

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN FRESNEL

Les fonctions p -adiques L de Dirichlet

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965),
exp. n° 17, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A8_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES FONCTIONS p -ADIQUES L DE DIRICHLET

par Jean FRESNEL

Introduction. - La fonction $L(s, \chi)$ de Dirichlet correspondant au caractère primitif χ admet pour $s = 1 - m$ (m entier naturel) la valeur algébrique

$$L(1 - m, \chi) = - \frac{B_m^\chi}{m}$$

où B_χ^m est le nombre de Bernoulli relatif au caractère χ .

Partant de cette remarque Tomio KUBOTA et Henrich Wolfgang LEOPOLDT [4] ont cherché à construire une fonction continue sur l'anneau de valuation p -adique coïncidant sur les entiers négatifs avec la fonction complexe $L(s, \chi)$.

Ils ont montré en fait, qu'il existe une seule fonction continue coïncidant (à un facteur multiplicatif près) avec la fonction complexe sur les entiers négatifs d'une classe modulo $p - 1$.

Des classes différentes conduisent à des fonctions distinctes qui cependant ont rapport entre elles de façon simple (grâce à l'introduction d'un caractère θ).

La fonction p -adique ainsi construite est holomorphe pour $\chi \neq \chi_0$ (caractère principal de conducteur 1) et pour $\chi = \chi_0$ elle admet un pôle simple pour $s = 1$.

1. Avant-propos sur les séries.

Posons $q = 4$ si $p = 2$, et $q = p$ autrement; soient \mathbb{Q}_p le corps p -adique élémentaire, $x \rightarrow |x|$ la valeur absolue p -adique définie par $|p| = p^{-1}$; soit \mathfrak{U} le groupe des $u \in \mathbb{Q}_p$ tels que $|u - 1| \leq |q|$.

Soit \mathfrak{S} l'algèbre sur \mathbb{Q}_p des séries convergentes sur \mathfrak{U} de la forme

$$A(u) = \sum_{n \geq 0} a_n (u - 1)^n \quad (a_n \in \mathbb{Q}_p).$$

Alors $a_n q^n \rightarrow 0$, et nous posons

$$(0) \quad \|A\| = \sup_{n \geq 0} |a_n q^n|.$$

L'application $A \rightarrow \|A\|$ est une norme ultramétrique pour l'algèbre \mathfrak{S} , satisfaisant les conditions :

- (1) $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0 \iff A = 0$;
 (2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ pour $c \in \mathbb{Q}_p$;
 (3) $\|A_1 + A_2\| \leq \sup(\|A_1\|, \|A_2\|)$;
 (4) $\|A_1 \cdot A_2\| \leq \|A_1\| \cdot \|A_2\|$.

Soit $\tilde{\mathbb{Q}}_p$ une extension de \mathbb{Q}_p ; supposons que le corps des restes de $\tilde{\mathbb{Q}}_p$ soit infini. Soit \mathfrak{U} le groupe des $u \in \tilde{\mathbb{Q}}_p$, tels que $|u - 1| \leq |q|$. Alors

$$(5) \quad \|A\| = \sup_{u \in \mathfrak{U}} |A(u)| \quad (\text{1re formule de Cauchy}).$$

Posons

$$(6) \quad \frac{1}{k!} A^{(k)}(u) = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k} a_{n+k} (u-1)^n .$$

Il est immédiat que

$$(7) \quad \left| \frac{q^k}{k!} \right| \cdot \|A^{(k)}\| \leq \|A\| .$$

On peut montrer facilement que \mathfrak{U} est complet, c'est-à-dire que \mathfrak{U} est un espace de Banach p-adique.

2. Construction du "χ-moyen".

Soit \mathbb{Z} l'anneau des entiers.

Si $p \neq 2$, définissons le caractère θ par

$$\theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{p^n} .$$

θ est un caractère modulo p , d'ordre $p-1$.

