Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Mendès France

# Quelques remarques sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^p$

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 6, n° 2 (1964-1965), exp. n° 11, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A2_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
6e année, 1964/65, n° 11



22 mars 1965

# QUELQUES REMARQUES SUR LA RÉPARTITION MODULO 1 DE LA SUITE $x\theta^p$

par Michel MENDÈS FRANCE

## 1. Généralités.

On connait divers types de résultats sur la répartition modulo 1 de la suite $x\theta^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Le théorème de Koksma-Weyl affirme que, pour presque tous les couples $(x, \theta)$ $(\theta > 1)$, la suite $x\theta^p$ est équirépartie modulo 1. En sens inverse, on sait que si $\theta$ est un nombre de Pisot et si $x$ appartient au corps algébrique de $\theta$, la suite $x\theta^p$ n'est pas équirépartie modulo 1 : on dira qu'elle est mal répartie. Le but de cet exposé est de donner quelques renseignements sur la répartition de la suite $x\theta^p$ lorsque $x$ est un élément de l'ensemble de Cantor $C(\theta)$ construit sur l'intervalle $[0, 1]$ et à dissection $\frac{1}{\theta}$. On considèrera deux cas selon que $\theta$ est ou non un nombre de Pisot.

Dans tout ce qui suit, $S$ désigne l'ensemble des entiers algébriques plus grands que 1 dont tous les conjugués sont à l'intérieur du cercle unité (nombres de Pisot) [3], [5], [6].

## 2. Résultats obtenus.

Soit $\theta > 2$ un nombre réel, et soit $C(\theta)$ l'ensemble de Cantor à dissection $1/\theta$, construit sur l'intervalle $[0, 1]$. En d'autres termes, $C(\theta)$ est l'ensemble de tous les nombres $x$ de la forme

$$x = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\theta^p},$$

où les $\varepsilon_p$ sont égaux soit à 0, soit à 1.

Considérons le groupe abélien $G = (\underset{\sim}{\mathbb{Z}}/2\underset{\sim}{\mathbb{Z}})^{\underset{\sim}{\mathbb{N}}}$. A chaque élément $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) \in G$ $(\varepsilon_n = 0$ ou $1)$, on peut faire correspondre un élément $x(\varepsilon) \in C(\theta)$ par la formule

$$x(\varepsilon) = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\theta^p}.$$

On munit le groupe $G$ de la topologie discrète, ce qui en fait un groupe compact. La mesure de Haar, normalisée sur $G$, induit une mesure $\mu$ sur l'ensemble de Cantor $C(\theta)$. Appelons alors $\mathcal{P}(\theta)$ l'implication

$$x \in C(\theta) \implies x\theta^p \text{ équirépartie (mod 1) } \mu\text{-presque partout.}$$

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Presque tous les $\theta > 2$ vérifient $\mathcal{P}(\theta)$ .

D'une façon plus précise, on verra d'une part, que si $\theta > 2$ est un nombre réel et si, pour tout entier $k \neq 0$, la série

$$(1) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$$

est convergente, alors l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ est vraie.

D'autre part, on démontrera que la série précédente est convergente pour presque tous les $\theta > 1$ .

Remarque. - On sait qu'une caractérisation de l'ensemble $S$ est la suivante :

$$(2) \qquad \theta \in S \iff \prod_{m=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m$$

est un produit infini convergent [5]. Cela montre que si $\theta$ est un élément de $S$ , alors la série (1) est divergente. Cela nous amène à étudier la répartition de la suite $x\theta^p$ (mod 1) lorsque $\theta \in S$ .

THÉORÈME 2. - Si $\theta > 2$ est un nombre de l'ensemble $S$ , l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ n'a pas lieu.

Ce résultat est précisé par les théorèmes 3 et 4.

THÉORÈME 3 (SALEM, ZYGMUND). - Il existe un entier $\lambda \neq 0$ du corps de $\theta$ ($\theta \in S$ , $\theta > 2$) tel que, pour tout $x$ de $C(\theta)$ , la suite $\lambda x\theta^p$ ($p = 1, 2, \ldots$) ne soit pas équirépartie (mod 1) .

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [3], p. 75-78, ou [8] (voir aussi [1]).

Avant d'énoncer le théorème 4, nous devons introduire de nouvelles notations. On désigne par $[t]$ (resp. $\{t\}$ ) la partie entière (resp. fractionnaire) du nombre réel $t$ . Appelons $E(\theta)$ l'ensemble des nombres $x$ de la forme

$$x = x_\varphi = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(p)\}]}{\theta^p} ,$$

où $\varphi$ est un polynôme réel. Il est bien évident que $E(\theta) \subset C(\theta)$ , que $E(\theta)$ est dense dans $C(\theta)$ et qu'enfin l'intersection de toute portion non vide de $C(\theta)$ avec $E(\theta)$ a la puissance du continu. Toutefois, on peut démontrer que la dimen-

sion de Hausdorff de $E(\theta)$ est nulle, alors qu'il est connu que celle de $C(\theta)$ est positive.

THÉORÈME 4. - $\theta$ étant un nombre de la classe S (non nécessairement supérieur à 2), la suite $x\theta^p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ est mal répartie modulo 1 pour tous les nombres x de l'ensemble $E(\theta)$. De plus, la fermeture $A(x)$ de l'ensemble des points $x\theta^p$ modulo 1 $(p \in \mathbb{N})$ a une dimension de Hausdorff nulle.

Ce théorème et les remarques qui précèdent, généralisent les résultats obtenus dans [4].

Remarque. - En modifiant légèrement la démonstration du théorème 4, on peut facilement démontrer que si $\theta \in S$ a tous ses conjugués dans le cercle $|z| < \frac{1}{2}$, l'implication $\{x \in C(\theta) \Longrightarrow x\theta^p$ mal répartie $\}$ est vraie. En particulier si $\theta > 2$ est une unité quadratique de S, le résultat précédent a lieu (cf. [7], p. 598).

3. Démonstration du théorème 1.

Nous nous appuyons sur quatre lemmes.

LEMME 1. - $\alpha_j$ et $\mu_j$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ étant des nombres réels, l'inégalité suivante

$$\left| \prod_{j=1}^{t} (\mu_j + \cos \alpha_j) \right| \leq \left| \prod_{j=1}^{t} \cos \alpha_j \right| + \prod_{j=1}^{t} (1 + |\beta_j|) - 1$$

a lieu.

(Démonstration évidente.)

Posons

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \exp 2i\pi x\theta^p$$

et

$$I_N(k) = \int_0^1 |\sigma_N(kx)|^2 \, d\mu(x) ,$$

où k est un entier rationnel non nul.

LEMME 2. - Si pour tout entier $k \neq 0$, la série $\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k)$ est convergente, alors la suite $x\theta^p$ est équirépartie modulo 1 pour $\mu$-presque tous les x.

Nous ne rétablirons pas ce résultat dû à DAVENPORT, ERDÖS et LEVEQUE [2].

Remarque. - Supposons que l'on ait mis $I_N(k)$ sous la forme

$$I_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A_n(k) \quad \text{où} \quad A_n(k) \geqslant 0 .$$

Les égalités

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k) \sum_{N=n}^{\infty} \frac{1}{N^2}$$

et

$$\sum_{N=n}^{\infty} \frac{1}{N^2} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

montrent que la condition du lemme 2 s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} A_n(k) < \infty \quad \text{pour tout entier} \quad k \neq 0 .$$

LEMME 3. - $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right| < \infty \implies \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} I_N(k) < \infty .$

En effet, la formule classique [3] :

$$(3) \qquad \int_0^1 e^{2i\pi ux} \, d\mu(x) = e^{i\pi u} \prod_{j=1}^{\infty} \cos \pi(1 - \frac{1}{\theta}) \frac{u}{\theta^{j-1}}$$

montre que l'on a :

$$I_N(k) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leqslant q < p \leqslant N} \cos \pi k(\theta^p - \theta^q) \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k(\theta^p - \theta^q)(1 - \frac{1}{\theta}) \frac{1}{\theta^j} .$$

Appelons $L_N(k)$ la somme $\frac{2}{N^2} \sum_{1 \leqslant q < p \leqslant N}$ qui apparait au second membre de l'équation. Les deux séries $\sum \frac{1}{N} I_N(k)$ et $\sum \frac{1}{N} L_N(k)$ étant de même nature, il suffit de montrer que, sous l'hypothèse du lemme 3, la série $\sum \frac{1}{N} L_N(k)$ converge.

De l'égalité

$$\sum_{1 \leqslant q < p \leqslant N} = \sum_{t=1}^{N-1} \sum_{q=1}^{N-t} ,$$

on déduit les inégalités

$$|L_N(k)| \leqslant \frac{2}{N^2} \sum_{t=1}^{N} \sum_{q=1}^{N} \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k \theta^{q-j}(1 - \frac{1}{\theta})(\theta^t - 1) \right|$$

$$\leqslant \frac{2}{N^2} \sum_{t=1}^{N} N \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \pi k \theta^{1-j}(1 - \frac{1}{\theta})(\theta^t - 1) \right| .$$

Afin d'alléger l'écriture, on pose $\lambda = \pi k(\theta - 1)$ . On obtient ainsi

$$|L_N(k)| \leqslant \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \left| \prod_{j=0}^{\infty} \cos \lambda \theta^{-j}(\theta^t - 1) \right|$$

$$\leqslant \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \left| \prod_{\sqrt{t} \leqslant j \leqslant t} \cos \lambda(\theta^{t-j} - \theta^{-j}) \right| .$$

Il est pratique d'effectuer le changement de notation $t - j = m$, de sorte que

$$|L_N(k)| \leqslant \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}}) \Big| .$$

Posons

$$A_t(k) = \Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}}) \Big| .$$

La remarque qui suit le lemme 2 montre que la convergence de la série $\sum_t \frac{1}{t} A_t(k)$ entraîne celle de la série $\sum_N \frac{1}{N} |L_N(k)|$ . On est ainsi ramené à l'étude de la série $\sum_t \frac{1}{t} A_t(k)$ . Or

$$|\cos \lambda(\theta^m - \frac{1}{\theta^{t-m}})| \leqslant |\cos \lambda\theta^m| + \frac{\lambda}{\theta^{t-m}} .$$

Le lemme 1 nous permet alors d'écrire :

$$A_t(k) \leqslant \Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda\theta^m \Big| + y(t)$$

où $y(t) = \Big(1 + \frac{\lambda}{\theta^{\sqrt{t}}}\Big)^{t-\sqrt{t}} - 1$ . La série $\sum \frac{1}{t} y(t)$ étant évidemment convergente, on est conduit à l'étude de la convergence de la série

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t} \Big| \prod_{0 \leqslant m \leqslant t-\sqrt{t}} \cos \lambda\theta^m \Big| ,$$

c'est-à-dire (après changement de variable) de la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \Big| \prod_{m=0}^{p} \cos \lambda\theta^m \Big| .$$

Ceci démontre le lemme.

En associant les lemmes 2 et 3, on aboutit à l'énoncé suivant :

Soit $\theta > 2$ un nombre réel. Si, pour tout $k$ entier non nul, la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \Big| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \Big|$$

est convergente, alors l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ est vraie.

Le théorème 1 découle alors du lemme suivant :

LEMME 4. - Soit $k \neq 0$ un entier fixé. Presque tous les nombres $\theta > 1$ sont tels que la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \Big| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \Big|$$

est convergente.

En effet, soit $\theta > 1$ un nombre tel que la suite $(\theta - 1)\theta^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ soit équirépartie modulo 1. $\varepsilon$ représentant un nombre de l'intervalle $]0, 1[$, on considère l'ensemble

$$H_{p,\varepsilon} = \{m \in \underset{\sim}{N} \mid \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \{(\theta - 1)\theta^m\} < 1 - \frac{\varepsilon}{2} ; \quad m \leqslant p\} .$$

Il contient $(1 - \varepsilon)p + o(p)$ éléments. Posons $1 - \eta = \cos \frac{\varepsilon\pi}{2}$ de sorte que $0 < 1 - \eta < 1$. On a alors l'inégalité

$$\left| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right| \leqslant \left| \prod_{m \in H_{p,\varepsilon}} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$$

$$\leqslant (1 - \eta)^{(1-\varepsilon)p+o(p)} .$$

La série $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left| \prod_{m=0}^{p} \cos \pi k(\theta - 1)\theta^m \right|$ est alors évidemment convergente. Nous sommes ainsi arrivé à la conclusion que, si la suite $(\theta - 1)\theta^m$ est équirépartie (mod 1), alors la série précédente converge. Le théorème de Koksma permet alors de conclure.

4. Démonstration du théorème 2.

Considérons à nouveau la somme

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \exp 2i\pi x\theta^p ,$$

et définissons l'intégrale

$$J_N = \int_0^1 \sigma_N(2x)\, d\mu(x) .$$

On suppose que $\theta > 2$ est un nombre de l'ensemble $S$. Pour montrer que l'implication $\mathcal{P}(\theta)$ n'a pas lieu, il suffit de montrer que, pour $N$ infini, $J_N$ ne tend pas vers 0.

