Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Khyra Lamèche-Gérardin

Séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives, Hadamard-inversibles

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° 16, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A4_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 16, 10 p.

6 mars 1972

SÉRIES RATIONNELLES À PLUSIEURS VARIABLES NON COMMUTATIVES, HADAMARD-INVERSIBLES

par Khyra LAMÈCHE-GÉRARDIN

Sommaire

Pages
1. Définitions et propriétés générales..... 16-01
2. Interprétation en termes de représentation d'un théorème de Benzaghou... 16-03
3. Démonstration dans un cas particulier du théorème de Benzaghou en variables non commutatives..... 16-05

1. Définitions et propriétés générales.

Soient X un ensemble fini appelé alphabet, X^* le monoïde libre qu'il engendre. La multiplication dans X^* est la concaténation, i. e.

$$f * g = fg ,$$

on écrit g à droite de f.

L'élément neutre de X^* est noté e.

Si R est un anneau unitaire, on notera $R\langle\langle X\rangle\rangle$ l'algèbre large des séries formelles sur X, i. e.

$$r \in R\langle\langle X\rangle\rangle \Longleftrightarrow r = \sum_{f\in X^*}(r , f)f , \text{ où } (r , f) \in R , \ \forall\, f \in X^* .$$

Si $(r , e) = 0$, on dira que la série r est quasi-inversible.

Notant r^* le quasi-inverse de r, on sait que r^* vérifie l'équation

$$r + rr^* = r + r^* r = r^*$$

on notera $R^{rat}\langle\langle X\rangle\rangle$ la plus petite sous-algèbre de $R\langle\langle X\rangle\rangle$ qui contienne X et qui est stable par quasi-inversion des éléments quasi-inversibles.

Rappelons un résultat de M. P. SCHÜTZENBERGER [8].

THÉORÈME. - *Une série $r \in R\langle\langle X\rangle\rangle$ est rationnelle si, et seulement si, il existe un entier $N \geq 1$, une représentation μ de X^* dans $M_N(R)$, une matrice P de $M_N(R)$ telle que l'on ait :*

$$r = \sum_{f\in X^*}(r , f)\, f = \sum_{f\in X^*}(\mathrm{Tr}\, P\, \mu f)\, f .$$

Remarque. - Si $|X| = 1$, i. e. X^* isomorphe à $\underset{\sim}{N}$, on retrouve la définition et les propriétés habituelles des séries rationnelles à une variable [6].

Sous-ensembles rationnels dans un monoïde. - Si M est un monoïde, la classe des sous-ensembles rationnels de M est la plus petite classe $\mathcal{E}$ des sous-ensembles de M satisfaisant les conditions suivantes :

(1) L'ensemble vide est dans $\mathcal{E}$,

(2) chaque sous-ensemble réduit à un point est dans $\mathcal{E}$,

(3) si A et $B \in \mathcal{E}$, alors $A \cup B \in \mathcal{E}$,

(4) si A , $B \in \mathcal{E}$, alors $AB \in \mathcal{E}$,

(5) si $A \in \mathcal{E}$, alors $A^* \in \mathcal{E}$.

On note $AB = (m \mid m = ab , a \in A , b \in B)$. A^* est le sous-monoïde de M engendré par A . X^* étant un monoïde libre de type fini, on a la définition suivante.

DÉFINITION. - Un sous-ensemble Y de X^* est reconnaissable, ou est un K-langage, s'il existe une congruence finie θ sur X^* pour laquelle Y est saturé.

Rappelons un résultat important.

THÉORÈME de Kleene [4]. - Dans un monoïde libre de type fini, les ensembles rationnels et reconnaissables coïncident.

Au point de vue théorie des automates, un K-langage, ou une partie régulière, est le langage associé à un état initial a_0 d'un automate $\mathcal{A}$ possédant un nombre fini d'états [5].

Du point de vue linguistique, on a le résultat suivant [3] : P^+ désigne l'ensemble des séries formelles engendrées par les grammaires linéaires d'un côté, et L_0^+ étant le plus petit semi-anneau contenant P^+ et stable par quasi-inversion des éléments quasi-inversibles, on a :

supp L_0^+ est l'ensemble des K-langages sur un vocabulaire fini.

