

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL WALDSCHMIDT

## Une méthode « élémentaire » dans la théorie des nombres transcendants, II

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 14, n° 2 (1972-1973),  
exp. n° G5, p. G1-G5

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1972-1973\\_\\_14\\_2\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A12_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNE MÉTHODE "ÉLÉMENTAIRE"  
DANS LA THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS, II.

par Michel WALDSCHMIDT

Dans un premier exposé [3], nous avons démontré un théorème de Gel'fond et Schneider sur la transcendance de  $a^b$ , en nous restreignant au cas réel. Nous nous proposons de démontrer, dans le cas réel, une généralisation de ce théorème, due à BAKER [1] :

THÉORÈME. - Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  des nombres algébriques, réels, positifs, multiplicativement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Soient  $\beta_0, \dots, \beta_m$  des nombres algébriques réels non tous nuls. Alors on a

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m \neq 0.$$

Des nombres complexes non nuls  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sont multiplicativement indépendants sur  $\mathbb{Q}$  si l'équation

$$\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_m^{\lambda_m} = 1,$$

n'admet que la solution triviale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (0, \dots, 0)$  dans  $\mathbb{Q}^m$ . Pour des nombres réels positifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , il est équivalent de dire que les nombres  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_m$  sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants. On peut donc énoncer le théorème de la manière suivante : si  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sont des nombres algébriques réels positifs, et si les nombres  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_m$  sont  $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants, alors les nombres

$$1, \log \alpha_1, \dots, \log \alpha_m$$

sont  $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})$ -linéairement indépendants.

Quand on choisit  $\alpha_1 = a$ ,  $\alpha_2 = a^b$ ,  $\beta_1 = b$ ,  $\beta_2 = -1$ , on en déduit le théorème de Gel'fond-Schneider [3] :

COROLLAIRE 1. - Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels algébriques, avec  $b$  irrationnel et  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , alors le nombre  $a^b$  est transcendant.

On obtient aussi, en considérant les nombres  $\beta_0 = \alpha$ ,  $\beta_1 = -1$ ,  $\alpha_1 = e^\alpha$ , le cas réel du théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de  $e^\alpha$  :

COROLLAIRE 2. - Si  $\alpha$  est un nombre algébrique réel non nul, alors  $e^\alpha$  est transcendant.

D'autres corollaires sont exposés dans [1] et [2].

Démonstration du théorème. - Supposons que la conclusion soit fautive ; quitte à

diviser tous les  $\beta_i$  par l'un d'eux (puisqu'ils ne sont pas tous nuls), on peut supposer  $\beta_m = -1$ , donc

$$(1) \quad \log \alpha_m = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log \alpha_{m-1} .$$

Soit  $K$  le corps obtenu en adjoignant à  $\mathbb{Q}$  les  $2m$  nombres

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_0, \dots, \beta_{m-1} .$$

On note  $\Delta$  le plus petit commun multiple des nombres entiers

$$d(\alpha_1), \dots, d(\alpha_m), d(\beta_0), \dots, d(\beta_{m-1}) .$$

Soit  $N$  un nombre entier assez grand, que l'on choisit divisible par  $4^m$ . Les lettres  $c_1, \dots, c_5$  indiqueront des constantes (indépendantes de  $N$ ).

Dans un premier temps, on construit un polynôme non nul

$$P \in K[X_0, \dots, X_m] ,$$

de degré, par rapport à  $X_0$  (resp.  $X_1, \dots, X_m$ ), inférieur à  $2N^{2m}$  (resp.  $N^{2m-1}$ )  
tel que la fonction

$$F(x) = P(x, \alpha_1^x, \dots, \alpha_m^x)$$

vérifie

$$(2) \quad \frac{d^s}{dx^s} F(x) = 0 \quad \text{pour } x = 1, \dots, N^m, \quad s = 0, \dots, N^{2m-1} .$$

Quand on écrit  $(d^s/dx^s) F(x)$  pour  $x \in \mathbb{Z}$ , on obtient un polynôme de degré total inférieur ou égal à  $s$  en  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_m$ , dont les coefficients sont dans  $K$ . On remplace alors  $\log \alpha_m$  par  $\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_{m-1} \log \alpha_{m-1}$  en vertu de (1), et on trouve ainsi un polynôme de degré total inférieur ou égal à  $s$  en  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_{m-1}$ .