Si $p = 2$,

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 1 && \text{si } x \equiv 1 \pmod{4}, \\ \theta(x) &= -1 && \text{si } x \equiv -1 \pmod{4}, \\ \theta(x) &= 0 && \text{si } x \text{ divise } 2. \end{aligned}$$

θ est un caractère modulo 4 et d'ordre 2.

Si $(x, p) = 1$, posons $\langle x \rangle = \frac{x}{\theta(x)} \in \mathfrak{U}$.

Soit χ un caractère modulo $f(\chi)$ considéré comme application de \mathbb{Z} dans le groupe des racines de l'unité.

Dans la suite, la notation \sum^* signifiera sommation pour tous les nombres x premiers avec p du domaine de sommation indiqué chaque fois.

Pour toute série $A \in \mathfrak{U}$, nous posons,

$$(0) \quad \mathfrak{M}_{\chi}^n(A) = \frac{1}{f_q^n} \sum_{x=1}^{f_q^n} \chi(x) A(\langle x \rangle),$$

où χ est un caractère modulo f , et $\bar{f} = \text{ppcm}(f, q)$.

$$|\mathfrak{M}_{\chi}^n(A)| \leq C_{\chi}^n \|A\| \quad \text{où} \quad C_{\chi}^n = \left| \frac{1}{\bar{f}q^n} \right|$$

\mathfrak{M}_{χ}^n est donc une application linéaire bornée de \mathfrak{U} dans $\hat{\Omega}_p$ (complété de la clôture algébrique Ω_p de $\underline{\mathbb{Q}}_p$) et appartient à l'espace de Banach p -adique $L_{\underline{\mathbb{Q}}_p}(\mathfrak{U}, \hat{\Omega}_p)$ (espace vectoriel normé des applications $\underline{\mathbb{Q}}_p$ linéaires bornées de \mathfrak{U} dans $\hat{\Omega}_p$).

Nous nous proposons de montrer que la suite \mathfrak{M}_{χ}^n est convergente dans $L_{\underline{\mathbb{Q}}_p}(\mathfrak{U}, \hat{\Omega}_p)$. Pour cela, nous allons démontrer deux lemmes.

LEMME 1. - Les applications \mathfrak{M}_{χ}^n sont équi-bornées, c'est-à-dire qu'il existe une constante C_{χ} telle que

$$\|\mathfrak{M}_{\chi}^n\| \leq C_{\chi} \quad \forall n \geq 0.$$

Preuve. - Tout d'abord, pour tout $u_0 \in \mathfrak{U}$ et $|u - u_0| < |q|$,

$$(1) \quad A(u) = \sum_{m \geq 0} \frac{A^{(m)}(u_0)}{m!} (u - u_0)^m$$

(cf. par exemple, [1], lemme 1.4).

Posons $u_0 = \langle x \rangle$ et $u = \langle x + \bar{f}q^n z \rangle$, $z \in \underline{\mathbb{Z}}$, alors $\theta(x) = \theta(x + \bar{f}q^n z)$ et $u - u_0 = \frac{\bar{f}q^n}{\theta(x)}$.

Posons $S_m = \sum_{z=0}^{q-1} z^m$, on a en appliquant la relation (1),

$$(2) \quad \sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \bar{f}q^n z \rangle) - qA(\langle x \rangle) = \sum_{m \geq 1} \frac{A^{(m)}(\langle x \rangle)}{m!} \frac{(\bar{f}q^n)^m}{\theta^m(x)} S_m,$$

soit

$$\left| \sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \bar{f}q^n z \rangle) - qA(\langle x \rangle) \right| \leq \|A\| \sup_{m \geq 1} (|S_m| \cdot |\bar{f}q^{n-1}|^m).$$

Comme $|S_m| \cdot |\bar{f}q^{n-1}|^{m-1} \leq |p|$ si $n \geq 1$,

$$(3) \quad \left| \sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \bar{f}q^n z \rangle) - qA(\langle x \rangle) \right| \leq \|A\| \cdot |\bar{f}pq^{n-1}| \quad \text{si } n \geq 1.$$

