

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PIERRE WASSEF

Une classe d'ensembles d'unicité des séries trigonométriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 9, n° 1 (1967-1968),
exp. n° 3, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1967-1968__9_1_A3_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CLASSE D'ENSEMBLES D'UNICITÉ DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

par Pierre WASSEF

Tous les résultats ici exposés se trouvent dans le très bon livre de J.-P. KAHANE et R. SALEM [3].

Nous considèrerons des séries trigonométriques de la forme

$$(1) \quad S \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

On sait, depuis les travaux de CANTOR, que si une telle série converge vers zéro partout, alors elle est identiquement nulle (i. e. $a_n = b_n = 0$).

CANTOR lui-même a généralisé ce résultat en montrant que si la série (1) converge vers zéro partout, sauf peut-être en les points d'un ensemble fini E , le résultat est le même. Il a par la suite montré que ce théorème reste vrai si l'ensemble E est infini, mais tel que l'un de ses ensembles dérivés (d'ordre fini ou transfini) soit vide ; autrement dit, si E est dénombrable réductible. Ces travaux datent de 1870 ; il fallut attendre jusqu'en 1908 pour que YOUNG montre qu'il en est de même si E est un ensemble dénombrable quelconque.

Ces considérations nous conduisent à poser la définition suivante :

Ensembles d'unicité. - Un ensemble $E \subset [0, 2\pi]$ est dit ensemble d'unicité, s'il n'existe aucune série trigonométrique (1) qui converge partout vers zéro, sauf peut-être pour $t \in E$, exceptée la série identiquement nulle. Si E n'est pas d'unicité, on dit que c'est un ensemble de multiplicité.

Dans tout ce qui suit, les ensembles notés E seront inclus dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, et nous désignerons par $E \pmod{2\pi}$ l'ensemble des réels congrus modulo 2π à des points de E .

On voit donc que tout ensemble dénombrable est un ensemble d'unicité (du type U).

D'autre part, il est facile de voir (cf. appendice I) que tout ensemble E , de mesure $|E| > 0$, est un ensemble de multiplicité (du type M). Par conséquent, le problème est de classer tous les ensembles de mesure nulle en ensembles du type U et ensembles du type M .

En ce qui concerne les ensembles parfaits symétriques $E(\xi)$ de rapport constant ξ (cf. [3]), le problème a été résolu récemment, en 1955, par R. SALEM ; on lui doit le résultat suivant :

THÉORÈME (SALEM). - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble parfait symétrique, de rapport constant $E(\xi)$, soit du type U, est que $1/\xi \in S$, S étant l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

C'est ce résultat que nous nous proposons d'établir.

On rappelle que S est l'ensemble des entiers algébriques θ , dont tous les conjugués (sauf θ lui-même) sont de modules strictement inférieurs à 1.

On doit à C. PISOT (cf. [5], [6]) le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre réel $\theta > 1$ appartienne à l'ensemble S , est qu'il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$, tel que la série

$$\sum_0^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^n$$

converge.

Pour établir le théorème de Salem, nous allons utiliser les deux critères fondamentaux suivants :

THÉORÈME 2 [3]. - Pour qu'un ensemble compact $E \subset (0, 2\pi)$ soit du type M, il faut et il suffit qu'il existe une pseudo-fonction $S \neq 0$ portée par $E \pmod{2\pi}$.

Démonstration. - (En ce qui concerne la théorie des pseudo-fonctions, cf. appendice II ou [3].)

(a) On va d'abord montrer qu'étant donnée une pseudo-fonction

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int},$$

on a, en tout point où elle est "nulle",

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^{+N} c_n e^{int} = 0.$$

Par translation, on se ramène au cas où $t = 0$, en notant D_n le noyau de Dirichlet, soit

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt$$

$$= \frac{1}{2} \sin nt \cotg \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos nt .$$

Il est clair que l'on a

$$(2) \quad \int S D_n = \pi \sum_{-n}^{+n} c_i .$$

La pseudo-fonction S étant nulle au voisinage de 0 , on peut modifier D_n dans ce voisinage, sans modifier le "produit scalaire" (2); soit donc ϕ une fonction de la classe A , égale à $\cotg \frac{t}{2}$ hors d'un voisinage suffisamment petit de zéro; on a alors

$$2 \int S D_n = \int S \phi \sin nt + \int S \cos nt ;$$

les deux termes du deuxième membre, représentant des coefficients de pseudo-fonctions, tendent vers zéro pour n tendant vers l'infini, et par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{-n}^{+n} c_j = 0 .$$

(b) Pour établir la réciproque, il nous suffira de montrer que, si la série trigonométrique $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ converge vers zéro (au sens de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{-n}^{+n}$) en tout point t d'un intervalle ouvert I , alors elle représente une pseudo-fonction S qui est nulle sur I .

