Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Marie Hasquenoph

Localisation des zéros de polynômes réciproques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° G1, p. G1-G4

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A11_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° G1, 4 p.

8 novembre 1971

LOCALISATION DES ZÉROS DE POLYNÔMES RÉCIPROQUES

par Jean-Marie HASQUENOPH

Le théorème de Rouché permet de déterminer la position, par rapport au cercle unité, des zéros de certains polynômes. En particulier, si $P(X) \in \underset{\sim}{Q}[X]$ est un polynôme réciproque de degré $2n$ (c'est-à-dire tel que $P(X) = X^{2n} P(1/X)$), un théorème de Cohn ([2], [3]) montre que $P(X)$ admet à l'intérieur du cercle unité autant de zéros que le polynôme

$$P_1(X) = X^{2n-1} P'(1/X) .$$

On en déduit facilement, en écrivant P sous la forme

$$P(X) = a_0 X^{2n} + a_1 X^{2n-1} + a_{n-1} X^{n+1} + 2a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 ,$$

les résultats suivants :

1° Si

$$|a_{n-1}| > n \sum_i |a_i| , \quad 0 \leqslant i \leqslant n , \quad i \neq n-1 , \tag{1}$$

$P(X)$ admet exactement deux racines conjuguées sur le cercle unité, $n-1$ à l'intérieur et autant à l'extérieur.

2° Si

$$|a_n| > \sum_i |a_i| , \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 , \tag{2}$$

$P(X)$ n'admet aucune racine sur le cercle unité.

La méthode de A. COHEN [1] permet d'obtenir des résultats en sens inverse. De façon précise, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1. - Soit $P(X) \in \underset{\sim}{Q}[X]$ un polynôme réciproque irréductible de degré $2p \geqslant 4$, n'admettant que deux zéros conjugués sur le cercle unité. Alors P admet un multiple de la forme :

$$Q(X) = b_0 X^{2n} + b_1 X^{2n-1} + \ldots + 2b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots + b_0$$

à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, dont p au plus sont non nuls et tels que :

$$|b_{n-1}| > \sum_i |b_i| , \quad 0 \leqslant i \leqslant n , \quad i \neq n-1 . \tag{3}$$

En posant $Q_1(X) = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n$, on a donc

$$Q(X) = Q_1(X) + X^{2n} Q_1(1/X) ,$$

et le théorème de Rouché montre que Q_1 admet $n-1$ racines à l'intérieur du cercle unité, et une racine réelle à l'extérieur.

THÉORÈME 2. - Soit $P(X) \in \underset{\sim}{Q}[X]$ un polynôme réciproque irréductible de degré $2p \geqslant 4$ n'admettant aucune racine sur le cercle unité. Alors P admet un multiple $Q(X) = b_0 X^{2n} + \ldots + 2b_n X^n + \ldots + b_0$ à coefficients dans $\underset{\sim}{Z}$, dont p au plus sont non nuls, et tels que :

$$|b_n| > \sum_i |b_i| \ , \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \ . \tag{4}$$

Il en résulte qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre algébrique τ de degré pair, dont le polynôme irréductible est réciproque, ne soit pas situé, ainsi que tous ses conjugués, sur le cercle unité, est qu'il soit racine d'un polynôme Q dont les coefficients vérifient l'inégalité (4).

Par contre, le théorème 1 ne donne pas de condition nécessaire et suffisante, à cause de la constante n dans (1).

Démonstration du théorème 1. - Désignons par

$\tau = \tau^{(1)}$ et $\bar{\tau} = 1/\tau$ les racines de module 1 de P,

$\tau^{(j)}$ et $1/\tau^{(j)}$, $j = 2, \ldots, s$, les racines réelles,

$\left\{\tau^{(j)} \text{ et } 1/\tau^{(j)}, \ \bar{\tau}^{(j)} \text{ et } 1/\bar{\tau}^{(j)}\right\}$, $j = s+1, \ldots, s+t$, les racines complexes,

et posons $T = \tau + 1/\tau$; $K = \underset{\sim}{Q}(T)$ est de degré $p = s + 2t$.

Soit

$$\sigma : \ K \longrightarrow A = \underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{C}^t \ ,$$

défini par

$$x \longmapsto (\sigma_1(x) \ , \ \ldots \ , \ (\sigma_s(x) \ , \ \sigma_{s+1}(x) \ , \ \ldots \ , \ \sigma_{s+t}(x))$$

le plongement canonique de K, $\sigma_j(T) = T^{(j)} = \tau^{(j)} + 1/\tau^{(j)}$.

Pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, posons $T_i = (\tau^i + (1/\tau^i))$. Il est facile de voir que $T_0 = 2$, T_1, $\ldots$, T_{p-1} forment une base de K sur $\underset{\sim}{Q}$, et que

$$T_i \, T_j = T_{i+j} + T_{i-j} \ , \text{ pour tout } i \text{ et } j \in \underset{\sim}{N} \ . \tag{5}$$

Enfin $|T_i| < 2$ pour tout i et $\lim_{i \to \infty} |T_i^{(j)}| = +\infty$ pour $j = 2, \ldots, s+t$.

Soit B l'ensemble des $x \in K$ qui s'écrivent sous la forme

$$x = \sum_i a_i \, T_i \ , \quad 0 \leqslant i \leqslant n \ , \text{ avec } a_i \in \underset{\sim}{Q} \ , \text{ et } \sum |a_i| \leqslant 1 \ , \quad n \in \underset{\sim}{N} \ .$$

B est une partie convexe, équilibrée et absorbante de K (considéré comme espace vectoriel sur $\underset{\sim}{Q}$), et la relation

$$\|x\| = \inf\{\lambda \in \underset{\sim}{Q}^+ \mid \ x \in \lambda B\}$$

définit une semi-norme sur K ([4], [5] chap. IV), et (5) montre que

$$\|xx'\| \leqslant 2 \, \|x\| \, \|x'\| \ , \tag{6}$$

A étant le complété de K pour la topologie produit de K sur $\underset{\sim}{Q}$, on peut prolonger cette semi-norme en une semi-norme d'algèbre sur A. L'ensemble des éléments de A de semi-norme nulle est donc un idéal

$$A_J = \{y = (y_1 , \dots , y_{s+t}) \mid y_j = 0 \text{ pour tout } j \in J\}$$

de A, où J désigne une partie finie de $\{1 , 2 , \dots , s + t\}$. Pour déterminer J, on utilisera le résultat suivant :

LEMME. - Soient U la boule unité d'une semi-norme sur $A = \underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{C}^t$, et $f : A \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$ une application $\underset{\sim}{R}$-linéaire.

Alors f s'annule sur les éléments de semi-norme nulle si, et seulement si, $f(U)$ est bornée.

En remarquant que $U \cap \sigma(K)$ est l'adhérence de $\sigma(B)$ dans $\sigma(K)$, et en appliquant le lemme aux projections $A \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, on obtient

$$j \in J \Longleftrightarrow \text{l'ensemble des } \Sigma a_i T_i^{(j)} \text{ avec } \Sigma|a_i| \leqslant 1$$

est borné, d'où $J = \{1\}$.

Il en résulte que la semi-norme d'un élément de A ne dépend que de sa première composante, donc, pour tout $x \in K$,

$$\|x\| = C\,|\sigma_1(x)| \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

L'inégalité (6) montre que $C = \|1\| \geqslant 1/2$, et comme $1 = (1/2)\,T_0 \in (1/2)\,B$, on a $\|1\| \leqslant 1/2$, d'où $C = 1/2$.

En particulier, $\|T\| = 1/2|T| < 1$, donc il existe $\lambda \in Q^+$, $\lambda < 1$, tel que $T = \lambda \sum_i a_i T_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, où les a_i sont dans $\underset{\sim}{Q}$ et vérifient $\Sigma|a_i| \leqslant 1$.

Après réduction au même dénominateur, et multiplication par τ^n, on obtient une équation algébrique dont τ est racine, et dont les coefficients satisfont l'inégalité cherchée.

La démonstration du théorème 2 se fait de la même façon, mais aucun des ensembles des $\Sigma a_i T_i^{(j)}$ n'étant borné, on a $\|y\| = 0$ pour tout $y \in A$. En particulier, $\|1\| = 0 < 1/2$ dans K, donc on a une relation du type

$$1 = \lambda \sum_i a_i T_i , \quad 0 \leqslant i \leqslant n , \text{ avec } a_i \in \underset{\sim}{Q} , \text{ et } \Sigma|a_i| \leqslant 1 , \quad \lambda \in \underset{\sim}{Q}^+ \text{ et } \lambda < 1/2 ,$$

ce qui donne l'équation cherchée.

BIBLIOGRAPHIE

1° Polynômes.

[1] CONRS (A.). - Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

[2] DIEUDONNÉ (J.). - Théorie analytique des polynômes d'une variable (à coefficients quelconques). - Paris, Gauthier - Villars, 1938 (Mémorial des Sciences mathématiques, 93).

[3] MARDEN (M.). - The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, - New York, American mathematical Society, 1949 (Mathematical Surveys, 3).

2° Espaces vectoriels topologiques.

[4] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1- . - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[5] GARSOUX (J.) - Espaces vectoriels topologiques et distributions. - Paris, Dunod, 1963 (Collection universitaire de Mathématiques, 13).

(Texte reçu le 13 décembre 1971)

Jean-Marie HALSQUENOPH
7 rue des Sources
77400 LAGNY