Si $r = \sum (r , f) f$ est une série formelle, on notera

$$\text{supp } r \quad (\text{support } r) = \{f \mid (r , f) \neq 0\} .$$

Si $R = \underset{\sim}{Z}$, on dira qu'une série Z est positive si $(r , f) \geq 0$, $\forall f \in X^*$.

Liens entre les séries rationnelles et les ensembles rationnels, ou K-langage. - Un K-langage est le support d'une série rationnelle positive.

Si $A = \text{supp } a$, $B = \text{supp } b$, où a , b sont des séries rationnelles positives à coefficients entiers.

On vérifie facilement que :

$$A \cup B = \text{supp}(a + b) .$$
$$AB = \text{supp}(a \times b) .$$

Si $(a , e) = 0$, alors

$$A^* = \text{supp } a^* .$$

Notant $a \odot b = c$, le produit de Hademard de deux séries rationnelles a , b , on sait que c est rationnelle [9] et que $A \cap B = \text{supp } C$.

Le problème linguistique posé est le suivant : Etant donnés 2 K-langages A , C , soit B un langage tel que $A \cap B = C$. Dans quelles conditions B est-il un K-langage ?

Ceci rejoint directement un problème de théorie des nombres. Etant données 2 séries rationnelles a et c , dans quelle condition la série b est-elle rationnelle, b étant défini par la condition

$$a \odot b = c ,$$

i.e. $\odot$ est le produit de Hadamard de a et c . Certains résultats de POLYA, portant sur la nature des coefficients de a , ont permis de répondre à cette question.

2. Interprétation en termes de représentations d'un théorème de Benzaghou [1].

Soit $|X| = 1$, et soit $a = \sum_n a_n X^n$, où $a_n \in \underset{\sim}{Q}^*$ (ou $\underset{\sim}{C}^*$) , une série rationnelle sur $\underset{\sim}{Q}$ (ou $\underset{\sim}{C}$). BENZAGHOU a démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME. - $a = \sum_n a_n X^n$ est rationnelle ainsi que son inverse $\sum_n \frac{1}{a_n} X^n$ si, et seulement si, il existe un entier $m \geqslant 1$ et $2m$ rationnels non nuls $c_0 \, c_1 \cdots c_{m-1}$, $d_0 \cdots d_{m-1}$ tels que l'on ait

$$a_{mr+i} = c_i \, d_i^r , \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 , \quad \forall \, r \geqslant 0 ,$$

i. e. la série a s'écrit

$$a = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m-1} \frac{c_i \, X^i}{1 - d_i \, X^m} . \tag{I}$$

Rappelons que si les $(a_n)_{n \geqslant 0}$ sont des entiers algébriques, coefficients d'une série rationnelle a , POLYA [7] a démontré que la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ admettait un nombre fini de diviseurs premiers, si, et seulement si, la série a peut s'écrire sous la forme (I).

Soit $a = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m-1} c_i \, X^i/(1 - d_i \, X^m)$ une série rationnelle à une variable Hadamard-inversible, on sait qu'il existe un entier $N > 1$, deux matrices P , A de $M_N(\underset{\sim}{C})$, telles que l'on ait :

$$a = \sum_n a_n X^n = \sum_n (\mathrm{Tr}\, P \, A^n) \, X^n = \sum c_i \, X^i/(1 - d_i \, X^m) , \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 .$$

THÉORÈME 1. - Les séries rationnelles Hadamard-inversibles dans $\underset{\sim}{Q}^{rat}[[X]]$, et même dans $K^{rat}[[X]]$ où K est un corps quelconque commutatif de caractéristique 0 , sont définies par les couples (P , A) , où

$$A = (\mathrm{diag}\, A_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1} ,$$

chaque A_i étant une matrice diagonale d'ordre n , inversible, dont les éléments diagonaux sont toutes les racines n-ièmes d'un même élément non nul, et

$$P = \frac{1}{m} (\mathrm{diag}\, c_i \, A_i^{-1})_{0 \leqslant i \leqslant m-1} ,$$

où les c_i $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ sont des éléments non nuls de $\underset{\sim}{Q}$ ou K , i. e.

