

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN FRESNEL

Congruences entre les nombres de Bernoulli

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965),
exp. n° 14, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A5_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONGRUENCES ENTRE LES NOMBRES DE BERNOULLI

par Jean FRESNEL

1. Introduction.

Les nombres de Bernoulli sont liés par la congruence de Kummer ([1], chapitre 14) suivante :

Si p est un nombre premier, si $n - 1 \geq k$, $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$,

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{b_{n+j(p-1)}}{n+j(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^k}.$$

Nous obtenons comme cas particulier :

$$\frac{b_n}{n} \equiv \frac{b_{n+(p-1)}}{n+(p-1)} \pmod{p} \quad \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Nous avons généralisé (théorème 1 si $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$, et théorème 2 si $n \equiv 0 \pmod{p-1}$) cette relation en une congruence $\pmod{p^k}$.

Il s'avère en fait que la recherche de congruences sur les nombres de Bernoulli B_{χ}^n , relatifs à un caractère χ , est plus aisée que celle sur les nombres de Bernoulli ordinaires. C'est pourquoi nous introduirons au paragraphe 2 un caractère θ de conducteur p (si $p \neq 2$, sinon de conducteur 4).

Alors les congruences entre les nombres de Bernoulli ordinaires s'obtiendront trivialement en remplaçant, dans les relations, χ par le caractère χ_0 de conducteur 1 (théorème 1' et théorème 2').

2. Le caractère θ .

(a) Définition des caractères. - Soient \mathbb{Z} l'anneau des entiers naturels, \mathbb{Q}_p le corps p -adique élémentaire, \mathbb{Z}_p son anneau de valuation, et Ω_p la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p .

Soit U le groupe des racines de l'unité, plongé dans Ω_p . Le corps Ω_p sera muni de la valuation ω , normalisée par $\omega(p) = 1$.

Soit $(\mathbb{Z}/m)^*$ le groupe multiplicatif des entiers modulo m , premiers avec m . Un caractère χ de $(\mathbb{Z}/m)^*$ est un homomorphisme de ce groupe dans U . En fait, χ sera considéré comme une application de \mathbb{Z} dans Ω_p définie par :

$$\begin{aligned} \chi(a) &= 0 && \text{si } (a, m) \neq 1, \\ \chi(a) &= \chi(\bar{a}) && \text{si } (a, m) = 1, \bar{a} = \text{classe de } a \text{ mod } m. \end{aligned}$$

L'entier m est le conducteur de χ , et nous le noterons $f(\chi)$ ou f .

Nous noterons par $\text{car}(\mathbb{Z}/m)^*$ le groupe des caractères de $(\mathbb{Z}/m)^*$, et par χ_0 l'élément neutre de ce groupe.

(b) Définition du caractère θ . - Si $p \neq 2$, posons $\theta(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^n}$ (limite p -adique), $\theta(a)$ est le représentant multiplicatif de \bar{a} (classe de $a \text{ mod } p$), ainsi $(\theta(a))^p = \theta(a)$. Le caractère θ est de conducteur p et engendre un groupe cyclique d'ordre $p - 1$.

Si $p = 2$, posons :

$$\begin{aligned} \theta(a) &= 1 && \text{si } a \equiv 1 \pmod{4}, \\ \theta(a) &= -1 && \text{si } a \equiv -1 \pmod{4}, \\ \theta(a) &= 0 && \text{si } 2 \text{ divise } a. \end{aligned}$$

θ est un caractère de conducteur 4 et engendre un groupe cyclique d'ordre 2. θ^2 est le caractère identique de conducteur 2.

3. Les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère.

(a) Définition. - Les nombres de Bernoulli relatifs à un caractère χ sont définis comme les coefficients B_{χ}^n de la série formelle :

$$(1) \quad \sum_{\mu=1}^{f(\chi)} \chi(\mu) \frac{te^{\mu t}}{e^{f t} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{\chi}^n \frac{t^n}{n!}.$$

(b) Relation de récurrence. - Soit λ un entier positif :

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda f} \chi(\mu) \frac{te^{\mu t}}{e^{\lambda f t} - 1} = \sum_{\mu=1}^f \chi(\mu) te^{\mu t} \left(\frac{1 + e^{f t} + \dots + e^{(\lambda-1) f t}}{e^{\lambda f t} - 1} \right) = \sum_{\mu=1}^f \chi(\mu) \frac{te^{\mu t}}{e^{f t} - 1},$$

par conséquent :

$$(2) \quad \sum_{\mu=1}^{\lambda f} \chi(\mu) te^{\mu t} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{\chi}^n \frac{t^n}{n!} \right) (e^{\lambda f t} - 1),$$

$$(3) \quad \frac{(B_{\chi} + \lambda f)^{n+1} - B_{\chi}^{n+1}}{n+1} = \sum_{\mu=1}^{\lambda f} \chi(\mu) \mu^n, \quad \forall \lambda \text{ entier positif}.$$

La notation $(B_{\chi} + \lambda f)^{n+1}$ signifie

$$(B_{\chi} + \lambda f)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_{\chi}^i (\lambda f)^{n+1-i} .$$

(c) Parité.

$$\sum_{\mu=1}^f \frac{-\chi(\mu) te^{-\mu t}}{e^{-ft} - 1} = \sum_{\mu'=0}^{f-1} \frac{\chi(f - \mu') te^{\mu' t}}{e^{ft} - 1} = \sum_{\mu'=1}^f \frac{\chi(-\mu') te^{\mu' t}}{e^{ft} - 1} \quad \text{si } \chi \neq \chi_0 .$$

Si χ est pair ($\chi \neq \chi_0$ tel que $f(\chi_0) = 1$), $B_{\chi}^n = 0$ si n est impair.

Si χ est impair, $B_{\chi}^n = 0$ si n est pair.

Si $\chi = \chi_0$ et $f(\chi_0) = 1$, $B_{\chi}^n = 0$ si n est impair et $n > 1$.

Lorsqu'un nombre premier p figurera dans une relation, il sera implicite que le caractère θ utilisé sera celui relatif à ce nombre premier défini au paragraphe 2.

PROPOSITION 1. - Pour tout entier n non négatif,

$$B_{\chi\theta}^n = B_{\chi}^n (1 - \chi(p) p^{n-1}) .$$

Preuve.

Si p divise $f(\chi)$, $\chi\theta^0 = \chi$ et $\chi(p) = 0$, la proposition est triviale.

Si p ne divise pas $f(\chi)$, $\chi\theta^0$ a pour conducteur pf , et nous écrivons alors la relation (2) de définition des nombres de Bernoulli $B_{\chi\theta^0}^n$:

$$\sum_{\mu=1}^{pf} \chi\theta^0(\mu) \frac{te^{\mu t}}{e^{pft} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{\chi\theta^0}^n \frac{t^n}{n!} ,$$

$$\text{or, } \sum_{\mu=1}^{pf} \chi\theta^0(\mu) \frac{te^{\mu t}}{e^{pft} - 1} = \sum_{\mu=1}^{pf} \frac{\chi(\mu) te^{\mu t}}{e^{pft} - 1} - \frac{\chi(p)}{p} \sum_{\mu=1}^f \chi(\mu) \frac{(pt) e^{\mu(pt)}}{e^{f(pt)} - 1} .$$

Utilisons les relations (1) et (2),

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{\chi\theta^0}^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{\chi}^n \frac{t^n}{n!} - \frac{\chi(p)}{p} \sum_{n=0}^{\infty} B_{\chi}^n \frac{p^n t^n}{n!} ,$$

Soit $B_{\chi\theta^0}^n = B_{\chi}^n (1 - \chi(p) p^{n-1})$.

4. Congruences entre les nombres de Bernoulli.

PROPOSITION 2. - Si p divise le conducteur du caractère χ , alors

$$\omega(f_B^n_\chi) \geq 0 .$$

Preuve. - La relation (3) se développe sous la forme

$$f_B^n_\chi + \sum_{j=2}^{n+1} \binom{n}{j-1} \frac{f^{j-1}}{j} (f_B^{n-j+1}_\chi) = \sum_{\mu=1}^f \chi(\mu) \mu^n .$$

La démonstration par récurrence est immédiate, puisque $\omega(\frac{f^{j-1}}{j}) \geq 0$.

NOTATION. - Posons

$$S_\chi^n(fp^k) = \sum_{\mu=1}^{fp^k} \chi(\mu) \mu^n .$$

k est un entier non négatif.

PROPOSITION 3. - Si p divise $f(\chi)$, si $\alpha = \omega(f)$, si $p > 3$, $k \geq 0$,

$$\frac{B_\chi^n}{n} \equiv \frac{S_\chi^n(fp^k)}{n \cdot f \cdot p^k} \pmod{p^{k+\alpha}} .$$

La relation reste vraie pour $p = 2$ et $p = 3$, si $k \geq 1$.

Preuve. - La relation (3) se développe sous la forme

$$\frac{B_\chi^n}{n} + \sum_{j=3}^{n+1} \binom{n}{j-2} \frac{f^{j-3} p^{(j-2)k}}{(j-1)j} (f_B^{n-j+1}_\chi) fp^k = \frac{S_\chi^n(fp^k)}{n \cdot f \cdot p^k} .$$

Il suffit alors de remarquer que $\omega(\frac{f^{j-3} p^{(j-2)k}}{(j-1)j}) \geq 0$ pour $3 \leq j \leq n+1$, et d'utiliser la proposition 2.

PROPOSITION 4. - Si p divise $f(\chi)$, si m est entier et $(m, f) = 1$, si $k \geq 1$ et si $\alpha = \omega(f)$,

$$\text{pour } p \neq 2 : (\chi(m) m^n - 1) \frac{B_\chi^n}{n} \equiv \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a) g_a a^{n-1} \pmod{p^{k+\alpha}} ,$$

$$\text{pour } p = 2 : (\chi(m) m^n - 1) \frac{B_\chi^n}{n} \equiv \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a) g_a a^{n-1} \pmod{p^{k+\alpha-1}} ,$$

$g_a \equiv -\frac{a}{fp^k} \pmod{m}$, g_a est entier et $0 \leq g_a < m$.

Preuve.

$$\{1, 2, \dots, fp^k\} = \left\{ \frac{g_a fp^k + a}{m} \right\}_{1 \leq a \leq fp^k};$$

en effet : $0 < \frac{g_a fp^k + a}{m} \leq fp^k$ et $\frac{g_a fp^k + a}{m} \in \mathbb{Z}$, et l'application $a \rightarrow \frac{g_a fp^k + a}{m}$ est injective et par conséquent surjective.

$$S_{\chi}^n(fp^k) = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a) a^n = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi\left(\frac{g_a fp^k + a}{m}\right) \left(\frac{g_a fp^k + a}{m}\right)^n,$$

soit

$$\chi(m) m^n S_{\chi}^n(fp^k) = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a) (a + g_a fp^k)^n,$$

et

$$(\chi(m) m^n - 1) \frac{S_{\chi}^n(fp^k)}{n \cdot f \cdot p^k} = \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a) a^{n-1} g_a + \sum_{j=2}^n \frac{\binom{n}{j} f^{j-1} p^{(j-1)k}}{n} \left(\sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a) a^{n-j} g_a^j \right),$$

or,

$$\frac{\binom{n}{j}}{n} f^{j-1} p^{(j-1)k} = \binom{n}{j-1} \frac{f^{j-2} p^{(j-2)k}}{j} fp^k \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+h}} \quad \text{si } p \neq 2, \\ \text{sinon } \pmod{p^{\alpha+k-1}},$$

ainsi,

$$(\chi(m) m^n - 1) \frac{S_{\chi}^n(fp^k)}{n \cdot f \cdot p^k} \equiv \sum_{a=1}^{fp^k} \chi(a) a^{n-1} g_a \pmod{p^{\alpha+h}} \quad \text{si } p \neq 2, \\ \text{sinon } \pmod{p^{\alpha+k-1}}.$$

En utilisant la proposition (3), la relation est démontrée.

THEOREME 1. - Si $n \equiv n' \pmod{p^k}$, $k \geq 0$, si $\chi^{\theta^0} \neq \chi_0$:

(i) Si $p \neq 2$, et si l'ordre de $\chi^{\theta^0} \neq p^{\alpha}$, alors

$$\frac{B^n}{\chi^{\theta^0-n}} \equiv \frac{B^{n'}}{\chi^{\theta^0-n'}} \pmod{p^{k+1}}.$$

(ii) Si $p \neq 2$ et 3, si l'ordre de $\chi^{\theta^0} = p^{\alpha}$, si $f(\chi^{\theta^0}) = f_0 p^r$, $(f_0, p) = 1$, si $\chi^{\theta^0} = \chi_1 \cdot \chi_2$, où $\chi_1 \in \text{car}(\mathbb{Z}/p^r)^*$ et $\chi_2 \in \text{car}(\mathbb{Z}/f_0)^*$, si $\chi_2 \neq \chi_0$, alors

$$\frac{B^n}{\chi^{\theta^0-n}} \equiv \frac{B^{n'}}{\chi^{\theta^0-n'}} \pmod{p^{k+1}}.$$

(iii) Si $p \neq 2$, si l'ordre de $\chi^\theta^0 = p^\nu$, si $\chi^\theta^0 = \chi_1 \chi_0$, $\chi_1 \in \text{car}(\mathbb{Z}/p^r)^*$, $\chi_0 \in \text{car}(\mathbb{Z}/f_0)^*$, alors

$$\frac{B^n}{\chi^\theta^{-n}} \equiv \frac{B^{n'}}{\chi^\theta^{-n'}} \pmod{p^{k+1-(2/\varphi(p^\nu))}} .$$

(iv) Si $p = 2$,

$$\frac{B^n}{\chi^\theta^{-n}} \equiv \frac{B^{n'}}{\chi^\theta^{-n'}} \pmod{p^k} .$$

Preuve.

(i) Utilisons la proposition 4 pour n et n' , χ^θ^0 , $\pmod{p^{k+2}}$, et soustrayons membre à membre, il vient :

$$(4) \quad (\chi^\theta^0(m) \left(\frac{m}{\theta(m)}\right)^n - 1) \left(\frac{B^n}{\chi^\theta^{-n}} - \frac{B^{n'}}{\chi^\theta^{-n'}}\right) + \chi^\theta^0(m) \left(\frac{m}{\theta(m)}\right)^n \left(1 - \left(\frac{m}{\theta(m)}\right)^{n'-n}\right) \frac{B^{n'}}{\chi^\theta^{-n'}} \\ \equiv \sum_{a=1}^{fp^{k+2}} \chi^\theta^{-1}(a) g_a \left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^{n'-n}\right) \pmod{p^{k+2}} .$$

Puisque l'ordre de $\chi^\theta^0 \neq p^\nu$, il existe m tel que $\omega(\chi^\theta^0(m) - 1) = 0$, la proposition 4 montre alors que $\omega\left(\frac{B^n}{\chi^\theta^{-n}}\right) \geq 0$; d'autre part si $(a, p) = 1$, $1 - \left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^{n'-n} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}$, et par conséquent

$$\frac{B^n}{\chi^\theta^{-n}} - \frac{B^{n'}}{\chi^\theta^{-n'}} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}} .$$

(ii) Il existe m_0 , tel que $\chi_2(m_0) \neq 1$, pour tout k tel que

$$(m_0 + kf_0, p) = 1 ,$$

$$\chi_1 \chi_2(m_0 + kf_0) = \chi_1(m_0 + kf_0) \cdot \chi_2(m_0) \neq 1 .$$

Comme $(f_0, p) = 1$, chaque classe modulo f_0 est dense dans \mathbb{Z}_p ; ainsi il existe k tel que $m_0 + kf_0$ soit aussi proche que l'on veut de $\theta(m_0)$. En posant $m = m_0 + kf_0$, $\omega\left(\frac{m}{\theta(m)} - 1\right)$ est aussi grande que l'on veut.

Par suite, la relation (4) peut s'écrire :

$$(\chi^\theta^0(m) \left(\frac{m}{\theta(m)}\right)^n - 1) \left(\frac{B^n}{\chi^\theta^{-n}} - \frac{B^{n'}}{\chi^\theta^{-n'}}\right) \equiv \sum_{a=1}^{fp^{k+2}} \chi^\theta^{-1}(a) g_a \left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{a}{\theta(a)}\right)^{n'-n}\right) \pmod{p^{k+2}} .$$

Posons $\frac{a}{\theta(a)} = 1 + p\psi(a)$, $\omega(\psi(a)) \geq 0$, $(a, p) = 1$,

$$\left(\chi^{\theta^0}(m) \left(\frac{m}{\theta(m)}\right)^n - 1\right) \left(\frac{\chi^{\theta^{-n}}}{n} - \frac{\chi^{\theta^{-n'}}}{n'}\right) \equiv (n' - n) \sum_{a=1}^{f_p^{k+2}} \chi^{\theta^{-1}}(a) g_a p\psi(a) \pmod{p^{k+2}}.$$

Utilisons cette même relation pour $n' = 2$ et $n = 1$,

$$\left(\chi^{\theta^0}(m) \frac{m}{\theta(m)} - 1\right) \left(\frac{\chi^{\theta^{-1}}}{1} - \frac{\chi^{\theta^{-2}}}{2}\right) \equiv \sum_{u=1}^{f_p^{k+2}} \chi^{\theta^{-1}}(a) g_a p\psi(a) \pmod{p^{k+2}}.$$

Utilisons la proposition 3 pour $n = 1$ et 2 , $k = 0$, et soustrayons membre à membre :

$$\frac{\chi^{\theta^{-2}}}{2} - \frac{\chi^{\theta^{-1}}}{1} \equiv p^2 \sum_{u=1}^{p^r f_0} \frac{\chi_1 \chi_2(u) \psi^2(u)}{2f_0 p^r} \pmod{p},$$

or

$$p \frac{\chi_1 \chi_2(u + \lambda f_0 p^r) \psi^2(u + \lambda f_0 p^r)}{2f_0 p^r} \equiv p \frac{\chi_1 \chi_2(u) \psi^2(u)}{2f_0 p^r} \pmod{p^0},$$

par conséquent

$$p \sum_{u=1}^{f_0 p^r} \frac{\chi_1 \chi_2(u) \psi^2(u)}{2f_0 p^r} \equiv p \sum_{u \in (\mathbb{Z}/p)^*} \frac{\chi_1 \chi_2(u) \psi^2(u)}{2f_0 p^r} \\ \equiv p \sum_{u_1 \in (\mathbb{Z}/p^r)^*} \chi_1(u_1) \frac{\psi^2(m)}{2f_0 p^r} \sum_{u_2 \in (\mathbb{Z}/f_0)^*} \chi_2(u_2) \equiv 0 \pmod{p^0},$$

car $\chi_2 \neq \chi_0$ implique $\sum_{u_2 \in (\mathbb{Z}/f_0)^*} \chi_2(u_2) = 0$, ainsi $\frac{\chi^{\theta^{-2}}}{2} - \frac{\chi^{\theta^{-1}}}{1} \equiv 0 \pmod{p}$,
et alors

$$\sum_{u=1}^{f_p^{k+2}} \frac{\chi^{\theta^{-1}}(a) g_a p\psi(a)}{\chi^{\theta^0}(m) \left(\frac{m}{\theta(m)}\right)^n - 1} \equiv 0 \pmod{p}$$

et

$$\frac{\chi^{\theta^{-n}}}{n} - \frac{\chi^{\theta^{-n'}}}{n'} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}.$$

(iii) Il existe m tel que $\chi^0(m)$ soit une racine primitive p^k -ième de l'unité, alors

$$\omega(\chi^0(m) - 1) = \frac{1}{\varphi(p^k)}, \quad \varphi \text{ étant l'indicateur d'Euler.}$$

La proposition 4 montre que $\omega\left(\frac{B^{n'} \chi^0(-n')}{n'}\right) \geq -\frac{1}{\varphi(p^k)}$, et la relation (4) prouve que

$$\frac{B^n \chi^0(-n)}{n} - \frac{B^{n'} \chi^0(-n')}{n'} \equiv 0 \pmod{p^{k+1} - (2/\varphi(p^k))}.$$

(iv) Il existe m tel que $\omega(\chi^0(m) - 1) \geq -1$, mais $\frac{a}{\vartheta(a)} \equiv 1 \pmod{4}$, par conséquent la relation (4) montre que

$$\frac{B^n \chi^0(-n)}{n} \equiv \frac{B^{n'} \chi^0(-n')}{n'} \pmod{p^k}.$$

La proposition 1 va nous permettre de revenir aux nombres de Bernoulli B_{χ}^n sans faire usage du caractère auxiliaire θ . Le théorème 1 peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

THÉORÈME 1'. - Si $\chi^0 \neq \chi_0$, si $n \equiv n' \pmod{p^k(p-1)}$, $k \geq 0$:

(i) Si $p \neq 2$, si l'ordre de $\chi^0 \neq p^k$, alors

$$\frac{B^n \chi^0(-n)}{n} \equiv \frac{B^{n'} \chi^0(-n')}{n'} \pmod{p^{k+1}}.$$

(ii) Si $p \neq 2$ et 3, si l'ordre de $\chi^0 = p^k$, si $f(\chi^0) = f_0 p^r$, $(f_0, p) = 1$, si $\chi^0 = \chi_1 \cdot \chi_2$, où $\chi_1 \in \text{car}(\mathbb{Z}/p^r)^*$ et $\chi_2 \in \text{car}(\mathbb{Z}/f_0)^*$, si $\chi_2 \neq \chi_0$, alors

$$\frac{B^n \chi^0(-n)}{n} \equiv \frac{B^{n'} \chi^0(-n')}{n'} \pmod{p^{k+1}}.$$

(iii) Si $p \neq 2$, si l'ordre de $\chi^0 = p^k$, si $\chi^0 = \chi_1 \cdot \chi_0$, $\chi_1 \in \text{car}(\mathbb{Z}/p^r)^*$, $\chi_0 \in \text{car}(\mathbb{Z}/f_0)^*$, alors

$$\frac{B^n \chi^0(-n)}{n} \equiv \frac{B^{n'} \chi^0(-n')}{n'} \pmod{p^{k+1} - (2/\varphi(p^k))}.$$

(iv) Si $p = 2$, si $k \geq 1$,

$$\frac{B^n \chi^0(-n)}{n} \equiv \frac{B^{n'} \chi^0(-n')}{n'} \pmod{p^k}.$$

Preuve. - Appliquons le théorème 1 pour $\chi\theta^n \neq \chi_0$, alors $\chi\theta^n \theta^{-n} = \chi\theta^0$ et $\chi\theta^n \theta^{-n'} = \chi\theta^0$, et nous utilisons la proposition 1;

Remarque. - En général, si $n' > n$, le terme $\frac{B_{\chi}^{n'}}{n'} \chi(p) p^{n'-1}$ disparaît.

Cherchons, maintenant, l'analogie du théorème 1 lorsque $\chi\theta^0 = \chi_0$. Remarquons que le conducteur f de χ_0 est sans facteurs carrés, ainsi $f = p \cdot f_1$, $(f_1, p) = 1$.

LEMME 1. - Si $p > 3$, si $n \equiv n' \pmod{p^k}$, si $n < n'$ et si $3 \leq j \leq n$:

$$\frac{\binom{n'+1}{j} p^{j-2}}{(n'+1)n'} \equiv \frac{\binom{n+1}{j} p^{j-2}}{(n+1)n} \pmod{p^{k+1}} ;$$

pour $p = 2$ et $p = 3$, la relation reste vraie $\pmod{p^k}$.

