

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

YVETTE AMICE

## Mesures $p$ -adiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 6, n° 2 (1964-1965),  
exp. n° 16, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1964-1965\\_\\_6\\_2\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A7_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MESURES p-ADIQUES

par Yvette AMICE

Soient  $K$  une extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $s$  son degré et  $A$  son anneau de valuation. Nous noterons  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$  une base du  $\mathbb{Z}_p$ -module  $A$ . On sait qu'alors l'espace  $E$  des fonctions continues sur  $A$  à valeurs dans  $K$ , muni de la norme de la convergence uniforme, admet les fonctions

$$Q_{n_1, \dots, n_s}(x) = \binom{x_1}{n_1} \dots \binom{x_s}{n_s} \quad \left( \text{où } x = \sum_{i=1}^s x_i \omega_i \right)$$

comme base normale [1].

1. Caractères.

DÉFINITION. - Nous appellerons caractère (p-adique) de  $A$  une représentation continue du groupe additif de  $A$  dans le groupe multiplicatif des unités de  $\hat{\Omega}_p$  (complété de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ ).

Si  $V(A)$  désigne l'ensemble des caractères de  $A$ , il se munit de façon évidente d'une structure de groupe, la loi (notée multiplicativement) étant définie par

$$\theta\theta'(x) = \theta(x)\theta'(x), \quad \forall x \in A, \quad \theta \in V(A), \quad \theta' \in V(A).$$

Etant donné une base  $\omega$  de  $A$ , et  $\theta \in V(A)$ , soit

$$\theta_i = \theta(\omega_i), \quad i = 1, \dots, s;$$

il est clair que nécessairement  $|\theta_i - 1| < 1$ . Réciproquement, si

$$(\theta_1, \dots, \theta_s) \in \hat{\Omega}_p^s$$

est tel que  $|\theta_i - 1| < 1$  ( $i = 1, \dots, s$ ), la fonction

$$\theta(x) = \theta_1^{x_1} \dots \theta_s^{x_s}$$

est un caractère de  $A$ . Nous noterons  $V = \{\theta \in \hat{\Omega}_p \mid |\theta - 1| < 1\}$ .

On a d'ailleurs

$$\|\theta - 1\| = \sup_{x \in A} |\theta(x) - 1| = \max_i |\theta_i - 1|.$$

Soit  $\theta_0(x) = 1$  le caractère unité et  $d(\theta, \theta')$  la distance définie sur  $V(A)$  par

$$\begin{cases} d(\theta, \theta_0) = \|\theta - 1\| \\ d(\theta, \theta') = \|\theta\theta' - 1\|, \end{cases}$$

on voit donc que : Le choix d'une base  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$  du  $\mathbb{Z}_p$ -module  $A$  dé-  
finit un isomorphisme de  $V(A)$  sur  $V^s$  par

$$\theta \rightarrow (\theta_1, \dots, \theta_s) \quad \text{où } \theta_i = \theta(\omega_i).$$

Soit  $V_k(A)$  le sous-groupe de  $V(A)$  constitué des éléments d'ordre  $p^k$  et  $V_\infty(A) = \bigcup_{k \geq 0} V_k(A)$  le groupe de torsion de  $V(A)$ .

PROPOSITION 1. - Le sous-espace de  $E$  engendré par  $V_\infty(A)$  est dense dans  $E$ .

C'est à peu près immédiat : il suffit en effet de le montrer pour  $s = 1$ , et de l'en déduire pour  $s > 1$  par produit tensoriel complété. Or, pour  $s = 1$  et  $A = \mathbb{Z}_p$ , soit

$$\theta \in V_k(\mathbb{Z}_p), \quad \theta \notin V_{k-1}(\mathbb{Z}_p)$$

et soit  $\chi_{k,\alpha}(x)$  la fonction caractéristique de  $\alpha + p^k \mathbb{Z}_p$ . On a

$$(1) \quad \chi_{k,0}(x) = \frac{1}{p^k} [1 + \theta(x) + \theta(2x) + \dots + \theta((p^k - 1)x)]$$

et

$$(2) \quad \chi_{k,\alpha}(x) = \chi_{k,0}(x - \alpha).$$

Donc le sous-espace engendré par  $V_k$  est l'espace  $E_k$  des fonctions "constantes par classes mod  $p^k$ ", d'où la densité.

## 2. Algèbre des mesures.

Nous appellerons espace des mesures sur  $A$  l'espace  $E'$  des formes linéaires continues sur  $E$ .

Si  $\mu \in E'$  et  $f \in E$ , nous noterons  $(\mu|f)$  ou  $\int_A f(x) d\mu(x)$  la valeur de  $\mu$  sur  $f$ .

