

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

EMMANUEL GILQUIN

**Comportement des fonctions arithmétiques complexes,
multiplicatives, à valeurs dans le disque $|z| \leq 1$**

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 10, n° 1 (1968-1969),
exp. n° 13, p. 1-8

[<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A12_0>](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1968-1969__10_1_A12_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1968-1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT DES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES COMPLEXES, MULTIPLICATIVES,
À VALEURS DANS LE DISQUE $|z| \leq 1$

par Emmanuel GILQUIN

A toute fonction arithmétique f , on fait correspondre la fonction

$$M(x) = \sum_{n \leq x} f(n), \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^+.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$, si $\frac{1}{x} M(x)$ tend vers une limite finie, cette dernière sera, par définition, la valeur moyenne de la fonction f .

Dans ce qui suit, nous nous limiterons aux fonctions arithmétiques, multiplicatives, et telles que $|f(n)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (ces fonctions forment la classe $\mathcal{M}_0$), en vue, en particulier, d'une application à la recherche des lois de distribution des fonctions arithmétiques additives à valeurs entières (cf. exposé n° 5 de ce Séminaire, par H. DELANGE).

La conjecture d'Erdős : "Une fonction de $\mathcal{M}_0$, ne prenant que les valeurs $+1$ ou -1 , admet une valeur moyenne", a été démontrée par WIRSING, qui a émis une conjecture plus générale :

"Pour toute fonction de $\mathcal{M}_0$, il existe un nombre complexe C_0 , un nombre réel a_0 , et une fonction $L_0(u)$, de module 1, à oscillation lente, tels que

$$M(x) = C_0 L_0(\log x) x^{1+ia_0} + o(x) \quad ([4])$$

La démonstration complète en a été donnée par G. HALASZ ([3]). On peut l'alléger notablement en utilisant des théorèmes précédemment démontrés par H. DELANGE ([1] et [2]).

Schéma de la démonstration. - On part de la fonction

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \quad (s = \sigma + it, \sigma > 1)$$

Pour utiliser au maximum la multiplicativité, on associe à f la fonction f^* strictement multiplicative (c'est-à-dire telle que $f^*(m) \cdot f^*(n) = f^*(mn)$, pour tout m et tout n de $\mathbb{N}^*$), définie par

$$f^*(p) = f(p) \quad \text{pour tout } p \text{ premier.}$$

Pour $\sigma > 1$,

$$F^*(s) = \sum_1^{\infty} \frac{f^*(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f^*(p)}{p^s} + \frac{f^{*2}(p)}{p^{2s}} + \dots \right) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n) f^*(n)}{n^s} \right),$$

où

$$\lambda(n) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{si } n = p^k, \\ 0, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Nous voulons comparer $|F^*(s)|$ et $\frac{1}{\sigma-1}$. Or $\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma-1} + o\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)$. Donc on peut, en fait, comparer $|F^*(s)|$ et $\zeta(\sigma)$.

$$\begin{aligned} \frac{|F^*(s)|}{\zeta(\sigma)} &= \exp \left(\sum_1^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} \operatorname{Re}[f^*(n) n^{-it}] \right) / \exp \left(\sum_1^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} \right) \\ &= \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}[f^*(n) n^{-it}]) \right). \end{aligned}$$

La série en exposant est une série à termes positifs. Sa somme, qui est positive, est, pour t fixé, une fonction décroissante de σ .

Etudions le comportement de cette dernière quand $\sigma \rightarrow 1+0$, à t constant.

Deux cas se présentent :

(A) Il existe au moins un a_0 réel, tel que

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1} \sum_1^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_0})) = A, \quad \text{constante finie.}$$

(B) Pour tout t fixé, cette somme tend vers $+\infty$ quand $\sigma \rightarrow 1+0$. Or cette somme est une fonction décroissante de σ . En appliquant le théorème de Dini, on déduit que cette somme tend vers $+\infty$ quand $\sigma \rightarrow 1+0$, uniformément par rapport à t sur toute bande $|t| \leq K$.