Pour résoudre (2), il suffit que l'on annule chacun des coefficients de ces polynômes pour les valeurs correspondantes de  $x$  et  $s$ . On obtiendra ainsi un système d'équations linéaires homogènes, dont les inconnues sont les coefficients de  $P$ .

Écrivons pour cela le polynôme  $P$  sous la forme

$$P(X_0, \dots, X_m) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) X_0^{\lambda_0} \dots X_m^{\lambda_m} ,$$

avec  $(\lambda) = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ ,  $0 \leq \lambda_0 < 2N^{2m}$ ,  $0 \leq \lambda_j < N^{2m-1}$  ( $1 \leq j \leq m$ ). Ainsi la fonction  $F$  s'écrit

$$(3) \quad F(x) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) x^{\lambda_0} \exp((\lambda_1 \log \alpha_1 + \dots + \lambda_m \log \alpha_m)x) ,$$

ou encore, compte tenu de (1),

$$(4) \quad F(x) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) x^{\lambda_0} \exp[\lambda_m \beta_0 + \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda_j + \lambda_m \beta_j) \log \alpha_j] x ,$$

grâce à cette relation (4), on peut écrire les dérivées de  $F$  sous la forme

$$(5) \quad \frac{d^s}{dx^s} F = \sum_{\sigma_0 + \dots + \sigma_{m-1} = s} \frac{s!}{\sigma_0! \dots \sigma_{m-1}!} (\log \alpha_1)^{\sigma_0} \dots (\log \alpha_{m-1})^{\sigma_{m-1}} F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}} ,$$

$$(6) \quad F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}(x) = \sum_{(\lambda)} p(\lambda) \sum_{\mu=0}^{\sigma_0} \frac{\sigma_0!}{\mu! (\sigma_0 - \mu)!} \times \frac{\lambda_0!}{(\lambda_0 - \mu)!} (\beta_0 \lambda_m)^{\sigma_0 - \mu} \\ \times \prod_{j=1}^{m-1} (\lambda_j + \lambda_m \beta_j)^{\sigma_j} x^{\lambda_0 - \mu} \alpha_1^{\lambda_1 x} \dots \alpha_m^{\lambda_m x} .$$

On cherche alors à résoudre le système d'équations

$$(7) \quad \Delta^{N^{2m} + mN^{3m-1}} F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}(x) = 0, \quad 1 \leq x \leq N^m, \quad \sigma_j \geq 0, \quad \sigma_0 + \dots + \sigma_{m-1} < N^{2m} .$$

C'est un système linéaire homogène en  $p(\lambda)$ , de moins de  $N^{2m^2+m}$  équations à  $2N^{2m^2+m}$  inconnues, à coefficients dans  $K$  entiers sur  $\mathbb{Z}$ , dont on peut majorer la taille, en utilisant (6), par  $c_1 N^{3m-1}$ .

Le lemme de Siegel (voir par exemple [3] lemme 1) permet de trouver des éléments  $p(\lambda)$  non tous nuls, entiers de  $K$  sur  $\mathbb{Z}$ , vérifiant les relations (7), et de taille majorée par

$$(8) \quad \max_{(\lambda)} t(p(\lambda)) \leq c_2 N^{3m-1} .$$

La fonction  $F$  ainsi construite peut s'écrire, à partir de la relation (3), sous la forme

$$\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{p_j} a_{i,j} x^{i-1} e^{W_j x},$$

où  $W_1, \dots, W_q$  sont les nombres

$$\lambda_1 \log \alpha_1 + \dots + \lambda_m \log \alpha_m, \quad 0 \leq \lambda_h < N^{2m-1}, \quad 1 \leq h \leq m,$$

avec  $q = N^{2m^2-m}$ , et où  $p_j = 2N^{2m}$ ,  $1 \leq j \leq q$ .