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & & 0 \\ & A_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & A_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A_i = \sqrt[m]{d_i} \begin{pmatrix} 1 = K_0 & & \\ & K_1 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & K_{m-1} \end{pmatrix} = \sqrt[m]{d_i} \times A'$$

$$(t_j)^m = 1 \ , \quad \forall\ 0 \leqslant j \leqslant m-1 \ ,$$

i. e.

$$A = A'' \otimes A' \quad \text{où} \quad A'' = \begin{pmatrix} \sqrt[m]{d_0} & & 0 \\ & \sqrt[m]{d_1} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \sqrt[m]{d_{m-1}} \end{pmatrix} \ , \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} P_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$P_i = (c_i/m) \times A_i^{-i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1 \ .$$

Démonstration du théorème 1. - Soit $a = \sum_{0 \leqslant i \leqslant m-1} (c_i X^i)/(1 - d_i X^m)$ une série rationnelle Hadamard-inversible sur $\underset{\sim}{Q}$ représentée par le couple (P , A) où P et A ont la forme ci-dessus : soit n un entier , $n = mr + j$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$,

$$\text{Tr } PA^n = \text{Tr } P_0 A_0^n + \ldots + \text{Tr } P_i A_i^n + \ldots + \text{Tr } P_{m-1} A_{m-1}^n \ .$$

Pour chaque indice i $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$, on vérifie que, si $i \neq j$, on a :

$$\text{Tr } P_i A_i^n = \text{Tr } P_i A_i^{mr+j} = 0 \ ,$$

et que

$$\text{Tr } P_j A_j^n = \text{Tr } P_j A_j^{mr+j} = c_j d_j^r \ .$$

En effet,

$$\text{Tr } P_i A_i^n = \text{Tr } (c_i/m) \times A_i^{-i} \times A^{mr+j} = (c_i/m) \times \text{Tr } A_i^{mr} A_i^{j-i} \ ,$$

si $j = i$, on a $A_i^{j-i} = I_m$, d'où $\text{Tr } P_j A_j^n = (c_j/m) \times m d_j^r = C_j d_j^r$,

si $j \neq i$, la matrice A_i^{j-i} est une matrice diagonale dont les coefficients sont de la forme : $(\sqrt[m]{d_i})^{j-i} \times K_\ell$, où K_ℓ est une racine m-ième de l'unité, d'où

$$\text{Tr } P_i A_i^n = (c_i/m) \times d_i^r \times \text{Tr } A_i^{j-i} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \ ,$$

et

$$\text{Tr } P A^n = \text{Tr } P A^{mr+j} = \text{Tr } P_j A_j^r = c_j d_j^r \ , \quad \forall\ 0 \leqslant j \leqslant m-1 \ , \quad \forall\ n \ .$$

Etant donnée une série rationnelle a Hadamard-inversible, soit b son inverse, i. e.

$$a = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n = \sum_n \text{Tr } P A^n X^n \ , \quad b = \sum_n 1/a_n X^n = \sum (\text{Tr } Q B^n) X^n \ .$$

On peut assez facilement caractériser Q et B à partir de A .

Si $A = A' \otimes A''$, alors $B = A'^{-1} \otimes A''^{-1}$;

si $B = \begin{pmatrix} B_0 & & 0 \\ & B_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & B_{m-1} \end{pmatrix}$, $B_i = (\sqrt{\frac{1}{d_i}}) \times \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & K_j & \\ & & \ddots \\ 0 & & K_{m-1} \end{pmatrix}$,

$$Q = (\operatorname{diag} Q_i)_{0 \leq i \leq m-1} , \quad Q_i = \frac{1}{c_i} \times \frac{1}{m} \times B_i^{-i} , \quad 0 \leq i \leq m-1 .$$

On a

$$\operatorname{Tr} Q B^n = \operatorname{Tr} Q_0 B_0^n + \ldots + \operatorname{Tr} Q_i B_i^n + \ldots + \operatorname{Tr} Q_{m-1} B_{m-1}^n ,$$

$$\text{si} \quad n = mr + j , \quad 0 \leq j \leq m-1 .$$

On vérifie comme précédemment que

$$\operatorname{Tr} Q B^n = \operatorname{Tr} Q B^{mr+j} = \frac{1}{c_i} \times (\frac{1}{d_i})^r ,$$

or $\operatorname{Tr} P A^n = c_i d_i^r$,

$$\operatorname{Tr}(PA^n \otimes QB^n) = \operatorname{Tr}(P \otimes Q) \times (A \otimes B)^n = 1 , \quad \forall\, n \geq 1 .$$

Remarque. - Si $a = \sum_n a_n X^n = \sum_{0 \leq i \leq m-1} (c_i X^i)/(1 - d_i X^m) = \sum_{n>0} (\operatorname{Tr} PA^n) X^n$, la représentation de la série a , définie par la matrice A , n'est pas nécessairement la représentation minimale de la série a ; en effet, si les $(d_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ ne sont pas tous distincts, cette représentation peut être réduite, i. e. il existe un entier $N \leq m^2$, deux matrices P' et A' de $M_N(\underset{\sim}{C})$, telles que l'on ait

$$\operatorname{Tr} PA^n = \operatorname{Tr} P'(A')^n , \quad \forall\, n \geq 0 ,$$

seulement cette représentation offre le double avantage d'être à la fois inversible et diagonisable.

3. Séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives Hadamard-inversibles.

Soit $X = (x , y , \ldots)$, $|X| \geq 2$, un alphabet fini, et soit

$$a = \sum_f (a , f) f = \sum_f (\operatorname{Tr} P \mu f) f ,$$

une série rationnelle à coefficients dans $\underset{\sim}{C}$, μ étant une représentation du monoïde libre X^* dans $M_N(\underset{\sim}{C})$ pour un certain entier $N \geq 1$, et P une matrice de $M_N(\underset{\sim}{C})$.

On suppose a Hadamard-inversible, i. e. il existe une série rationnelle $b = \sum (\operatorname{Tr} Q \nu f) f$, où ν est une représentation de X^* dans $M_r(\underset{\sim}{C})$, et Q une matrice de $M_r(\underset{\sim}{C})$ telle que l'on ait

$$a \odot b = \sum_{f \in X^*} f .$$

Posons $\mu x = A$. On suppose μx_i inversible , $\forall\, x_i \in X$. A admet la représentation additive unique ([2], p. 108-119) :

$$A = A_S + A_N ,$$

où A_S est diagonalisable, A_N nilpotente, $A_S A_N = A_N A_S$.

Considérant la série rationnelle à une variable $\Sigma_n (\mathrm{Tr}\ PA^n)\ T^n$, on sait qu'elle est Hadamard-inversible si la série a l'est ; on peut supposer que toutes les valeurs propres de A interviennent dans l'expression de $\mathrm{Tr}\ PA^n$. D'après l'interprétation matricielle des résultats de BENZAGHOU, cela équivaut à :

$$N = m^2 \text{ , si } \Sigma_{n\geq 0}(\mathrm{Tr}\ PA^n)\ T^n = \Sigma_{0\leq i\leq m-1} \frac{c_i\ T^i}{1 - d_i\ T^m} ,$$

et

$$\mathrm{Tr}\ PA^n = \mathrm{Tr}\ PA_s^n , \quad \forall\ n \geq 0 .$$

On se place dans la base où A_S est diagonale, et on écrit

$$A_S = \begin{pmatrix} (A_S)_0 & & 0 \\ & (A_S)_1 & \\ 0 & & (A_S)_{m-1} \end{pmatrix} \text{ où } (A_S)_i = (\sqrt[m]{d_i}) \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & K_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & K_{m-1} \end{pmatrix} ,$$

$$K_j^m = 1 , \quad \forall\ 0 \leq j \leq m .$$

Dans cette base, P s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & & 0 \\ & P_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & P_{m-1} \end{pmatrix} + P_0' \text{ , où } P_i = (c_i/m) \times A_i^{-i} , \quad c_i \in Q^* , \quad 0 \leq i \leq m-1 , \text{ et}$$

P_0' est telle que $(P_0')_{j,j} = 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq m^2$.