PRODUIT TENSORIEL. - Si  $\mu$  et  $\nu \in E'$ , leur produit tensoriel  $\mu \hat{\otimes} \nu$  est une  
forme linéaire continue sur  $E \otimes E \simeq C(A \times A, K)$  définie selon l'habitude par

$$\int_{A \times A} f(x) g(y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int_A f(x) d\mu(x) \int_A g(y) d\mu(y),$$

et prolongée par continuité. Si  $\varphi(x, y) \in C(A \times A, K)$ , nous noterons

$$(\mu \otimes \nu | \varphi) = \int_{A \times A} \varphi(x, y) d\mu(x) d\nu(y) .$$

PRODUIT DE CONVOLUTION. - Soient  $\mu$  et  $\nu \in E'$ , leur produit de convolution  $\mu \star \nu \in E'$  est défini par

$$(\mu \star \nu | f) = \int_{A \times A} f(x + y) d\mu(x) d\nu(y) .$$

Il est clair que ceci munit  $E'$  d'une structure d'algèbre de Banach commutative unitaire sur  $K$ .

Si  $\alpha \in A$ , soit  $\delta_\alpha \in E'$  la "distribution de Dirac en  $\alpha$ " définie par  $(\delta_\alpha | f) = f(\alpha)$ ,  $\forall f \in E$ . L'unité du produit de convolution est  $\delta_0$ . On a aussi  $\delta_\alpha \star \delta_\beta = \delta_{\alpha+\beta}$ , et le sous-espace fermé  $\Delta'$  de  $E'$ , admettant  $(\delta_\alpha)_{\alpha \in A}$  comme base normale, espace des "distributions", est une sous-algèbre.

### 3. Convolution et caractères.

Soient  $\theta \in V(A)$ ,  $\mu$  et  $\nu \in E'$ , on a

$$(\mu \star \nu | \theta) = (\mu | \theta)(\nu | \theta) .$$

L'algèbre  $E'$  est ainsi une sous-algèbre de l'algèbre  $\mathcal{B}(V(A))$  des fonctions bornées sur  $V(A)$  et à valeurs dans  $\hat{\Omega}_p$ .

Soient  $X = (X_1, \dots, X_s)$  des indéterminées, et soit  $w_s$  le groupe analytique sur  $\hat{\Omega}_p$  défini par la loi

$$(X, Y) \rightarrow (X_i + Y_i - X_i Y_i)_{i=1, \dots, s} .$$

L'algèbre des séries entières restreintes (à coefficients bornés, dans  $\hat{\Omega}_p$ ) définit une algèbre de fonctions analytiques sur  $w_s$  que nous appellerons l'algèbre  $\mathcal{A}_s$  des fonctions strictement analytiques sur  $w_s$ . Il est clair qu'elle s'identifie à une sous-algèbre de  $\mathcal{B}(V^s)$ .

Si  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_s)$  est une base de  $A$  et  $\mu \in E'$ , soit

$$\mu_{n_1, \dots, n_s} = (\mu | \omega_{n_1, \dots, n_s}) .$$

Alors

$$(\mu | \theta) = \sum_{(n_1, \dots, n_s) \geq 0} \mu_{n_1, \dots, n_s} (\theta_1 - 1)^{n_1} \dots (\theta_s - 1)^{n_s} .$$

Si nous appelons algèbre des fonctions analytiques sur  $V(A)$  la sous-algèbre des  $\mathcal{B}(V(A))$  image de  $\mathcal{A}_s$  dans l'isomorphisme ci-dessus, défini entre  $V(A)$  et  $V^s$  (il est immédiat que cette image est indépendante de l'isomorphisme choisi, c'est-

à-dire de la base  $\omega$ ), nous voyons que l'algèbre  $E'$  est l'algèbre des fonctions analytiques sur  $V(A)$ .

Si  $\alpha = \alpha_1 \omega_1 + \dots + \alpha_s \omega_s \in A$  ( $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ ),  $\delta_\alpha$  est l'image de

$$\varphi_\alpha(X) = \sum_{(n_1, \dots, n_s) \geq 0} \binom{\alpha_1}{n_1} \dots \binom{\alpha_s}{n_s} X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s}$$

et la sous-algèbre  $\Delta'$  de  $E'$  est isomorphe à la sous-algèbre ayant  $(\varphi_\alpha(X))_{\alpha \in A}$  comme base normale.

Remarquons que tous les isomorphismes ci-dessus sont isométriques, étant entendu que les normes "naturelles" des algèbres envisagées sont :

- le sup des coefficients pour les séries formelles restreintes ;
- la norme de la convergence uniforme sur  $V(A)$  (resp.  $V^S$ ) pour les fonctions bornées sur  $V(A)$  (resp.  $V^S$ ) ;
- la norme habituelle  $\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |(\mu|f)|$  dans  $E'$ .