Donc, dans ce cas, $F^*(s) = o\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)$ ($\sigma \rightarrow 1+0$) uniformément par rapport à t sur toute bande $|t| \leq K$.

Il est nécessaire et suffisant, pour qu'on soit dans ce cas, qu'on ait, pour tout t réel, $\sum_1^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n} (1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-it})) = +\infty$, ce qui équivaut à

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f^*(p) p^{-it})}{p} = +\infty.$$

1. Etude du cas (A).

1° Montrons que a_0 est unique. - Raisonnons par l'absurde. Supposons que, pour $a_1 \neq a_0$, $\lim_{\sigma \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_1})) < +\infty$. $|f^*(n) n^{-ia_1}| \leq 1$, donc

$$2(1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_1})) \geq |1 - f^*(n) n^{-ia_1}|^2.$$

D'autre part,

$$2|1 - f^*(n) n^{-ia_0}|^2 + 2|f^*(n) n^{-ia_0} - n^{i(a_1-a_0)}|^2 \geq |1 - n^{i(a_1-a_0)}|^2.$$

On remarque que

$$|f^*(n) n^{-ia_0} - n^{i(a_1-a_0)}| = |1 - f^*(n) n^{-ia_1}|,$$

et que $|n^{i(a_1-a_0)}| = 1$. Donc

$$2(1 - \operatorname{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) = |1 - n^{i(a_1-a_0)}|^2.$$

Comme $|f^*(n) n^{-ia_0}| \leq 1$, on a

$$2(1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_0})) \geq |1 - f^*(n) n^{-ia_0}|^2.$$

D'où finalement l'inégalité

$$(1 - \operatorname{Re}[f^*(n) n^{-ia_1}]) \geq \frac{1}{2} (1 - \operatorname{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) - [1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_0})].$$

Donc, pour tout $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}[f^*(n) n^{-ia_1}]) \\ \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} [1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_0})]. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}(n^{i(a_1-a_0)})) = \log \frac{\zeta(\sigma)}{|\zeta(\sigma - i(a_1 - a_0))|}.$$

Quand $\sigma \rightarrow 1$, $|\zeta(\sigma - i(a_1 - a_0))|$ tend vers une limite finie, puisque $a_0 \neq a_1$, tandis que $\zeta(\sigma) \rightarrow +\infty$; comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} [1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_0})]$ tend vers une

limite finie, la série au premier membre de l'inégalité ci-dessus ne peut tendre vers une limite finie.

L'hypothèse $a_1 \neq a_0$ est donc absurde.

2° Si $\lim_{\sigma \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^{\sigma}} (1 - \operatorname{Re}[f^*(n) n^{-ia_0}])$ est finie, alors

$$\sum_1^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n} (1 - \operatorname{Re}(f^*(n) n^{-ia_0})) \text{ converge ,}$$

ce qui équivaut d'ailleurs à

$$\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f^*(p) p^{-ia_0})}{p} \text{ converge (p premier) .}$$

Or $f^*(p) = f(p)$. On déduit immédiatement

$$\sum_{\operatorname{Re}(f(p) p^{-ia_0}) < 1-\varepsilon} \frac{1}{p} < +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Et donc, d'après les théorèmes 2, puis 1, de DELANGE ([1]),

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) n^{-ia_0} &= \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p^j)^{-ia_0} f(p^j)}{p^j}\right) + o(1) \\ &= C \exp\left\{- \sum_{p \leq x} \frac{1 - f(p) p^{-ia_0}}{p}\right\} + o(1) , \end{aligned}$$

C étant une constante.

(a) $(C = 0) \iff (2^{-ria_0} f(2^r) = -1, \quad \forall r \geq 1)$. Donc, dans le cas (A), " $n^{-ia_0} f(n)$ admet une valeur moyenne nulle" équivaut à cette propriété (puisque le module de l'exponentielle admet une limite qui est $\exp\{- \sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p) p^{-ia_0})}{p}\}$). On verra plus loin que $f(n)$ a le même comportement que $f(n) n^{-ia_0}$.

