Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Alain Escassut

Les algèbres de Krasner-Tate

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° 17, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A5_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 17, 5 p.

13 mars 1972

LES ALGÈBRES DE KRASNER-TATE

par Alain ESCASSUT

Le but de cette étude est de préciser le rapport existant entre la théorie des algèbres de TATE [10] et la théorie des algèbres de KRASNER [8]. En considérant un corps K valué non archimédien, complet, algébriquement clos, nous montrerons que tout isomorphisme algébrique entre une algèbre de Krasner $H(D)$ et une algèbre topologiquement de type fini A sur K est bicontinu. Nous verrons, par exemple, que si A est isomorphe à $H(D)$, alors A est de la forme $K\{t\}[x]$, où x est entier sur $K\{t\}$, et que D est égal à une réunion finie d'infraconnexes fermés bornés disjoints dont les trous sont en nombre fini.

Nous caractériserons ensuite les algèbres de Krasner-Tate sous forme de quotient d'une extension topologiquement pure de degré 2 [10]. Par exemple, si D est ouvert, $H(D)$ est isomorphe à une algèbre de la forme $K\{T, X\}/(P(X) - TQ(X))$, où P et $Q \in K[X]$.

Nous caractériserons enfin les algèbres de Krasner-Tate parmi les K-algèbres de Banach en fonction de leurs propriétés algébriques et topologiques.

I. Rappels et résultats élémentaires.

1. Rappels sur la théorie de TATE [10].

Soit un corps K valué non archimédien complet. Soit $A = K\{X_1, \ldots, X_n\}/I$ une algèbre topologiquement de type fini, où $K\{X_1, \ldots, X_n\}$ est une extension topologiquement pure de K, et I un idéal de $K\{X_1, \ldots, X_n\}$. Nous savons, grâce à la proposition (4.4) de [10], qu'une algèbre de Banach A est topologiquement de type fini sur K si, et seulement si, c'est une extension entière finie d'une extension topologiquement pure de K. D'autre part, nous savons, grâce à la proposition (4.5) de [10], que A est noethérienne et que tout idéal maximal est de codimension finie. On peut à ce sujet établir un théorème des zéros de Hilbert pour une extension topologiquement pure, dont on déduit que, si K est algébriquement clos, le spectre maximal de A est en bijection de façon naturelle avec une partie de U^n, U étant l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x| \leqslant 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

2. Rappels sur la théorie de Krasner.

On se donne maintenant un corps valué non archimédien, complet, algébriquement clos et une partie D de K. On sait que l'ensemble $H(D)$ des éléments analytiques sur D [8] est une algèbre de Banach si, et seulement si, D est fermé borné (proposition I-1 de [4]). De plus, $H(D)$ est noethérienne si, et seulement si,

les composantes infraconnexes de D sont en nombre fini, chacune d'elle étant ouverte et sans T-filtre ou réduite à un point (théorème 3 de [3]). (Rappelons que les notions d'infraconnexes, de composantes infraconnexes, de T-filtre sont définies dans [3], [4], [5].) De plus, si ces conditions sont réalisées, D n'admet pas de T-famille et, d'après le théorème 5 de [5], tout idéal maximal de H(D) est de codimension 1 et de la forme I(a) , où a est un point de D , et où I(a) est l'ensemble des éléments nuls en a . Enfin, d'après les théorèmes 1 et 2 de [3], si H(D) est noethérienne, alors H(D) est intègre si, et seulement si, D est infraconnexe.

3. Isomorphisme entre algèbres de Krasner et algèbres de Tate.

Le paragraphe 2, utilisant un corps à la fois valué non archimédien complet et algèbriquement clos, nous considérerons un tel corps K , et nous étudierons les isomorphismes entre une algèbre de Krasner H(D) et une algèbre topologiquement de type fini sur K . Du fait que la norme d'une algèbre de Banach H(D) est sa norme spectrale, on a, grâce au théorème de Banach [2], la proposition suivante :

PROPOSITION. - Soit D un fermé borné, et soit A une K-algèbre de Banach. Tout isomorphisme algébrique entre A et H(D) est bicontinu.

II. Caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Krasner.

DÉFINITION 1. - Nous dirons qu'une algèbre de Banach A est une algèbre de Krasner-Tate si elle est isomorphe à la fois à une algèbre topologiquement de type fini sur K et à une algèbre H(D) telle que D soit un fermé borné infini de K.

Nous noterons $|K|$ l'ensemble des $|\xi|$, $\xi \in K$.

DÉFINITION 2. - Nous dirons qu'un infraconnexe fermé borné est calibré si son diamètre appartient à $|K|$ et si le diamètre de chacun de ses trous appartient à $|K|$. Nous dirons plus généralement qu'un fermé borné est calibré si c'est une réunion finie d'infraconnexes calibrés.

DÉFINITION 3. - Nous dirons qu'une partie infinie D de K est ultraciconférenciée si c'est une réunion finie de fermés bornés calibrés disjoints dont les trous sont en nombre fini.

On peut maintenant conclure.

THÉORÈME 1. - Soit D un fermé borné. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) D est ultraciconférencié ;

(b) il existe une fraction $t = (P/Q) \in K(X)$ sans pôle dans D , telle que $\deg(P) > \deg(Q)$, $t(D) = U$, et telle que l'algèbre $K\{t\}$ des séries formelles

restreintes en t, munie de la norme $\| \|_D$ de $H(D)$, soit isométriquement isomorphe à une extension topologiquement pure de degré 1, et satisfasse

$$H(D) = K\{t\}[x],$$

où x est l'application identique de D ;

(c) $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate.

De plus, dans le cas où $H(D)$ est non dégradée, $H(D)$ est une algèbre de Krasner-Tate si et seulement s'il existe une fraction t satisfaisant l'assertion (b) et vérifiant également $D = t^{-1}(U)$ ($t^{-1}(U)$ étant l'ensemble des $\xi \in K$ tels que $|t(\xi)| \leqslant 1$).

THÉORÈME 2. - Soit D un ouvert ultracirconférencié inclus dans U, et soit t une fraction possédant les propriétés énoncées dans l'assertion (b) du théorème 1. Alors le spectre de $H(D)$, considéré comme algèbre topologiquement de type fini sur K, est l'ensemble des couples $(t(\mu), \mu)$, $\mu \in D$.

III. Caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres topologiquement de type fini.

Nous utiliserons fréquemmment les définitions suivantes :

DÉFINITION 4. - Soit A un anneau, et soient $a, b \in A$. On dit que a et b sont fortement étrangers dans A, si $aA + bA = A$.

DÉFINITION 5. - Soient D et D' deux fermés bornés de K tels que $H(D)$ et $H(D')$ soient deux algèbres de Banach isomorphes. Nous dirons que D et D' sont isomorphes.

THÉOREME 3. - Soit $H(D)$ une algèbre de Krasner-Tate non dégradée, et soit D' isomorphe à D tel que $D' \subset U$. Soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant

(a) P est unitaire ;

(b) $\deg(P) > \deg(Q)$;

(c) $1 = \|P\| \geqslant \|Q\|$ pour la norme canonique de $K\{X\}$;

(d) La fraction $t = (P/Q) \in K(D')$ satisfait $t(D') = U$, $D' = t^{-1}(U)$.

Alors $H(D)$ est isomorphe à l'algèbre topologiquement de type fini

$$K\{T, X\}/(P(X) - TQ(X))K\{T, X\},$$

où $K\{T, X\}$ est une extension topologiquement pure de degré 2.

Réciproquement, soient P et Q deux polynômes fortement étrangers de $K[X]$ satisfaisant (a), (b), (c). Soit $t = (P/Q) \in K(X)$, et soit $D = t^{-1}(U)$. Alors l'algèbre topologiquement de type fini $K\{T, X\}/(P(X) - TQ(X))\, K\{T, X\}$ est isomorphe à $H(D)$.