Or l'égalité (3) montre que

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^{N} \exp 2i\pi\theta^p \prod_{j=1}^{\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^{p-j} .$$

Comme $\theta \in S$,

$$\lim_{p \to \infty} \exp 2i\pi\theta^p = 1 .$$

D'autre part,

$$\lim_{p \to \infty} \prod_{j=1}^{\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^{p-j} = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^j .$$

Le produit infini $\prod_{-\infty}^{+\infty}$ est convergent (caractérisation de l'ensemble $S$).

Ainsi

$$\lim_{N\to\infty} J_N = \prod_{j=-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi(\theta - 1)\theta^j \neq 0 .$$

C. Q. F. D.

5. Démonstration du théorème 4.

Soit $\varphi$ un polynôme réel de degré $\nu$. On considère la suite de $p$ éléments

$$[\varphi(m + 1)] , [\varphi(m + 2)] , \ldots , [\varphi(m + p)] \pmod 2 .$$

Appelons $N_\nu(p)$ le nombre de positions distinctes que prend la suite quand $m$ parcourt $\underset{\sim}{N}$.

LEMME 5. - Quand $p$ croit indéfiniment, on a

$$N_\nu(p) = O\left(p^{(\nu+1)^2}\right) .$$

En effet, désignons par $P_\nu$ l'ensemble des polynômes réels de degré $\nu$ et à coefficients dans $[0 , 2[$. On considère la suite de $p$ éléments

$$[\psi(1)] , [\psi(2)] , \ldots , [\psi(p)] \pmod 2 .$$

Représentons par $N_\nu^*(p)$ le nombre de positions distinctes que prend la suite quand $\psi$ parcourt $P_\nu$. Il est clair que $N_\nu(p) \leqslant N_\nu^*(p)$. On va montrer que $N_\nu^*(p) = O\left(p^{(\nu+1)^2}\right)$ et cela démontrera le lemme.

Posons

$$\psi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\nu x^\nu ; \qquad \alpha_j \in [0 , 2[ .$$

Soit $q_1 , q_2 , \ldots , q_p$ une suite d'entiers vérifiant les $p$ inégalités

$$0 \leqslant q_n < 2(1 + n + \ldots + n^\nu) \qquad n = 1 , 2 , \ldots , p ,$$

de sorte que $q_n = O(p^\nu)$. Lorsque le point $\alpha = (\alpha_0 , \alpha_1 , \ldots , \alpha_\nu) \in [0 , 2[^{\nu+1}$ parcourt le volume défini par

$$q_n \leqslant \alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_\nu n^\nu < q_n + 1 \qquad n = 1 , 2 , \ldots , p ,$$

la suite $[\psi(1)] , [\psi(2)] , \ldots , [\psi(p)]$ reste invariante. Or le nombre $N_\nu^{**}(p)$ de tels volumes est majoré par le nombre maximum de régions que l'on peut obtenir en découpant l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^{\nu+1}$ par les hyperplans

$$\alpha_0 + \alpha_1 n + \ldots + \alpha_\nu n^\nu = q_n ,$$

lesquels sont au nombre de $M = pO(p^\nu) = O(p^{\nu+1})$. Il est par ailleurs connu que l'espace $\underset{\sim}{R}^{\nu+1}$ est partagé en $O(M^{\nu+1})$ régions par $M$ hyperplans. Par suite,

$N_\nu^{**}(p) = O(p^{(\nu+1)^2})$ . Le lemme découle alors de l'inégalité évidente

$$N_\nu^{*}(p) \leqslant N_\nu^{**}(p) .$$

LEMME 6. - Soit $\varphi$ un polynôme réel de degré $\nu$ . La suite de $p$ éléments

$$[2\{\varphi(m+1)\}] , [2\{\varphi(m+2)\}] , \ldots , [2\{\varphi(m+p)\}]$$

prend $O(p^{2(\nu+1)^2})$ positions distinctes lorsque $m$ parcourt l'ensemble $\underset{\sim}{N}$ des entiers.