(b) Si $C \neq 0$, il y a deux cas possibles :

(α) $\sum_p \frac{\operatorname{Im}(f(p) p^{-ia_0})}{p}$ converge (ce qui équivaut à $\sum_p \frac{1 - f(p) p^{-ia_0}}{p}$ converge), et alors $f(n) n^{-ia_0}$ admet une valeur moyenne non nulle C_0 ;

(β) Dans le cas contraire, on peut poser

$$\exp\left(+i \sum_{p \leq e^u} \frac{\operatorname{Im}(f(p)) p^{-ia_0}}{p}\right) = L(u) \quad .$$

On a bien $|L(u)| = 1$, et d'autre part

$$\begin{aligned} \left| \sum_{e^u < p \leq e^{2u}} \frac{\operatorname{Im}(f(p)) p^{-ia_0}}{p} \right| &\leq \sqrt{\left(\sum_{e^u < p \leq e^{2u}} \frac{1}{p} \right) \left(\sum_{e^u < p \leq e^{2u}} \frac{\operatorname{Im}^2(p^{-ia_0} f(p))}{p} \right)} \\ &\leq \sqrt{\left(\sum_{e^u < p \leq e^{2u}} \frac{1}{p} \right)^2 \sum_{e^u < p \leq e^{2u}} \frac{1 - \operatorname{Re}(p^{-ia_0} f(p))}{p}} \quad . \end{aligned}$$

$$\text{Or } \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + a + o\left(\frac{1}{\log x}\right) .$$

Donc le 1er terme du produit tend vers $\log 2$ quand $u \rightarrow +\infty$, tandis que le 2e tend évidemment vers 0.

Si $M_0(x) = \sum_{n \leq x} f(n) n^{-ia_0}$, on peut écrire

$$M_0(x) = C_0 x L(\log x) + o(x) \quad .$$

Passage de $f(n) n^{-ia_0}$ à $f(n)$.

$$\sum_{n \leq x} f(n) = M(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x t^{ia_0} d(M_0(x)) = x^{ia_0} M_0(x) - ia_0 \int_1^x t^{ia_0-1} M_0(t) dt \quad .$$

Il est évident que $(M_0(x) = o(x)) \iff (M(x) = o(x))$, si

$$M_0(x) = C_0 x L(\log x) + o(x) \quad .$$

Alors on montre, après le changement de variable $t = xu$, et un passage à la limite dans l'intégrale obtenue, que

$$M(x) = \frac{C_0}{1 + ia_0} x^{1+ia_0} L(\log x) + o(x) \quad .$$

2. Etude du cas (B).

Montrons le théorème taubérien suivant :

Si

$F(s) = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)$ uniformément par rapport à t sur toute bande $|t| \leq K$,

$f(n)$ multiplicative strictement, avec $|f(n)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(condition taubérienne), alors f admet une valeur moyenne nulle.

Schéma de la démonstration (voir G. HALASZ [3]. Les hypothèses utilisées ici simplifient beaucoup la démonstration).

$$F'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n) \log n}{n^s} ;$$

on lui associe

$$N(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \log n .$$

Si $N(x) = O(x \log x)$, alors $M(x) = O(x)$. D'après une formule connue,

$$\sum_{n \leq x} f(n) \log n \cdot \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{x^s}{s^2} [-F'(s)] ds , \quad \text{où } \sigma_0 > 1 ,$$

si

$$\sum_{n \leq x} f(n) \log n \cdot \log \frac{x}{n} = O(x \log x) ,$$

on pourra en déduire (en écrivant l'égalité pour x et $x(1+\epsilon)$, et en soustrayant membre à membre)

$$N(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \log n = O(x \log x) .$$

