as an additive arithmetic function, "Symposia Mathematica, vol. 4 : Teoria dei numeri [1968. Roma]", p. 45-57. - London and New York, Academic Press, 1970 (Istituto nazionale di Alta Matematica).

(Texte reçu le 24 juin 1974)

Paul ERDÖS  
 Magyar Tudományos Akadémia  
 Matematikai Kutató Intézet  
 Reáltanoda u. 13-15  
 BUDAPEST V (Hongrie)