Considérons maintenant la différence $\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)$, nous obtenons :

$$(4) \quad \overline{f}_q^{n+1}(\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)) = \sum_{x=1}^{\overline{f}_q^n} \chi(x) \left\{ \sum_{z=0}^{q-1} A(\langle x + \overline{f}_q^n z \rangle) - qA(\langle x \rangle) \right\};$$

la relation (3) montre que

$$|\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)| \leq C \|A\| \quad \text{avec } C = |pq^{-2}|.$$

LEMME 2. - La suite \mathfrak{M}_χ^n est de Cauchy.

Preuve. - Transformons le membre de droite de (4), au moyen de la série (2), alors on a l'identité

$$\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A) = \sum_{m \geq 1} \frac{S_m}{q} \frac{(\overline{f}_q^n)^m}{m!} \mathfrak{M}_{\chi\theta^{-m}}^n(A^{(m)}).$$

D'après le lemme 1 et la relation (7) du § 1,

$$|\mathfrak{M}_{\chi\theta^{-m}}^n(\frac{q^m A^{(m)}}{m!})| \leq C_{\chi\theta^{-m}} \|A\|,$$

et par conséquent

$$|\mathfrak{M}_\chi^{n+1}(A) - \mathfrak{M}_\chi^n(A)| \leq C_\chi^* \|A\| |\overline{f}_q^{n-1}|$$

avec $C_\chi^* = \sup_{m \geq 1} \left\{ \left| \frac{S_m}{q} \right| \cdot |\overline{f}_q^{n-1}|^{m-1} C_{\chi\theta^{-m}} \right\}$. C_χ^* existe bien puisque les $C_{\chi\theta^{-m}}$ sont en nombre fini.

Par suite $\|\mathfrak{M}_\chi^{n+1} - \mathfrak{M}_\chi^n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Il en résulte alors immédiatement le théorème :

THÉORÈME 1. - La suite \mathfrak{M}_χ^n converge dans $L_{\mathbb{Q}_p}(\mathfrak{F}, \hat{\Omega}_p)$ vers \mathfrak{M}_χ .

L'application linéaire bornée \mathfrak{M}_χ s'appelle le " χ -moyen".

3. Introduction des fonctions p-adiques L de Dirichlet.

Soit \mathbb{Z}_p l'anneau de valuation de \mathbb{Q}_p . Pour $s \in \mathbb{Z}_p$ et $u \in \mathfrak{U}$, posons

$$P_s(u) = u^s = \sum_{n \geq 0} \binom{s}{n} (u-1)^n.$$

La série P_s est un élément de \mathfrak{F} , et par conséquent $\mathfrak{M}_\chi(P_s)$ existe pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$.

DÉFINITION. - La fonction p-adique L de Dirichlet, relative au caractère χ (primitif), est une application de \mathbb{Z}_p dans Ω_p définie par

$$(0) \quad L(s, \chi) = \frac{1}{s-1} \mathfrak{M}_\chi(P_s).$$

La fonction logarithme, notée Log , définie par

$$\text{Log}(u) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (u-1)^n \quad \text{pour } u \in \mathcal{U},$$

est un élément de \mathfrak{F} .

D'autre part, notons par E la fonction exponentielle, nous avons

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \quad \text{pour } |t| \leq |p|^{1/(p-1)}.$$

Notons par E_N la somme partielle

$$E_N(t) = \sum_{n=0}^N \frac{t^n}{n!}.$$

Nous avons $P_s(u) = E(s \text{Log}(u))$ pour $u \in \mathcal{U}$. La série $E_N(s \text{Log})$ appartient à \mathfrak{F} et converge vers $E(s \text{Log})$ pour la norme de \mathfrak{F} , et puisque \mathfrak{M}_χ est une application linéaire bornée,

$$\mathfrak{M}_\chi(P_s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\chi(E_N(s \text{Log})) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{s^n}{n!} \mathfrak{M}_\chi(\text{Log}^n).$$