D'après le lemme 2 de [3], le nombre de zéros de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  est majoré par  $p_1 + \dots + p_q = 2N^{2m^2+m}$ .

Par conséquent, si  $N$  est suffisamment grand, il existe deux entiers  $s, x$  vérifiant

$$1 \leq x \leq N^{(5/2)m^2+m}; \quad 0 \leq s < N^{2m} \cdot 2^{-(5/2)m^2}, \quad \text{et} \quad \frac{d^s}{dx^s} F(x) \neq 0 .$$

D'après (5), ceci montre que l'un au moins des nombres

$$F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}(x), \quad (1 \leq x \leq N^{(5/2)m^2+m}, \quad \sigma_0 + \dots + \sigma_{m-1} < N^{2m} \cdot 2^{-(5/2)m^2}),$$

est non nul. Désignons par  $\ell$  le plus petit entier tel que l'un des nombres

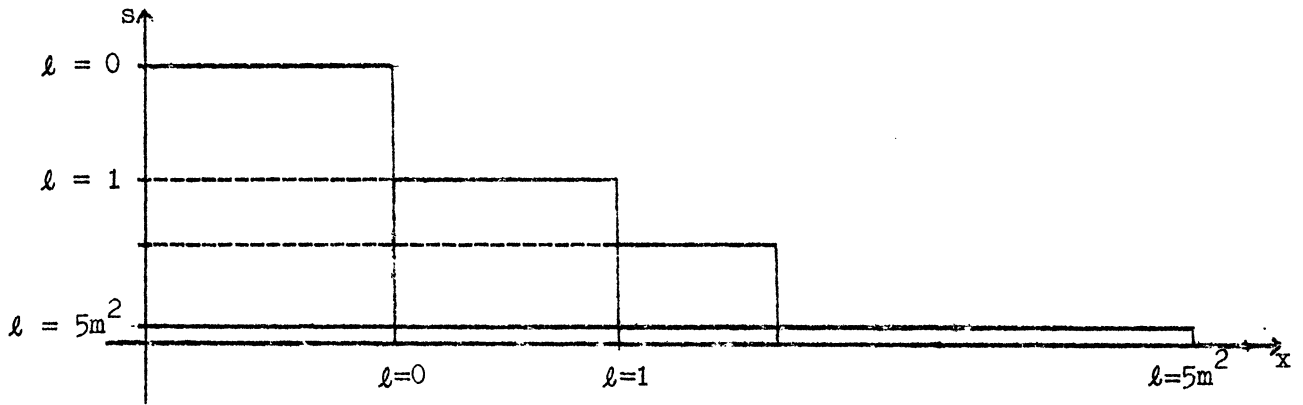
$$F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}(x), \quad (1 \leq x \leq N^{m+(\ell/2)}, \quad \sigma_0 + \dots + \sigma_{m-1} < N^{2m} \cdot 2^{-\ell})$$

soit non nul, et désignons par  $\gamma$  l'un de ces nombres non nul.

Les relations (7) montrent que l'on a  $\ell > 0$ , et nous venons de voir que

$$\ell \leq 5 \cdot m^2 .$$

Les domaines de variations de  $s = \sigma_0 + \dots + \sigma_{m-1}$  et  $x$ , en fonction de  $\ell$ , peuvent se représenter par le schéma suivant



Le nombre  $\gamma$  est un élément non nul de  $K$  dont on peut facilement majorer la taille, grâce à (6) et (8) :

$$t(\gamma) \leq c_3 \cdot N^{3m+(\ell/2)-1} \log N .$$

Nous allons montrer que  $\gamma$  vérifie l'inégalité

$$(9) \quad \log|\gamma| \leq - N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} ,$$

pour  $N$  suffisamment grand. Ainsi,  $\gamma$  ne vérifiera pas la relation (0) de [3] :

$$- 2[K:\mathbb{Q}] t(\gamma) \leq \log|\gamma| ,$$

bien que  $\gamma \in K$  soit non nul ; cette contradiction terminera la démonstration.

Pour obtenir (9), on écrit  $\gamma$  sous la forme  $F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}(x)$ , où  $\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}, x$  sont des entiers rationnels vérifiant

$$1 \leq x \leq N^{m+(\ell/2)} ; \sigma_j \geq 0 ; \sigma_0 + \dots + \sigma_{m-1} < N^{2m} 2^{-\ell} .$$

D'après le choix de l'entier  $\ell$ , on a

$$F_{\tau_0, \dots, \tau_{m-1}}(y) = 0 \text{ pour } 1 \leq y \leq N^{m+\{(\ell-1)/2\}} , \tau_j \geq 0 , \text{ et } \tau_0 + \dots + \tau_{m-1} < N^{2m} 2^{-(\ell-1)} .$$

Si on écrit (6) en remplaçant  $\alpha_m$  par  $e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_{m-1}^{\beta_{m-1}}$ , comme dans (4), on obtient facilement

$$\frac{d^u}{dx^u} F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}$$

$$= \sum_{\mu_0 + \dots + \mu_{m-1} = u} \frac{u!}{\mu_0! \dots \mu_{m-1}!} (\log \alpha_1)^{\mu_0} \dots (\log \alpha_{m-1})^{\mu_{m-1}} F_{\sigma_0 + \mu_0, \dots, \sigma_{m-1} + \mu_{m-1}}$$

Par conséquent, la fonction  $F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}$  admet les zéros  $y=1, \dots, N^{m+\{(\ell-1)/2\}}$  d'ordre au moins égal à  $N^{2m} 2^{-\ell}$ .

Sur l'intervalle  $[0, N^{m+(\ell/2)}]$ , la fonction  $F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}$  admet au moins  $Q = [N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} 2^{-\ell}]$  zéros. Or il est facile de majorer  $d^Q/dx^Q F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}$  sur cet intervalle, par

$$\exp[(2m-1)N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} \log(c_4 N)] .$$

On utilise alors le lemme 3 de [3] ; on a :

$$\begin{aligned}
|\gamma| &\leq \max_{0 \leq y \leq N^{m+(\ell/2)}} |F_{\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}}(y)| \\
&\leq \frac{N^{(m+(\ell/2))}}{Q!} N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} \exp[(2m-1)N^{3m+\{(\ell-1)/2\}} \log(c_4 N)] \\
&\leq \left(\frac{c_5}{N}\right)^{\frac{1}{2}N^{3m+\{(\ell-1)/2\}}} \leq \exp[-N^{3m+\{(\ell-1)/2\}}]
\end{aligned}$$

dès que  $N$  est suffisamment grand. On obtient ainsi la majoration (9), donc aussi le théorème.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER (Alan). - Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, I-IV, *Mathematika*, t. 13, 1966, p. 204-216 ; t. 14, 1967, p. 102-107, et p. 220-228, t. 15, 1968, p. 204-216.
- [2] WALDSCHMIDT (Michel). - Initiation aux nombres transcendants, *L'Enseignement mathématique*, Genève (à paraître en 1974).
- [3] WALDSCHMIDT (Michel). - Une méthode "élémentaire" dans la théorie des nombres transcendants, I., *Séminaire Delange-Pisot-Poitou*, 14e année, 1972/73, Groupe d'étude de théorie des nombres, n° G1, 5 p.

(Texte reçu le 27 juin 1973)

Michel WALDSCHMIDT  
 Mathématiques, Bât. 425  
 Université de Paris-Sud  
 91405 ORSAY

---