Soit $f \in X^*$, il est immédiat, en considérant la série rationnelle suivante

$$r_f = \Sigma(\mathrm{Tr}\ P\ \mu f A^n)\ T^n) = \Sigma(\mathrm{Tr}\ P\ \mu f A_s^n)\ T^n ,$$

que cette série est rationnelle est Hadamard-inversible si la série a l'est.

Se plaçant dans la base où A_S est diagonale, on explicite les coefficients de r_f .

(II) $\mathrm{Tr}\ P\mu f\ A_S^n =$

$$= \sum_{1\leq j\leq m} (P\mu f)_{d_j} \times (\sqrt[m]{d_0})^n \times (K_j)^n + \ldots + (\sqrt[m]{d_\ell})^n \sum_{1+m\ell\leq j\leq m(\ell+1)} (P\mu f)_{d_0} \times (K_j)^n$$

$$+ (\sqrt[m]{d_{m-1}})^n \sum_{1+m(m-1)\leq j\leq m^2} (P\mu f)_{d_j} \times (K_j)^n .$$

Posant $n = mr + i$, $0 \leq i \leq m-1$, (II) s'écrit :

$$\mathrm{Tr}\ P\mu f\ A_S^n = \mathrm{Tr}\ P\mu f\ A_S^{mr+i} = (d_0)^r \sum_{1\leq j\leq m} (P\mu f)_{d_j} \times (k_\gamma)^i \times (d_0)^{i/m} + \ldots$$
$$+ (d_\ell)^r \sum_{1+m\ell\leq j\leq m(\ell+1)} (P\mu f)_{d_j} \times (k_\gamma)^i \times (d_\ell)^{i/m} + \ldots$$
$$+ d_{m-1}^r \sum_{1+m(m-1)\leq j\leq m^2} (P\mu f)_j \times (k_\gamma)^i \times (d_{m-1})^{i/m} .$$

D'après la forme générale des coefficients d'une série rationnelle à une variable Hadamard-inversible, on sait qu'il existe un entier $u_f \geq 1$ et $2u_f$ rationnels non nuls : $v_0 \ldots v_{u_f-1}\ w_0 \ldots w_{u_f-1}$, telle que l'on ait :

$$\mathrm{Tr}\ P\mu f\ A_S^n = U_K\ W_K^+ , \quad \text{où} \quad n = u_f\, t + K , \quad 0 \leq K \leq u_f - 1 ,$$

i. e. il existe ℓ tel que :

(III)
$$\begin{cases} (1) \quad d_\ell^r \sum_{1+m\ell\leq j\leq m(\ell+1)} (P\mu f)_{d_j} \times (d_\ell)^{i/m} \times k_j^i = V_K\ W_K \neq 0 , \\ \qquad\qquad d_\ell = W_K . \\ (2) \quad \sum (P\mu f)_{d_j} \times d_q^{i/m} \times k_j^i = 0 , \quad \forall\ q \neq \ell \quad \text{et} \quad 0 \leq q \leq m-1 . \end{cases}$$

On suppose que, pour tout $f \in X^*$, on a $u_f = m$.

Sous cette hypothèse, on a le lemme suivant :

LEMME. - Pour tout $f \in X^*$, il existe une permutation, notée σ_f , des entiers $(0 , 1 , \ldots , m-1)$, telles que l'on ait :

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & (P\mu f)_i & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} + N_f \quad \text{où} \quad (P\mu f)_i \in M_n(C) , \quad \forall\ 0 \leq i \leq m-1 ,$$

$$(P\mu f)_i = (c_i'/m) \times A_i^{-\sigma f(i)} \quad \text{si} \quad A = [\mathrm{diag}(A_i)] , \quad 0 \leq i \leq m-1 .$$

$c_i' \in \underset{\sim}{Q}^*$, et N_f est telle que $(N_f)_{jj} = 0$, $\forall\ 1 \leq j \leq m^2$.