Par conséquent

$$(1) \quad \mathfrak{M}_\chi(P_s) = \sum_{n \geq 0} \frac{s^n}{n!} \mathfrak{M}_\chi(\text{Log}^n).$$

La fonction $\mathfrak{M}_\chi(P_s)$ est analytique stricte dans le disque de rayon R_χ qui satisfait les inégalités suivantes :

$$(2) \quad R_\chi \geq \begin{cases} 2 & \text{si } p = 2 \\ p \frac{1}{p-1} & \text{si } p \neq 2 \end{cases}$$

$$L(s, \chi) = \frac{1}{s-1} \sum_{m \geq 0} \frac{\mathfrak{M}_\chi(\text{Log}^m)}{m!} q(1-s)^m$$

$$\mathfrak{M}_\chi(\text{Log}^0) = \frac{1}{q^{n-f}} \sum_{x=1}^{q^{n-f}} \chi(x) = \frac{1}{q^{n-f}} \sum_{x=1}^{q^{n-f}} \chi \theta^0(x).$$

Par suite

$$(3) \quad \mathfrak{M}_\chi(\text{Log}^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \theta^0 \neq \chi_0 \\ (p-1)/p & \text{si } \chi \theta^0 = \chi_0 \end{cases}$$

de conducteur p puisque χ est primitif.

Ainsi la fonction $L(s, \chi)$ est analytique dans le disque de rayon R_χ si $\chi \neq \chi_0$ (c'est-à-dire si $\chi \neq \chi_0$ de conducteur 1), sinon elle est méromorphe et admet pour pôle simple $s = 1$ de résidu $\frac{p-1}{p}$.

Calculons maintenant $L(1-m, \chi)$.

$$L(1-m, \chi) = -\frac{\mathfrak{M}_\chi(P_m)}{m},$$

$$\mathfrak{M}_\chi^n(P_m) = \frac{1}{f q^n} \sum_{x=1}^{f q^n} \chi(x) \left(\frac{x}{\theta(x)}\right)^m \equiv B^m \chi \theta^{-m} \pmod{p^n}.$$

Cette dernière congruence [2] s'obtient en utilisant la relation

$$\frac{(B \chi \theta^{-m} + \lambda f)^{m+1} - B^{m+1}}{\chi \theta^{-m} (m+1)} \equiv \frac{\lambda f}{\sum_{x=1}^{f q^n} \chi \theta^{-m}(x)}.$$

Ainsi $\mathfrak{M}_\chi(P_m) = B^m \chi \theta^{-m}$, et,

$$(4) \quad L(1-m, \chi) = -\frac{B^m \chi \theta^{-m}}{m}.$$

Si $m \equiv 0 \pmod{p-1}$,

$$(5) \quad L(1-m, \chi) = -\frac{B^m \chi \theta^0}{m} = -\frac{B^m \chi}{m} (1 - \chi(p) p^{m-1}) \quad [2].$$

Puisque l'ensemble des entiers congrus à 0 mod $p-1$ est dense dans \mathbb{Z}_p , que $L(s, \chi)$ est continue, c'est la seule fonction continue sur \mathbb{Z}_p qui, pour $1-m$ ($m \equiv 0 \pmod{p-1}$), prenne la valeur $-\frac{B^m \chi}{m} (1 - \chi(p) p^{m-1})$.