Soit  $E'_0 = \{\mu \in E' \mid \|\mu\| \leq 1\}$ , il résulte trivialement des isomorphismes ci-dessus que

$$(a) \quad \|\mu \star \nu\| = \|\mu\| \|\nu\| ;$$

$$(b) \quad \|\mu\| = \sup_{\theta \in V(A)} |(\mu|\theta)| ;$$

$$(c) \quad \mu \star E'_0 = E'_0 \Leftrightarrow \inf_{\theta \in V(A)} |(\mu|\theta)| > 0 \Leftrightarrow \|\mu\| = |(\mu|\theta_0)| ;$$

$$(d) \quad |(\mu|\theta_0)| < \|\mu\| \Rightarrow \exists! \lambda \in E' \text{ telle que } \lambda \star (\delta_0 - \mu) = \delta_0, \lambda \text{ étant la limite faible de } \lambda_n = \delta_0 + \mu + \mu \star \mu + \dots + \star^n \mu.$$

#### 4. Sous-algèbres de convolution et prolongement analytique.

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons à  $s = 1$ ,  $A = \mathbb{Z}_p$ , pour alléger les notations.

Si  $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ , soit  $\chi_{k,\alpha}(x)$  la fonction caractéristique de  $\alpha + p^k \mathbb{Z}_p$ . Soit  $\mu \in E'$  ; si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu|\chi_{n,\alpha})$  existe, nous dirons que c'est la masse de  $\mu$  en  $\alpha$ , et nous la noterons  $m_\mu(\alpha)$ .

Nous noterons  $M'$  le sous-espace de  $E'$  constitué des mesures ayant une masse en tout point de  $\mathbb{Z}_p$ .

Soit  $\delta = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_p} \lambda_\alpha \delta_\alpha \in \Delta'$  ( $\lambda_\alpha \rightarrow 0$  suivant le filtre des complémentaires des parties finies de  $\mathbb{Z}_p$ , ou encore  $\lambda_\alpha$  sommable) : alors  $\delta \in M'$  et

$$m_{\delta}(\alpha) = \lambda_{\alpha} .$$

Si  $\mu \in M'$ , elle définit une "fonction masse"  $m_{\mu}(\alpha)$  qui est bornée : on voit aisément que cette application est un isomorphisme isométrique de  $M'$  sur un sous-espace fermé de l'espace des fonctions bornées muni de la norme de la convergence uniforme.

Si  $\mu \in E'$ , soient  $Q_n(x) = \binom{X}{n}$ ,  $\mu_n = (\mu|Q_n)$  et

$$\varphi_{\mu}(X) = \sum_{n \geq 0} \mu_n X^n .$$

Soit  $V_k$  le groupe des racines  $p^k$ -ièmes de l'unité. On a, d'après (1) et (2) :

$$(3) \quad (\mu|X_{k,0}) = \frac{1}{p^k} \sum_{u \in V_k} \varphi_{\mu}(u-1)$$

$$(4) \quad (\mu|X_{k,\alpha}) = \frac{1}{p^k} \sum_{u \in V_k} (u-1)^{-\alpha} \varphi_{\mu}(u-1) .$$

Soit  $\varphi_{\mu}^k(X)$  le polynôme de degré  $p^k - 1$  défini par

$$\varphi_{\mu}^k(u-1) = \varphi_{\mu}(u-1) \quad \text{pour } u \in V_k .$$

De (3) et (4), on déduit que

$$\varphi_{\mu}^{(k)}(X) = \sum_{j=0}^{p^k-1} (\mu|X_{k,j}) (1+X)^j .$$

Si  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\sim p}$ , définissons l'entier  $\alpha_j$  par  $0 \leq \alpha_j < p^j$  et  $\alpha - \alpha_j \in p^j \mathbb{Z}_{\sim p}$ , et posons

$$T_{\mu}^{(k)}(Y) = \varphi_{\mu}^{(k)}(Y-1) = \sum_{j=0}^{p^k-1} (\mu|X_{k,j}) Y^j .$$

Dire que  $\mu \in M'$  équivaut donc à dire que

(a) la suite  $T_{\mu}^{(k)}(Y)$  converge, coefficient par coefficient, vers une série

$$T_{\mu}(Y) = \sum_{n \geq 0} m_{\mu}(n) Y^n$$

(b) si  $(\mu|X_{k,j}) = t_{k,j}$ , soit

$$T_{\mu}^{(k)}(Y) = \sum_{j=0}^{p^k-1} t_{k,j} Y^j ,$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\sim p}$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} t_{k,\alpha_j} = m_{\mu}(\alpha) .$$

Il est clair qu'il s'agit là d'une propriété de "prolongeabilité" pour la série  $\varphi_{\mu}(X)$ , prolongeabilité simultanée pour plusieurs matrices de sommation au sens de J. HILY [2].

### Questions.

1.  $M'$  est-il une sous-algèbre de  $E'$  ? Autrement dit, le produit de deux fonctions "prolongeables" au sens précédent est-il prolongeable ?

2. On trouve assez facilement, par des considérations directes sur la définition de  $M'$ , des propriétés de  $m_{\mu}(\alpha)$  telles que :  $m_{\mu}(\alpha)$  est presque partout nulle (pour la mesure de Haar), partout discontinue, etc. ; ces propriétés ont-elles une expression raisonnable en termes de prolongement analytique ?

3. Peut-on construire une base normale "relativement naturelle" de  $M'$  ?

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).
- [2] HILY (Jacques). - Papiers non publiés.
-