Démonstration du lemme. - Le système (III) fournit les équations suivantes (on raisonne pour $\ell = 0$) :

$$(P\mu f)_{11} + \ldots + (P\mu f)_{ii} + \ldots + (P\mu f)_{mm} = 0 ,$$
$$(P\mu f)_{11} + (P\mu f)_{22} \times (K_1)^p + \ldots + (P\mu f)_{mm} \times (K_{m-1})^p = \alpha \neq 0 ,$$
$$(P\mu f)_{11} + (P\mu f)_{22}\ (K_1)^{p+1} + \ldots + (P\mu f)_{mm} \times (K_{m-1})^{p+1} = 0 ,$$
$$(P\mu f)_{11} + (P\mu f)_{22} \times (K_1)^{n-1} + \ldots + (P\mu f)_{mm} \times (K_{m-1})^{m-1} = 0 .$$

Le déterminant des coefficients est un déterminant de VAN DER MONDE d'ordre m . On a donc un système de Cramer, or on a la solution évidente suivante :

$$(K_L)^{-p}\ (K_1)^{-p} \ldots (K_{m-1})^{-p} ,$$

d'où
$$(P\mu f)_{d_j} = \lambda (K_j)^{-p} , \qquad \lambda \in \underset{\sim}{Q}^* ,$$

en désignant par r_f la permutation de $[0 , \ldots , m-1]$ qui est définie par

$$\sigma_f(p) = \ell \ , \ \text{si} \quad n = mr + p \ , \quad 0 \leq p \leq m - 1 \ ,$$

et

$$\operatorname{Tr} P\mu f \, A^{mr+p} = c'_\ell \, d_\ell \ ,$$

on a donc :

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & (P\mu f)_i & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} + N_f \ , \ \text{où} \quad (P\mu f)_i = \frac{c'_i}{m} \times A_i^{-\sigma_f(i)} \ ,$$

$c'_i \in \underset{\sim}{Q}^* \ , \ \forall \ 0 \leq i \leq m - 1$, et $(N_f)_{d_j} = 0 \ , \ \forall \ 1 \leq j \leq m^2$.

le lemme est démontré.

Application. - Cas où $\mu x_i \, \mu x_j = \mu x_j \, \mu x_i \ , \ \forall \ x_i \in X$, i. e. μ est une représentation commutative. Dans ce cas, si $\mu f = (\mu f)_S + (\mu f)_N$, où $(\mu f)_S$ est une matrice diagonalisable, et $(\mu f)_N$ nilpotente, $(\mu f)_S$ et $(\mu f)_N$ sont des matrices qui commutent. L'application $f \longmapsto (\mu f)_S$ de X^* dans $M_{m^2}(\underset{\sim}{C})$ est une représentation. Or

$$\operatorname{Tr} P\mu f = \operatorname{Tr} P(\mu f)_S \ , \quad \forall \ f \in X^* \ ,$$

on peut se ramener à une représentation dont toutes les matrices sont diagonales dans une même base. On suppose que P est diagonale dans cette base, d'où :

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} \times N_f \ .$$

Il est immédiat que N_f est une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont nuls, i. e. $N_f = 0$, d'où

$$P\mu f = \begin{pmatrix} (P\mu f)_0 & & 0 \\ & (P\mu f)_i & \\ 0 & & (P\mu f)_{m-1} \end{pmatrix} \ , \quad (P\mu f)_i = \frac{c'_i}{m} \times A_i^{-\sigma_f(i)} \ ,$$

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & & 0 \\ & P_1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & P_{m-1} \end{pmatrix} \ , \quad P_i = \frac{c'_i}{m} \times A_i^{-i} \ \text{ si } \ A = (\operatorname{diag} A_i) \ , \ 0 \leq i \leq m - 1 \ ,$$

$$\mu f = \begin{pmatrix} \frac{c'_0}{c_0} \times A_0^{-\sigma_f(0)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{c'_i}{c_i} \times A_i^{i-\sigma_f(i)} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \frac{c'_{m-1}}{c_{m-1}} \times A_{m-1}^{m-1-\sigma_f(m-1)} \end{pmatrix}$$

De l'expression $\mu f\, \mu g = \mu fg$, on tire : $\mu fg = \mu f\, \mu g = (\mathrm{diag}\, \frac{c_i'''}{c_i} \times A_i^{i-\sigma fg(i)})$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