Nous pouvons rassembler ces résultats dans le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Pour tout caractère $\chi \neq \chi_0$ (de conducteur 1), il existe exactement sur \mathbb{Z}_p , une fonction continue qui, pour $s = 1-m$ avec $m \equiv 0 \pmod{p-1}$, prend la valeur

$$L(1-m, \chi) = -\frac{B^m \chi}{m} (1 - \chi(p) p^{m-1}).$$

Elle est analytique stricte (pour un $R_\chi > 1$), pour $|s-1| < R_\chi$, et se met, pour $s \in \mathbb{Z}_p$, sous la forme

$$L(s, \chi) = \frac{1}{s-1} \mathfrak{M}_\chi(P_{1-s}).$$

Le théorème reste vrai pour $\chi = \chi_0$ (de conducteur 1), à l'exception près que la fonction est méromorphe et admet un pôle simple pour $s = 1$ de résidu $\frac{p-1}{p}$.

De (4), on peut déduire que les fonctions relatives à caractère pair sont non nulles, tandis que les fonctions correspondantes à des caractères impairs sont identiquement nulles.

Soient $\underline{\underline{K}}$ un corps réel abélien et $\underline{\underline{x}}$ le groupe de ses caractères. Nous attribuons formellement à $\underline{\underline{K}}$ une fonction ζ p-adique en posant

$$\zeta_{\underline{\underline{K}}}(s) = \prod_{\chi \in \underline{\underline{x}}} L(s, \chi) .$$

Ces fonctions $\zeta_{\underline{\underline{K}}}(s)$ sont toutes méromorphes dans un cercle $|s - 1| < R_{\underline{\underline{K}}}$ (où $R_{\underline{\underline{K}}} > 1$) et y ont au plus un pôle d'ordre 1, pour $s = 1$.

En particulier,

$$\zeta_{\underline{\underline{Q}}}(s) = L(s, \chi_0) \quad \chi_0 \text{ de conducteur } 1$$

est conçue comme le pendant p-adique de la fonction ζ de Riemann.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude du dénominateur de $L(1, \chi)$ et à l'approximation de $L(1, \chi)$ par $L(1-s, \chi)$.

4. Le dénominateur de $L(1, \chi)$.

THÉOREME 3. - On a $|L(1, \chi)| \leq 1$, pour tout caractère $\chi \neq \chi_0$ si $p = 2$, pour tout caractère $\chi \neq \chi_0$ si $p \neq 2$, tels que les conducteurs et l'ordre m ne soient pas en même temps des puissances de p .

Pour les caractères d'exception χ , on a

$$|L(1, \chi)| = |1 - \chi(1+p)|^{-1} .$$

Nous ne reproduisons pas la preuve de ce théorème afin de ne pas alourdir l'exposé. La démonstration se trouve dans [4].

5. Approximation de $L(1, \chi)$ par les nombres de Bernoulli.

Nous avons le théorème suivant :

THÉOREME 4. - Si $s \in \underline{\underline{Z}}_p$, si $p = 2$ ou $p = 3$,

$$|L(1, \chi) - L(1-s, \chi)| \leq |s| ;$$

si $p \neq 2$ et 3 et si l'ordre de χ et le conducteur de χ ne sont pas en même

temps des puissances de p ,

$$|L(1, \chi) - L(1-s, \chi)| \leq |ps|$$

sinon

$$|L(1, \chi) - L(1-s, \chi)| \leq |p^{1-\frac{2}{p-1}} s|.$$

Preuve. - La preuve de ce théorème est immédiate en utilisant les congruences du théorème 1 [2] sur les nombres de Bernoulli. Les approximations obtenues par cette méthode sont plus fines que celles qui se trouvent dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DWORK (Bernard). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 5-68).
 - [2] FRESNEL (Jean). - Congruences entre les nombres de Bernoulli, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 6, 1964/65, n° 14, 12 p.
 - [3] GÁL (I. S.). - Lectures on algebraic and analytic number theory. - Minneapolis, Jones Letter Service, 1961.
[Cf. en particulier : chapitre 30, p. 229-239.]
 - [4] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p -adische Theorie der Zetawerte, I : Einführung der p -adischen Dirichletschen L -Funktionen, J. für reine und angew. Math., t. 214/215, 1964, p. 328-339.
-