Preuve.

$$\begin{aligned} (n' - 1)(n' - 2) \dots (n' - j + 2) \frac{p \cdot p^{j-3}}{j!} &\equiv (n - 1)(n - 2) \dots (n - j + 2) \frac{p \cdot p^{j-3}}{j!} \\ &= \frac{\binom{n+j}{j}}{(n+1)n} p^{j-2} \pmod{p^{k+1}} . \end{aligned}$$

LEMME 2. - Si $p > 3$, $n' \equiv n \pmod{p^k}$, $n < n'$, et $j > n + 1$:

$$\frac{\binom{n'+1}{j}}{(n'+1)n'} p^{j-2} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}} ;$$

pour $p = 2$ et $p = 3$, la relation reste vraie $\pmod{p^k}$.

Preuve.

$$\frac{\binom{n'+1}{j}}{(n'+1)n'} = (n'-1)(n'-2)\dots(n'-n+1)(n'-n-1)\dots(n'-j+2)(n'-n) \frac{p \cdot p^{j-3}}{j!} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}} .$$

PROPOSITION 5. - Si $n > 0$, si $\chi\theta^0 = \chi_0$,

$$\omega\left(\frac{B_{\chi}^n}{\chi\theta^{-n}} + \frac{\varphi(f)}{f}\right) \geq 0 \quad \text{et} \quad B_{\chi\theta^0}^0 = \frac{\varphi(f)}{f} .$$

Preuve. - $n = n_1 p^k$, $(n_1, p) = 1$. La relation (3) se développe sous la forme

$$B_{\chi\theta^{-n}}^n + \sum_{i=3}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{i}}{n+1} f^{i-1} B_{\chi\theta^{-n}}^{n-i+1} = \sum_{u=1}^f \frac{\chi\theta^0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^n}{f} ,$$

$$\frac{\binom{n+1}{i}}{n+1} f^{i-1} B_{\chi^\theta}^{n-i+1} = \frac{\binom{n-1}{i-2}}{(i-1)i} f^{i-2} (f B_{\chi^\theta}^{n-i+1})_n \equiv 0 \pmod{p^k}, \quad \text{si } 3 \leq i \leq n+1,$$

$$\chi_0(u) \frac{u}{\theta(u)} \equiv \chi_0(u) \pmod{p} \quad \chi_0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^n \equiv \chi_0(u) \pmod{p^{k+1}}.$$

Par conséquent

$$B_{\chi^\theta}^n \equiv \frac{\varphi(f)}{f} \pmod{p^k}.$$

Si $p = 2$, la démonstration est identique, en remarquant que θ est un caractère de conducteur 4 et que $\chi_0(u) \frac{u}{\theta(u)} \equiv \chi_0(u) \pmod{4}$.

THÉORÈME 2. - Si $p > 3$, si $n' \equiv n \pmod{p^k}$, $k \geq 0$, si $\chi^\theta = \chi_0$:

$$\frac{B_{\chi^\theta}^n + \frac{\varphi(f)}{f}}{n} \equiv \frac{B_{\chi^\theta}^{n'} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n'} \pmod{p^{k+1}};$$

si $p = 2$ et $p = 3$, la relation reste vraie $\pmod{p^k}$.

Preuve. - Supposons $n < n'$, et posons $n = \alpha + \mu(p-1)$ et $n' = \alpha' + \mu'(p-1)$, $1 \leq \alpha \leq p-1$ et $1 \leq \alpha' \leq p-1$. Si $\mu > 0$, supposons que

$$\frac{B_{\chi^\theta}^{n-b(p-1)} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n-b(p-1)} \equiv \frac{B_{\chi^\theta}^{n'-b(p-1)} + \frac{\varphi(f)}{f}}{n'-b(p-1)} \pmod{p^{k+1}}, \quad 1 \leq b \leq \mu.$$