(IV) $$\sigma_{fg}(i) = -i + \sigma_f(i) + \sigma_g(i) \ .$$

(V) $$\frac{c_i'''}{c_i} = \frac{c_i'}{c_i} \times \frac{c_i''}{c_i} \ , \text{ si } \mu g = (\frac{c_i''}{c_i} \times A_i^{i-\sigma_g(i)}) \ , \ 0 \leqslant i \leqslant m-1 \ .$$

Pour tout $f \in X^*$, on pose

$$\nu f = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{c_0'} \times A_0'^{-\sigma_f(0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \frac{c_i}{c_i'} \times A_i'^{i-\sigma_f(i)} \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \frac{c_{m-1}}{c_{m-1}'} \times A_{m-1}'^{m-1-\sigma_f(m-1)} \end{pmatrix} \ , \text{ où } A_i' = \sqrt[m]{\frac{1}{d_i}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & K_j & \\ & & \ddots \\ 0 & & & K_{m-1} \end{pmatrix}$$

et $K_j^m = 1$, $\forall\ 0 \leqslant j \leqslant m-1$.

On vérifie que $\nu f\, \nu g = \nu fg$. En effet, si $a = bc$, a , b , $c \in \underset{\sim}{C}^*$, on a $a^{-1} = b^{-1}\, c^{-1}$, d'où

$$\nu fg = (\frac{c_i}{c_i'''} \times A_i'^{i-\sigma_{fg}(i)}) \ , \ 0 \leqslant i \leqslant m-1 \ ,$$

or, $\forall\ 0 \leqslant i \leqslant m-1$, on a :

$$\frac{c_i}{c_i'''} \times A_i'^{i-\sigma_f(i)} = \frac{c_i}{c_i'} \times \frac{c_i}{c_i''} \times A_i'^{i-\sigma_f(i)} \times A_i'^{i-\sigma_g(i)} \ ,$$

d'où $\nu fg = \nu f\, \nu g$, i. e. ν est une représentation de X^* dans $M_m(\underset{\sim}{C})$. Soit

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_0 \times m} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{c_i \times m} \times A_i'^{-i} \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \frac{1}{c_{m-1} \times m} \times A_{m-1}'^{-m+1} \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{Tr}\, Q\nu f = 1/c_\ell' \ ,$$

où $\sigma_f(\ell) = 0$, or $\mathrm{Tr}\, P\mu f = c_\ell'$, où $\sigma_f(\ell) = 0$,

$$\mathrm{Tr}\, P\mu f\ \mathrm{Tr}\, Q\nu f = \mathrm{Tr}\, P\mu f \otimes Q\nu f = \mathrm{Tr}(P \otimes Q)(\mu f \otimes \nu f) = 1 \ , \ \forall\ f \in X^* \ .$$

Dans le cas où la représentation μ est commutative, on a trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que la série rationnelle de terme général $\mathrm{Tr}\, P\mu f$ soit Hadamard-inversible :

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENZAGHOU (B.). - Algèbres de Hadamard, Thèse Sc.Math. Paris, 1969.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chap.8 : Modules et anneaux semi-simples. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).

[3] CHOMSKY (N.) and SCHÜTZENBERGER (M. P.). - The algebraic theory of context-free languages, Computer programming and formal systems, p. 118-161. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1963 (Studies in Logic).

[4] EILENGERG (S.). - Homotopie et espaces fibrés. Cours professé à l'Institut Henri Poincaré, 1966/67. - Paris, Secrétariat mathématique de l'Ecole Normale Supérieure, 1968.

[5] JAULIN (B.) - Théorie des automates (multigraphié).

[6] LAMÈCHE (Khyra). - Extension d'un théorème de Polya-Cantor à des séries rationnelles en variables non commutatives, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 9, 12 p.

[7] POLYA (G.). - Arithmetische Eigenschaften der Reihentwicklungen rationaler Funktionen, J. für die reine und angew. Math., t. 151, 1921, p. 1-31.

[8] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Definition of a family of automata, Information and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.

[9] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a theorem of R. Jungen, Proc. of the Amer. math. Soc., t. 13, 1962, p. 885-890.

(Texte reçu le 20 mars 1972)

Khyra LAMÈCHE-GÉRARDIN
7 rue Barrault
75013 PARIS