Tout d'abord, il est clair que les hypothèses impliquent que $c_n = o(1)$ quand $n \rightarrow \pm \infty$.

On va ensuite montrer que, sous ces hypothèses, la fonction continue

$$F(t) = c_0 \frac{t^2}{2} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{int}$$

(l'accent indiquant que l'on somme pour $n \neq 0$) est linéaire sur I et que, par conséquent (cf. appendice II), la pseudo-fonction S est nulle sur I ; cette démonstration repose sur ce que l'on appelle la "théorie de Riemann" des séries trigonométriques.

Soit

$$\Delta_2 F(t, h) = F(t+h) + F(t-h) - 2F(t) ;$$

un calcul simple montre que

$$(3) \quad \frac{\Delta_2 F(t, 2h)}{4h^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \omega(nh) e^{int}, \quad \text{avec } \omega(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

En posant $S_n(t) = \sum_{-n}^{+n} c_j e^{ijt}$, la série (3) s'écrit encore :

$$S_0(t) + \sum_1^{+\infty} (S_n(t) - S_{n-1}(t)) \omega(nh),$$

donc

$$\frac{\Delta_2 F(t, 2h)}{4h^2} = \sum_0^{+\infty} (\omega(nh) - \omega[(n+1)h]) S_n(t).$$

Soient Σ_1 la somme des N premiers termes de cette série, et Σ_2 le reste ; on a

$$\sum_0^{+\infty} |\omega(nh) - \omega[(n+1)h]| = \sum_0^{+\infty} \left| \int_{nh}^{(n+1)h} \omega'(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |\omega'(x)| dx = C < +\infty,$$

C étant fini et indépendant de h ; on a, pour tout $h \geq 0$;

$$|\Sigma_2| \leq C \sup_{n \geq N} |S_n(t)| ;$$

d'autre part, il est clair que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Sigma_1 = 0,$$

et par suite, on a, si $t \in I$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_2 F(t, h)}{h^2} = 0,$$

ce qui implique que, à la fois, F et $-F$ sont convexes sur I , donc que F est linéaire sur I .

Q. E. D.

Ce théorème va nous permettre d'en établir un autre qui nous sera très utile :

THÉORÈME 3 [3]. - Pour qu'un ensemble compact soit du type U , il suffit que l'on puisse trouver une suite infinie de fonctions $\lambda_k(x)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1° Le support de λ_k est disjoint de E pour tout k ;

2° Chaque λ_k appartient à la classe A ; i. e.

$$\lambda_k(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n^{(k)} e^{int} \quad \text{et} \quad \|\lambda_k\|_A = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_n^{(k)}| < \infty ,$$

et de plus $\|\lambda_k\|_A < B$, où B est indépendant de k ;

$$3^\circ \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_n^{(k)} = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 0 , \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_0^{(k)} = l \neq 0 .$$

Démonstration. - Soit S une pseudo-fonction portée par E .

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} ,$$

on a, d'après 1°,

$$\int S \bar{\lambda}_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} = 0 \quad \text{pour tout } k .$$

Or on peut écrire la série sous la forme

$$\sum_{|n| > N} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} + \sum_{1 \leq |n| \leq N} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} + c_0 \bar{\gamma}_0^{(k)} ,$$

et l'on a

$$\left| \sum_{|n| > N} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} \right| \leq B \sup_{|n| > N} |c_n| ,$$

quantité arbitrairement petite pour N suffisamment grand ; d'autre part,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{1 \leq |n| \leq N} c_n \bar{\gamma}_n^{(k)} \right| = 0 \quad (\text{d'après le } 3^\circ) ,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} c_0 \bar{\gamma}_0^{(k)} = c_0 l .$$

Par conséquent, $c_0 l = 0$, d'où $c_0 = 0$.

En multipliant S par e^{-ikt} , et en faisant le même raisonnement, on montre que $c_k = 0$ pour tout k , donc que $S \equiv 0$, et la conclusion est une conséquence du théorème 2.

Q. E. D.

Ce critère va nous permettre de construire de nombreux ensembles du type U .

Ensembles du type H (RAJCHMAN). - Un compact E est dit du type H , s'il existe une suite croissante infinie d'entiers n_k et un intervalle ouvert I tels

que tous les ensembles $n_k E \pmod{2\pi}$ (i. e. les ensembles de point $n_k x$, où $x \in E$, définis modulo 2π) soient disjoints de I .

THÉORÈME 4. - Tout ensemble du type H est ensemble d'unicité.

Démonstration. - Soit $\lambda(t)$ une fonction de la classe A dont le support est intérieur à $I \pmod{2\pi}$ et dont la valeur moyenne n'est pas nulle ; soit

$$\lambda(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{imt}, \quad \gamma_0 \neq 0,$$

posons

$$\lambda_k(t) = \lambda(n_k t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m e^{im n_k t},$$

il est clair que la suite des fonctions $\lambda_k(t)$ satisfait les conditions du théorème 3.

Q. E. D.

Ensembles du type $H^{(n)}$ (PJATECKIJ-ŠAPIRO). - Considérons une famille de vecteurs V_k à n coordonnées entières :

$$V_k = (p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, \dots, p_k^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Cette famille sera dite normale si, quels que soient n entiers non tous nuls a_1, a_2, \dots, a_n , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_1 p_k^{(1)} + a_2 p_k^{(2)} + \dots + a_n p_k^{(n)}| = +\infty.$$

Un ensemble compact E sera dit du type $H^{(n)}$, s'il existe un domaine Δ du tore à n dimensions et une famille normale de vecteurs V_k tels que tous les ensembles $V_k E \pmod{2\pi}$ (i. e. l'ensemble des points du tore à n dimensions qui sont de la forme

$$(p_k^{(1)} x \pmod{2\pi}, \dots, p_k^{(n)} x \pmod{2\pi})$$

avec $x \in E$) soient disjoints de Δ .

THÉORÈME 5. - Tout ensemble du type $H^{(n)}$ est ensemble d'unicité.

La démonstration se fait en supposant que Δ est le produit de n intervalles ouverts I, J, \dots, L , en désignant par $\lambda, \mu, \dots, \varepsilon$ n fonctions de la classe A de supports respectivement intérieurs à I, J, \dots, L , et en posant

$$\lambda_k(t) = \lambda(p_k^{(1)} t) \times \mu(p_k^{(2)} t) \times \dots \times \varepsilon(p_k^{(n)} t) .$$

On vérifie que ces fonctions $\lambda_k(t)$ vérifient les conditions du théorème 3 si $\lambda, \mu, \dots, \varepsilon$ ont chacune leur valeur moyenne non nulle.

Q. E. D.

Nous aurons aussi à nous servir des deux théorèmes suivants que nous donnons sans démonstration :

THÉORÈME (a) ([1], [2], [4]). - La réunion de deux compacts du type U est du type U .

THÉORÈME (b) ([1], [2], [4]). - Si deux compacts E_1 et E_2 contenus dans $[0, 2\pi]$ sont homothétiques, ils sont tous les deux du type U ou du type M .

Démonstration du théorème de Salem. - Soit $L(x)$ la "fonction de Lebesgue" attachée à l'ensemble parfait $E(\xi)$ (cf. [3] ou appendice III), et notons dL la mesure qu'elle définit.

On déduit du théorème 2 que, si dL est une pseudo-fonction, $E(\xi)$ est du type M .