THÉORÈME 4. - Soit $H(D)$ une algèbre de Krasner-Tate. Soit D' isomorphe à D tel que $D' \subset U$, soient $D_1, \ldots, D_n$ les composantes infraconnexes de D' qui ne sont pas réduites à un point, et soient $a_1, \ldots, a_n$ les points isolés de D'. Pour toute famille de couples (P_i, Q_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de polynômes fortement étrangers de $K[X]$, on notera (a), (b), (c), (d), (e), (f), les propriétés suivantes :

(a) La fraction $t_i = P_i/Q_i$ satisfait $t_i(D_i) = U$, $D_i = t_i^{-1}(U)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(b) P_i est unitaire $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(c) $\deg(P_i) > \deg(Q_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(d) $1 = \|P_i\| \geqslant \|Q_i\|$ pour la norme canonique de $K\{X\}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(e) $P_i - TQ_i$ est irréductible dans $K\{T, X\}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

(f) $P_i - TQ_i$ et $P_j - TQ_j$ sont fortement étrangers dans $K\{T, X\}$, quels que soient $i \neq j$.

Soit une famille de couples de polynômes fortement étrangers de $K[X]$, (P_i, Q_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ satisfaisant (a), (b), (c). Soient $b_1, \ldots, b_m \in U$. Alors la famille (P_i, Q_i) $(1 \leqslant i \leqslant n)$ satisfait (d), (e), (f) ; $H(D_i)$ est isomorphe à $K\{T, X\}/(P_i(X) - TQ_i(X))K\{T, X\}$; $H(D)$ est isomorphe à

$$K\{T, X\}/\Big(\prod_{j=1}^{m}[(X - a_j)K\{T, X\} + (T - b_j)K\{T, X\}]\prod_{i=1}^{n}(P_i(X) - TQ_i(X))K\{T, X\}\Big).$$

Réciproquement, soit A une algèbre topologiquement de type fini de la forme ci-dessus, où $(a_j, b_j) \in U \times U$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, et où (P_i, Q_i) est un couple de polynômes fortement étrangers de $K[X]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ satisfaisant (b), (c), (d), (e), (f). Soit $t_i = P_i/Q_i \in K(X)$; soit $D_i = t_i^{-1}(U)$; soit $D = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup (\bigcup_{i=1}^{n} D_i)$. Alors A est isomorphe à $H(D)$.

IV. Caractérisation des algèbres de Krasner-Tate parmi les algèbres de Banach

THÉORÈME 5. - Soit A une K-algèbre de Banach dont la norme est notée $\|\cdot\|$ et dont la semi-norme spectrale est notée $\|\cdot\|_{sp}$. Alors A est une algèbre de Krasner-Tate si, et seulement si, A possède les propriétés suivantes :

(a) A est noethérienne ;

(b) A est réduite (i. e. 0 est le seul nilpotent de A) ;

(c) $\|f\|_{sp} \in |K|$ quel que soit $f \in A$;

(d) pour tout élément $f \in A$ tel que $\|f\|_{sp} \leqslant 1$, la suite $\|f^n\|$ est bornée ;

(e) A contient une sous-K-algèbre B dense dans A, principale, algébriquement de type fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Fonctions ultramétriques. Frontières analytiques dans certains quasi-connexes fermés d'un corps valué non archimédien complet et algébriquement clos, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 1251-1253.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. I. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[3] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 758-761.

[4] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse 3e cycle, Bordeaux 1972.

[5] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Krasner, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 598-601.

[6] GRAUERT (Hans) und REMMERT (Reinhold). - Über die Methode der diskret bewerten Ringe in den nicht-archimedischen Analysis, Invent. Math., Berlin, t. 2, 1966, p. 87-133.

[7] GRUSSON (Laurent). - Algèbres de Banach ultramétriques, Journées Poitou-Aquitaine [1967, Poitiers].

[8] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143.1964. Clermont-Ferrand] ; p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

[9] SALMON (Pietro). - Serie convergenti su un corpo non archimedeo con applicazione ai fasci analitici, Annali di Mat. pura ed app., Serie 4, t. 65, 1964, p. 113-125.

[10] TATE (John). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.

(Texte reçu le 13 mars 1972)

Alain ESCASSUT
Université de Bordeaux-I
Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE