

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MOHAMED AMARA

Sur un ensemble remarquable de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 2 (1964-1965),
exp. n° 10, p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_2_A1_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN ENSEMBLE REMARQUABLE DE NOMBRES ALGÈBRIQUES

par Mohamed AMARA

Nous nous proposons de déterminer les plus petits éléments de l'ensemble fermé S_q des nombres algébriques réels supérieurs à l'unité, étudié par C. PISOT. De plus, nous établirons quelques propriétés des ensembles dérivés $S_q^{(n)}$, et nous en déduirons en particulier que S_q ne possède pas de dérivé d'ordre transfini.

Rappelons que tout nombre θ de S_q est défini par la fraction rationnelle :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots),$$

$$Q(0) = q \text{ entier positif non nul} \quad \text{et} \quad u_0 \geq 1,$$

ayant un seul pôle $\frac{1}{\theta}$ dans $|z| \leq 1$, vérifiant $|A(z)| \leq |Q(z)|$ sur $|z| = 1$. De plus, les polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ sont pris à coefficients entiers rationnels.

C. PISOT a étudié les développements $(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots)$, et a montré que les éléments de S_q correspondants sont les nombres θ' , θ'_n , et $\hat{\theta}'_n$, respectivement zéros des polynômes :

$$P'(z) \equiv q + z - qz^2$$

$$P'_n(z) \equiv q(1 - z^2) + z^n [q + z - qz^2], \quad n \geq 1$$

$$\hat{P}'_n(z) \equiv q(1 - z^2) - z^n [q + z - qz^2], \quad n \geq 1.$$

Le nombre θ' est le seul point d'accumulation des nombres θ'_n et $\hat{\theta}'_n$, et nous avons :

$$\dots < \theta'_n < \theta'_{n+1} < \dots < \theta' < \dots < \hat{\theta}'_{n+1} < \hat{\theta}'_n < \dots.$$

Nous noterons par T_1 , l'ensemble des nombres θ' , θ'_n , $\hat{\theta}'_n$. Nous verrons plus tard comment, à partir de l'étude de T_1 , C. PISOT a déterminé les quatre plus petits éléments de S_q .

Nous dépasserons ses résultats en nous intéressant, en plus de l'ensemble T_1 , aux éléments de S_q définis par les développements $(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, u_n, \dots)$. Nous considérerons en particulier les nombres θ_n et $\hat{\theta}_n$, zéros des polynômes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$ définis par les relations suivantes :

$$(1-z^2)P_{2n}(z) \equiv A^*(z) - z^{2n}P^*(z), \quad n \geq 1; \quad (1-z)P_{2n+1}(z) \equiv A^*(z) - z^{2n+1}P^*(z), \quad n \geq 0$$

$$\hat{P}_{2n}(z) \equiv A^*(z) + z^{2n}P^*(z), \quad n \geq 1; \quad (1+z)\hat{P}_{2n+1}(z) \equiv A^*(z) + z^{2n+1}P^*(z), \quad n \geq 0$$

où $P^*(z)$ et $A^*(z)$ désignent respectivement les polynômes :

$$P^*(z) \equiv q - 1 + qz - (q-2)z^2 - qz^3,$$

$$A^*(z) \equiv q + (q-1)z - (q-1)z^2 - (q-1)z^3.$$

Le nombre θ^* , défini par

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \equiv \left(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, u_n, \dots\right); \quad Q^*(z) \equiv -z^3 P^*(1/2),$$

est le seul point d'accumulation des nombres θ_n et $\hat{\theta}_n$ qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\dots < \theta_n < \theta_{n+1} < \dots < \theta^* < \dots < \hat{\theta}_{n+1} < \hat{\theta}_n.$$

Nous montrerons que la famille des éléments de S_q inférieurs à θ^* ($\theta^* = \theta'$ pour $q = 1$) contient, en plus de certains nombres θ'_n (tous les éléments θ'_n pour $q = 1$), les nombres θ_n et un nombre particulier θ'' , racine du polynôme :

$$P''(z) \equiv q - z - (q-2)z^2 - z^3 + z^3(1 + (q-2)z + 2z^2 - qz^3).$$

Nous verrons de plus que les nombres de S_q , qui sont supérieurs à θ^* , mais suffisamment voisins de θ^* , appartiennent aux familles des $\hat{\theta}_n$ et des θ'_n (des $\hat{\theta}'_n$ pour $q = 1$). Nous en déduisons le fait que θ^* est le plus petit élément de l'ensemble dérivé S'_q , et de plus que c'est un élément isolé.

Tous ces résultats seront basés sur le problème des coefficients, étudié par J. DUFRESNOY et C. PISOT, d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans $|z| \leq 1$, ayant le pôle simple et unique $\frac{1}{\theta}$ dans $|z| \leq 1$, et vérifiant $|f(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$.