Nous allons montrer que, si $1/\xi = \theta \notin S$, alors dL est une pseudo-fonction ; pour cela, considérons la transformée de Fourier-Stieljes de dL , soit

$$\Gamma(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dL(x) .$$

Un calcul simple montre que, si l'on construit $E(\xi)$ sur l'intervalle

$$\left(\frac{-1}{1-\xi}, \frac{1}{1-\xi} \right) ,$$

on obtient pour expression de $\Gamma(u)$:

$$\Gamma(u) = \prod_0^{\infty} \cos u\xi^k .$$

Dire que dL est une pseudo-fonction équivaut à dire que $\Gamma(u) = o(1)$ quand $|u| \rightarrow \infty$; supposons que $\Gamma(u) \neq o(1)$, on peut trouver une suite croissante u_s de nombres réels tendant vers l'infini et tels que

$$|\Gamma(u_s)| \geq \delta > 0 , \quad \text{avec } 0 < \delta < 1 .$$

On peut toujours écrire, en posant $\xi = \frac{1}{\theta}$,

$$u_s = \pi \lambda_s \theta^{m_s},$$

où $\{m_s\}$ est une suite croissante d'entiers sans limite, et avec $1 \leq \lambda_s < \theta$.

Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \lambda_s = \lambda$ avec $1 \leq \lambda \leq \theta$.

On a, pour tout entier s ,

$$\delta \leq |\Gamma(u_s)| \leq |\cos \pi \lambda_s \times \cos \pi \lambda_s \theta \times \dots \times \cos \pi \lambda_s \theta^{m_s}|,$$

donc

$$\delta^2 \leq \prod_{q=0}^{m_s} [1 - \sin^2 \pi \lambda_s \theta^q],$$

et compte-tenu de l'inégalité $1 + x < e^x$,

$$\exp\left(-\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi \lambda_s \theta^q\right) \geq \delta^2,$$

d'où

$$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi \lambda_s \theta^q \leq \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Or, pour $r > s$, on a

$$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi \lambda_r \theta^q \leq \sum_{q=0}^{m_r} \sin^2 \pi \lambda_r \theta^q \leq \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

donc, pour s fixé et r tendant vers l'infini, on obtient

$$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2 \pi \lambda \theta^q \leq \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

ceci étant vrai quel que soit s , on en déduit

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^q \leq \log\left(\frac{1}{\delta^2}\right),$$

ce qui montre, d'après le théorème 1, que $\theta \in S$.

On a donc établi que, si $\frac{1}{\xi} \notin S$, l'ensemble parfait $E(\xi)$ construit sur l'intervalle $\left[\frac{-1}{1-\xi}, \frac{1}{1-\xi}\right]$ est du type M; ceci entraîne, d'après les théorèmes

(a) et (b), que tout ensemble $E(\xi)$, construit sur un intervalle quelconque, est du type M si $\frac{1}{\xi} \notin S$. (En effet, pour un même ξ , deux ensembles $E(\xi)$ sont homothétiques.)

La réciproque consiste à démontrer que, si $\frac{1}{\xi} = \theta \in S$ est algébrique de degré n , alors l'ensemble $E(\xi)$ construit sur $(0, 2\pi)$ est du type $H^{(n)}$.

La démonstration est basée sur le théorème de Minkowski ; on construit, par récurrence, une famille normale de vecteurs V_k à coordonnées entières (cf. [3]).

Appendice I (cf. [8])

Tout ensemble E de mesure $|E| > 0$ est du type M

Ceci vient du fait que l'ensemble des points où une série trigonométrique ne converge pas vers 0 est un borélien ; par conséquent, si cet ensemble ne contient aucun ensemble parfait, il est dénombrable, et donc de mesure nulle.

On peut donc supposer que E est un borélien de mesure $|E| > 0$, et soit P un ensemble parfait contenu dans E tel que $|P| > 0$. Soit $\chi(x)$ la fonction caractéristique de P ; la série de Fourier de $\chi(x)$ converge vers zéro sur tout intervalle contigu à P , donc dans le complémentaire de P , donc dans le complémentaire de E ; mais on a, pour cette série,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int \chi(x) dx = \frac{|P|}{\pi} > 0 .$$

Q. E. D.

Appendice II (cf. [3])

Pseudo-fonctions

On appelle pseudo-fonction une série trigonométrique S de la forme

$$(1) \quad S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad \text{avec } c_n \in \mathbb{C},$$

et

$$c_n = o(1) \quad \text{quand } n \rightarrow \pm \infty .$$

A une telle pseudo-fonction, on associe les fonctions holomorphes

$$s^+(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n \quad \text{pour } |z| < 1 ,$$

$$s^-(z) = - \sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n \quad \text{pour } |z| > 1 .$$

On dira qu'un point e^{ia} est régulier pour le couple (s^+, s^-) , si l'on peut définir, en son voisinage, une fonction holomorphe qui coïncide avec s^+ et s^- , respectivement dans les parties du voisinage où elles sont définies.