Choisissons $\sigma_0 = 1 + \frac{1}{\log x}$. Soit (σ_0) la droite d'abscisse σ_0 . Sur la droite (σ_0) , on a, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned} \left| \int_{(\sigma_0)} \frac{x^{s-1}}{s^2} [-F'(s)] ds \right| &\leq x^{\sigma_0-1} \int_{(\sigma_0)} \frac{|F'(s)|}{|s|^2} = e \int_{(\sigma_0)} \frac{\left| \frac{F'(s)}{F(s)} \right|}{|s|^{3/4}} \frac{|F(s)|}{|s|^{5/4}} |ds| \\ &\leq e \sqrt{\int_{(\sigma_0)} \frac{\left| \frac{F'(s)}{F(s)} \right|^2}{|s|^{3/2}} |ds| \int_{(\sigma_0)} \frac{|F(s)|^2}{|s|^{5/2}} |ds|} . \end{aligned}$$

(Pour le reste de la démonstration, voir [3].) On notera en particulier l'emploi de la formule de Parseval pour se ramener à la fonction ζ , ainsi que la technique utilisée pour majorer le 1er terme du produit, en partant de

$$\int_{(\sigma_0)} \left| \frac{F'(s)}{F(s)} \right|^2 \frac{ds}{|s|^2} = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right) .$$

Donc $f(n)$ admet une valeur moyenne nulle.

Pour montrer que tout f de $\mathcal{M}_0$, tel que $F(s) = O\left(\frac{1}{s-1}\right)$, a une valeur moyenne nulle, on applique le théorème 3 de DELANGE ([2], p. 285) à $f^*(n)$.

La conjecture de Wirsing est donc entièrement démontrée.

Pour terminer, revenons à la conjecture d'Erdős, et aux problèmes des valeurs moyennes.

Dans le cas où f ne prend que des valeurs réelles (c'est-à-dire -1 et $+1$), il est évident que s'il existe a_0 tel que $\sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p) p^{-ia_0})}{p}$ converge, alors $(-a_0)$ jouit de la même propriété. D'après le théorème d'unicité, $a_0 = 0$. D'autre part, dans ce cas, par construction, $L(u) = 1$, $\forall u$. Ce qui montre la conjecture d'Erdős.

L'étude des valeurs moyennes permet de préciser le résultat de Wirsing.

D'après ce qui précède, f n'admet de valeur moyenne nulle que dans les deux cas suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } f(2^r) = 2^{ria_0}, \quad a_0 \text{ étant le seul } t \text{ tel que } \sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p) p^{-it})}{p} \text{ converge ;} \\ \text{(b) } \sum_p \frac{1 - \operatorname{Re}(f(p) p^{-it})}{p} = +\infty, \quad \text{pour tout } t \text{ réel .} \end{array} \right.$$

D'après le théorème 1 de DELANGE [2], f n'admet de valeur moyenne non nulle que dans le cas suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_p \frac{1 - f(p)}{p} \text{ converge (ce qui correspond à } a_0 = 0 \text{ et au cas étudié } (A - a - \alpha) \text{),} \\ \text{et} \\ f(2^r) = -1 \text{ n'est pas vrai pour tout } r \geq 1 . \end{array} \right.$$

Dans tous les autres cas, f n'admet pas de valeur moyenne, et on a la forme générale

$$M(x) = C_0 L_0(\log x) x^{1+ia_0} + o(x) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DELANGE (H.). - On a class of multiplicative arithmetical functions, Scripta Math., t. 26, 1961, p. 121-141.
- [2] DELANGE (H.). - Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 78, 1961, p. 1-29.
- [3] HALASZ (G.). - Über die Mittelwerte multiplikativer Zahlentheoretischer Funktionen, Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae, t. 19, 1968, p. 365-403.
- [4] WIRSING (E.). - Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II, Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae, t. 18, 1967, p. 411-467.

(Texte reçu le 24 juin 1969)

Emmanuel GILQUIN
Ecole Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique
61 avenue du Président Wilson
94 - CACHAN