La démonstration découle immédiatement du lemme 5 et de l'égalité

$$[2\{\varphi(p)\}] = [2\varphi(p)] - 2[\varphi(p)] .$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 4. Soit $\theta > 1$ un nombre de la classe $S$, et soit $x$ un élément de $E(\theta)$ . Il existe donc un polynôme réel $\varphi$ tel que

$$x = (\theta - 1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(p)\}]}{\theta^p} .$$

Appelons $\nu$ le degré de $\varphi$ et, pour simplifier l'écriture, posons

$$\varepsilon_p = [2\{\varphi(p)\}] \qquad (p = 1 , 2 , \ldots) .$$

Nous voulons montrer que la suite $x\theta^n$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ est mal répartie (mod 1) On définit les deux quantités

$$R_p(n) = (\theta - 1)\left(\frac{\varepsilon_{n+p+1}}{\theta^{p+1}} + \frac{\varepsilon_{n+p+2}}{\theta^{p+2}} + \ldots\right)$$

$$Q_p(n) = (\theta - 1)\left(\varepsilon_1 \theta^{n-1} + \ldots + \varepsilon_{n-p-1} \theta^{p+1}\right)$$

de sorte que

$$x\theta^n = R_p(n) + Q_p(n) + (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p} \theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right) .$$

Il est clair que $|R_p(n)| \leqslant \frac{1}{\theta^p}$ . Par ailleurs, soit $s$ le degré du nombre algébrique $\theta$, et soit $\tau$ $(\tau \neq \theta)$ le conjugué de $\theta$ dont le module est le plus grand. Comme $\theta$ appartient à $S$ , on a $|\tau| < 1$ et $|\theta|^q \leqslant (s-1)|\tau|^q$ (mod 1) . Il s'ensuit que

$$|Q_p(n)| \leqslant \theta^{p+1} + 2(\theta^{p+2} + \theta^{p+3} + \ldots)$$

$$\leqslant 2(s-1) \frac{|\tau|}{1 - |\tau|} |\tau|^p \quad (\text{mod } 1) .$$

Par suite

$$|x\theta^n - (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p}\,\theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)| \leqslant \frac{1}{\theta^p} + 2(s-1)\,\frac{|\tau|}{1-|\tau|}\,|\tau|^p$$

$$|x\theta^n - (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p}\,\theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)| = O\left(|\tau|^p\right).$$

Ainsi, le point $x\theta^n$ se trouve à l'intérieur d'un intervalle centré au point $T_{n,p} = (\theta - 1)\left(\varepsilon_{n-p}\,\theta^p + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+p}}{\theta^p}\right)$ et de longueur $O\left(|\tau|^p\right)$. Or d'après le lemme 6, les points $T_{n,p}$ sont au nombre de $O\left((2p+1)^{2(\nu+1)^2}\right)$. Les points $x\theta^n$ sont donc enfermés dans une réunion d'intervalles dont la mesure totale est $O\left(|\tau|^p\, p^{2(\nu+1)^2}\right)$. Pour $p$ suffisamment grand, cette mesure est inférieure à 1. La suite $x\theta^n \pmod 1$ n'est donc pas dense sur $[0\ ,\ 1]$ et cela démontre la première partie du théorème 4.

La seconde partie découle du fait que la mesure dans la dimension $h$ $(0 < h \leqslant 1)$ de la réunion d'intervalles considérée précédemment est

$$O\left(|\tau|^{ph}\, p^{2(\nu+1)^2}\right) = o(1).$$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BARY (N. K.) [BARI (Nina)]. - A treatise on trigonometric series, Vol. 1 and 2. Translated by Margaret F. Mullins. - Oxford, London, Pergamon Press, 1964.

[2] DAVENPORT (H.), ERDÖS (P.) and LEVEQUE (W. J.). - On Weyl's criterion for uniform distribution, Mich. math. J., t. 10, 1963, p. 311-314.

[3] KAHANE (J.-P.) et SALEM (R.). - Ensembles parfaits et séries trigonométriques. - Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1301).

[4] MENDÈS FRANCE (Michel). - A set of nonnormal numbers, Pacific J. Math. (à paraître).

[5] PISOT (Charles). - La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, Série 2, t. 7, 1938, p. 205-248.

[6] PISOT (Charles). - Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres réels, Comment. math. Helvet., t. 19, 1946-47, p. 153-160.

[7] SALEM (Raphaël). - Rectifications to the papers : Sets of uniqueness and sets of multiplicity, Trans. Amer. math. Soc., t. 63, 1948, p. 595-598.

[8] SALEM (R.) et ZYGMUND (A.). - Sur un théorème de Piatetçki-Shapiro, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 240, 1955, p. 2040-2042.