On dira que S est nulle sur un ouvert Ω , si pour tout $a \in \Omega$, e^{ia} est régulier pour le couple (s^+, s^-) . On dira que S est portée par un fermé F , si S est nulle sur le complémentaire de F . Le support de S est l'ensemble des a tels que e^{ia} ne soit pas régulier pour le couple (s^+, s^-) ; c'est le plus petit fermé portant S .

On convient de dire que S est une fonction sommable f (ou une mesure $d\mu$), si f (ou $d\mu$) a pour série de Fourier la série (1).

Une fonction sommable φ est dite "de la classe A", si

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{int} , \quad \text{avec } \sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| < \infty .$$

S étant une pseudo-fonction, et φ une fonction de la classe A , on définit leur "produit scalaire",

$$\langle S , \varphi \rangle = \int S \bar{\varphi} = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \bar{\gamma}_n ,$$

où

$$S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \quad \text{et} \quad \varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{int} .$$

On démontre que, si S et φ ont leurs supports disjoints, alors $\langle S , \varphi \rangle = 0$.

D'autre part, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une pseudo-fonction $S \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ soit "nulle" sur un intervalle ouvert I , est que la fonction continue

$$F(t) = c_0 \frac{t^2}{2} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{int}$$

soit linéaire sur I .

Appendice III (cf. [3])

Fonction $L(x)$ de Lebesgue construite sur $E(\xi)$

On sait, qu'étant donné un nombre réel ξ , $0 < \xi < \frac{1}{2}$, et un intervalle $[a, b]$, l'ensemble $E(\xi)$ construit sur $[a, b]$ est égal à l'intersection des ensembles E_k , pour $k = 1, 2, \dots$, où E_k désigne l'ensemble obtenu après k opérations de dissection du type $(2, \xi)$ successives de $[a, b]$.

E_k est formé de 2^k intervalles fermés de longueur commune $(b-a)\xi^k$; soit $L_k(x)$ la fonction continue égale à 0 pour $x \leq a$, égale à 1 pour $x \geq b$, et croissant linéairement de $\frac{1}{2^k}$ sur chacun des intervalles constituant E_k . Quand $k \rightarrow \infty$, $L_k(x)$ tend uniformément vers une fonction $L(x)$ continue, croissante au sens large, et constante sur chaque intervalle contigu à $E(\xi)$: c'est la fonction de Lebesgue construite sur $E(\xi)$. La variation de $L(x)$ sur un intervalle est la L -mesure de cet intervalle, notée dL .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARY (Nina). - Sur l'unicité du développement trigonométrique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 177, 1923, p. 1195-1197.
- [2] BARY (Nina). - Sur l'unicité du développement trigonométrique, Fund. Math., t. 9, 1927, p. 62-115.
- [3] KAHANE (Jean-Pierre) et SALEM (Raphaël). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).
- [4] MARCINKIEWICZ (J.) and ZYGMUND (A.). - Two theorems on trigonometrical series, Mat. Sbornik, Série 2, t. 44, 1937, p. 733-738.
- [5] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie 2, t. 7, 1938, p. 205-248 (Thèse Sc. math. Paris, 1938).
- [6] PISOT (Charles). - Sur une famille remarquable d'entiers algébriques formant un ensemble fermé, Colloque sur la théorie des nombres [1955. Bruxelles], p. 77-83. - Liège, G. Thone; Paris, Masson, 1956 (Centre belge de Recherches mathématiques).
- [7] SALEM (Raphaël). - Algebraic numbers and Fourier analysis. - Boston, Heath, 1963 (Heath mathematical Monographs).
- [8] ZYGMUND (A.). - Trigonometric series, Vol. 1 and 2, 2nd ed. - Cambridge, University Press, 1959.