D'autre part, si $j \not\equiv 0 \pmod{p-1}$, $n-j \not\equiv \alpha \pmod{p-1}$, et le théorème 1 (i) est applicable,

$$\frac{B_{\chi^\theta}^{n-j}}{n-j} \equiv \frac{B_{\chi^\theta}^{n'-j}}{n'-j} \pmod{p^{k+1}},$$

soit

$$(5) \quad B_{\chi^\theta}^{n-j} \equiv B_{\chi^\theta}^{n'-j} \pmod{p^k}, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Utilisant la relation (3) pour n et n' , et soustrayant membre à membre, en tenant compte des lemmes 1 et 2, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{B_{\chi^\theta}^{n'}}{n'} - \frac{B_{\chi^\theta}^n}{n} + \sum_{j=3}^{n+1} \frac{\binom{n+1}{j}}{(n+1)n} f^{j-1} (B_{\chi^\theta}^{n'+1-j} - B_{\chi^\theta}^{n+1-j}) \\ \equiv \sum_{u=1}^f \frac{\chi_0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^{n'}}{f \cdot n'} - \frac{\chi_0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^n}{f \cdot n} \pmod{p^{k+1}}. \end{aligned}$$

D'autre part, utilisons la relation (5),

$$\frac{\binom{n+1}{j}}{(n+1)n} f^{j-1} (B_{\chi\theta^{-\alpha}}^{n'+1-j} - B_{\chi\theta^{-\alpha}}^{n+1-j}) = \frac{\binom{n-1}{j-2}}{(j-1)j} f^{j-1} (B_{\chi\theta^{-\alpha}}^{n'+1-j} - B_{\chi\theta^{-\alpha}}^{n+1-j}) \equiv 0 \pmod{p^{k+1}},$$

nous obtenons alors

$$\frac{B_{\chi\theta^{-\alpha}}^{n'}}{n'} - \frac{B_{\chi\theta^{-\alpha}}^n}{n} \equiv \sum_{u=1}^f \frac{\chi_0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^{n'}}{f \cdot n'} - \frac{\chi_0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^n}{f \cdot n} \pmod{p^{k+1}}.$$

Posons $\frac{u}{\theta(u)} = 1 + p\psi(u)$, si $(u, p) = 1$. Remarquons que

$$\frac{\binom{n'}{j} p^j}{f \cdot n'} \equiv \frac{\binom{n}{j} p^j}{f \cdot n} \pmod{p^{k+1}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$\frac{\binom{n'}{j} p^j}{f \cdot n'} \equiv 0 \pmod{p^{k+1}}, \quad \text{si } j > n,$$

alors

$$\frac{\chi_0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^{n'}}{f \cdot n'} - \frac{\chi_0(u) \left(\frac{u}{\theta(u)}\right)^n}{f \cdot n} \equiv \frac{\chi_0(u)}{f \cdot n'} - \frac{\chi_0(u)}{f \cdot n} \pmod{p^{k+1}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{B_{\chi\theta^{-\alpha}}^{n'}}{n'} - \frac{B_{\chi\theta^{-\alpha}}^n}{n} \equiv \frac{\varphi(f)}{f \cdot n'} - \frac{\varphi(f)}{f \cdot n} \pmod{p^{k+1}},$$

et le théorème en découle immédiatement.

THÉORÈME 2'. - Si $p > 3$, si $\chi\theta^n = \chi_0$, si $n' \equiv n \pmod{p^k(p-1)}$, alors

$$\frac{B_{\chi}^n (1 - \chi(p) p^{n-1}) + \frac{\varphi(f)}{f}}{n} \equiv \frac{B_{\chi}^{n'} (1 - \chi(p) p^{n'-1}) + \frac{\varphi(f)}{f}}{n'} \pmod{p^{k+1}}.$$

Si $p = 3$, la relation est vraie $\pmod{p^k}$; si $p = 2$ et $k \geq 1$, la relation est vraie $\pmod{p^k}$.

Preuve. - Il suffit d'utiliser le théorème 2 et la proposition 1.

Remarque. - En général, le terme $\frac{B_{\chi}^{n'}}{n'} \chi(p) p^{n'-1}$ disparaît si $n' > n$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] NIELSEN (Niels). - Traité élémentaire des nombres de Bernoulli. - Paris, Gauthier-Villars, 1923.
 - [2] VANDIVER (H. S.). - On the developments in an arithmetic theory of the Bernoulli and allied numbers, Scripta mathematica, New York, t. 25, 1960, p. 273-303.
-