Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Martine Pathiaux

Détermination effective des polynômes de A. Connes relativement à un nombre de Pisot

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° G5, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A15_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° G5, 3 p.

17 janvier 1972

DÉTERMINATION EFFECTIVE DES POLYNÔMES DE A. CONNES RELATIVEMENT À UN NOMBRE DE PISOT

par Martine PATHIAUX

On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soient Ω un corps algébriquement clos, muni d'une valeur absolue et, K un sous-corps de Ω ; soit $B(x) \in K[x]$ un polynôme de degré s, séparable, ayant dans Ω, une racine de module > 1 et les autres de module < 1, il existe alors $D(x) \in K[x]$ tels que :

$$D(x) = B(x)\, C(x) , \quad C(x) \in K[x] ,$$

où $D(x) = d_s x^n + d_{s-1} x^{n-1} + d_{s-2} x^{s-2} + \ldots + d_0$ avec $|d_{s-1}| > \sum_{i=0, i\neq s-1}^{s} |d_i|$.

La démonstration du théorème permet en outre de calculer explicitement les polynômes $D(x)$. Alain CONNES [1] a démontré ce résultat dans le cas restrictif où $\Omega = \underset{\sim}{C}$, $K = \underset{\sim}{Q}$, $B(x)$ irréductible. D'autre part, la démonstration de Alain CONNES n'est pas effective.

Démonstration du théorème. - Posons $B(x) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_s z^s$, et effectuons la division de z^n par $B(x)$ dans $K[x]$. Soit

$$(1)\quad z^n = (b_s z^s + b_{s-1} z^{s-1} + \ldots + b_0)(C_{n,n-s} z^{n-s} + \ldots + C_{n,0}) + a_{s-1,n} z^{s-1} + \ldots + a_{0,n} .$$

D'après une remarque de J.-L. NICOLAS, on constate que lorsque n varie, avec k fixe, $a_{k,n}$ vérifie la relation de récurrence :

$$(2)\quad b_s a_{k,n} + b_{s-1} a_{k,n-1} + \ldots + b_0 a_{k,n-s} = 0 \quad (\forall n \geqslant s , \ 0 \leqslant k \leqslant s - 1) .$$

avec les conditions $a_{k,j} = \delta_{k,j}$ si $j \leqslant s - 1$.

Pour le montrer, il suffit d'écrire la relation (1) pour les indices n , $n - 1$, ... , $n - s$ multipliés respectivement par b_s , b_{s-1} , ... , b_0 , de les ajouter, t d'écrire que le reste de la division de $b_s z^n + b_{s-1} z^{n-1} + \ldots + b_0 z^{n-s}$ par $B(x)$ est identiquement nul.

Les relations (2) donnent donc :

$$(3)\qquad a_{k,n} = \lambda_k^{(1)} \theta_1^n + \lambda_k^{(2)} \theta_2^n + \ldots + \lambda_k^{(s)} \theta_s^n , \quad 0 \leqslant k \leqslant s - 1 ,$$

où θ_1 , ... , θ_s sont les racines de $B(x)$, et où les λ_k^j sont déterminées par le système :

(4) $$\lambda_k^{(1)}\,\theta_1^j + \dots + \lambda_k^{(s)}\,\theta_s^j = \delta_{k,j} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant j \leqslant s-1 \\ 0 \leqslant k \leqslant s-1 \end{cases}$$

dont le déterminant D a la valeur $\prod_{i\neq j,\,1\leqslant i\leqslant s} (\theta_i - \theta_j)_{1\leqslant j\leqslant s} \neq 0$, et les $a_{k,n}$ sont donc entièrement déterminés par (3) et (4).

Déterminons maintenant d_s , d_{s-1} , ... , $d_0 \in K$ tels que le reste de la division de $d_s z^n + d_{s-1} z^{n-1} + d_{s-2} z^{s-2} + \dots + d_0$ par $B(x)$ soit nul. Il suffit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} d_s\, a_{s-1,n} + d_{s-1}\, a_{s-1,n-1} = 0 \\ d_s\, a_{s-2,n} + d_{s-1}\, a_{s-2,n-1} + d_{s-2} = 0 \\ \dots \\ d_s\, a_{k,n} + d_{s-1}\, a_{k,n-1} + d_k = 0 \\ \dots \\ d_s\, a_{0,n} + d_{s-1}\, a_{0,n-1} + d_0 = 0 \end{cases}$$

qui a la solution :

(5) $d_s = a_{s-1,n-1}$, $d_{s-1} = -a_{s-1,n}$, ... , $d_k = -a_{k,n}\,a_{s-1,n-1} + a_{s-1,n}\,a_{k,n-1}$, $0 \leqslant k \leqslant s-2$.

Évaluons ces coefficients si on suppose $|\theta_1| > 1 > |\theta_2| \geqslant |\theta_3| \dots \geqslant |\theta_s|$, on obtient :

$$\begin{cases} d_s = \lambda_{s-1}^{(1)}\,\theta_1^{n-1} + 0(\theta_2^n) \\ d_{s-1} = -\lambda_{s-1}^{1}\,\theta_1^n + 0(\theta_2^n) \\ d_k = \theta_1^n\, 0(\theta_2^n) \end{cases}$$

où les 0 ne dépendent que des λ_k^j et des θ_i , et donc uniquement des θ_i . Il existe donc une constante C ne dépendant que des θ_i telle que si

(6) $$|\lambda_{s-1}^{(1)}|\left(1 - \frac{1}{|\theta_1|}\right) > C|\theta_2|^n ,$$

alors

$$|d_{s-1}| > \sum_{i=0,\,i\neq s-1}^{s} |d_i| .$$

Or $\lambda_{s-1}^1 = (-1)^s/(\prod_{2\leqslant j\leqslant s} (\theta_1 - \theta_j)^2)$ est donc $\neq 0$, et la relation (6) est vérifiée pour $n \geqslant n_0(\theta_i)$.

Donc, pour trouver un polynôme $D(x)$ répondant au problème, il suffit de calculer par récurrence, à l'aide de (2), les coefficients $a_{k,n}$ jusqu'à un rang suffisament grand et d'utiliser les formules (5).

On peut calculer n_0 en fonction des θ_i à l'aide des formules (4) et (5), et on trouvera des solutions si $n - 1 > - C/\log|\theta_2|$ où C est une constante ne dépendant que de s , $|\theta_1|$, $\prod_{1\leqslant i\leqslant s, 1\leqslant j\leqslant s} (\theta_i - \theta_j)$.

A titre d'exemple, le polynôme $z^2 - 2z - 1$ admet pour multiple $2z^3 - 5z^2 + 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONNES (Alain). - Ordres faibles et localisation de zéro de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

(Texte reçu le 15 novembre 1972)

Martine PATHIAUX
Avenue de Paris
78470 SAINT RÉMY LES CHEVREUSES