Soit $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ le développement de $f(z)$ autour de l'origine. Nous savons que l'on peut trouver deux polynômes $E_n(z)$ et $E_n^*(z)$, avec $E_n(0) = 1$ et $E_n^*(0) = -1$, de degré n tel que, si l'on pose

$$D_n(z) = -z^n E_n(1/z),$$

$$D_n^*(z) \equiv z^n E_n^*(1/z),$$

les développements de $\frac{D_n}{E_n}$ et $\frac{D_n^*}{E_n^*}$ coïncident avec celui de $f(z)$ jusqu'au terme en z^{n-1} , et que

$$\frac{D_n(z)}{E_n(z)} \equiv (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_n, \dots)$$

$$\frac{D_n^*(z)}{E_n^*(z)} \equiv (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, w_n^*, \dots),$$

w_n et w_n^* étant déterminés de manière unique, et vérifiant

$$w_n \leq u_n \leq w_n^*.$$

De plus, les polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ ont chacun un zéro, et un seul, extérieur au cercle-unité. Ces zéros τ_n et τ_n^* vérifient les inégalités

$$1 < \tau_n \leq \theta \leq \tau_n^*.$$

Ces résultats sont valables pour $n \geq 3$, et seulement pour $s \geq n \geq 3$, dans le cas où la fonction $f(z)$ s'écrit

$$f(z) \equiv \frac{u(z)}{u(z)} \quad \text{avec} \quad u(z) = \varepsilon z^s v(1/z), \quad \varepsilon = \pm 1$$

($f(z)$ étant dite de rang fini s), et certains le restent même pour $n = 1$ et $n = 2$.

Etant donné θ de S_q , défini par le développement (u_0, u_1, u_n, \dots) , nous formons les polynômes D_n, D_n^* correspondants, et nous utiliserons les deux propriétés suivantes :

Première propriété. - Lorsque u_0, u_1, \dots, u_{n-1} sont connus et que $s \geq n$ (dans le cas où θ est défini par une fraction de rang fini s), nous déterminons le polynôme $D_n(z)$. Nous en déduisons la valeur de w_n . Nous devons avoir $u_n \geq w_n$, l'égalité entraînant $\theta = \tau_n$.

Deuxième propriété. - Nous formons ensuite le polynôme $D_{n+1}(z)$ par la relation de récurrence

$$D_{n+1}(z) \equiv (1+z) D_n(z) - z \frac{u_n - w_n}{u_{n-1} - w_{n-1}} D_{n-1}(z).$$

Nous devons avoir $D_{n+1}(1) \geq 0$, condition équivalente à $u_n \leq w_n^*$, l'égalité entraînant

$$\theta = \tau_n^* \quad \text{et} \quad D_{n+1}(z) \equiv (1-z) D_n^*(z).$$

Si les deux inégalités strictes, $u_n > w_n$ et $D_{n+1}(1) > 0$, sont satisfaites, nous avons $s \geq n + 1$, dans le cas où $f(z)$ est de rang fini.

Nous allons maintenant appliquer systématiquement les propriétés des polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ associés aux fractions rationnelles définissant les nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_1$, zéro du polynôme :

$$\hat{P}_1(z) \equiv \frac{A^*(z) + z P^*(z)}{1 + z} \equiv q + (q - 2)z - (q - 3)z^2 - qz^3 .$$

Signalons les inégalités :

$$\hat{\theta}_1 < \theta' < 1 + \frac{1}{q} \quad \text{pour } q \geq 2 ,$$

$$\theta' = \theta^* < \hat{\theta}_1 < 2 \quad \text{pour } q = 1 .$$

LEMME 1. - La fraction rationnelle, associée à tout nombre θ de S_q inférieur à $\hat{\theta}_1$, admet, au voisinage de l'origine, le développement suivant :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = (1, \frac{1}{q}, u_2, \dots, u_n, \dots) \quad \text{avec } 1 \leq q^2 u_2 \leq 2 .$$

Pour tout élément de S_q , les coefficients u_n sont tels que $q^{n+1} u_n$ est entier rationnel, et il en est de même pour $q^n u_n$, si $u_0 = 1$.

Nous formons le polynôme $D_1(z) = u_0 - z$. Nous en déduisons que $\tau_1 = u_0 < \theta$; comme $\theta < \hat{\theta}_1 < 1 + \frac{1}{q}$, nous obtenons $qu_0 < q\theta < q + 1$. Or, par définition même de S_q , $qu_0 \geq q$, il s'ensuit que

$$u_0 = 1 .$$

Nous déterminons ensuite le polynôme $D_2(z) \equiv 1 + \frac{u_1}{2} z - z^2$, et nous obtenons $w_2 = \frac{u_1^2}{2}$. $D_2(z)$ admettant une seule racine τ_2 vérifiant, pour $q \geq 2$,

$$\tau_2 < \theta < \hat{\theta}_1 < \theta' ,$$

nous obtenons :

$$qD_2(\theta') \equiv (q \frac{u_1}{2} - 1)\theta' < 0 ,$$

soit

$$qu_1 < 2 .$$

Puisque qu_1 est un entier rationnel non nul (car, si $u_1 = 0$, $\frac{A(z)}{Q(z)}$, en appliquant le théorème de Rouché au polynôme $A(z) - Q(z)$, admettrait au moins deux pôles à l'intérieur du cercle-unité, ce qui est impossible), nous obtenons

$$qu_1 = 1 ;$$

mais, si $q = 1$, nous écrivons que $D_2(2) < 0$, ce qui donne $1 \leq u_1 \leq 2$.

Nous utilisons ensuite le polynôme $D_3(z)$:

$$D_3(z) = (1+z)\left(1 + \frac{u_1}{2}z - z^2\right) - z \frac{u_2 - u_1^2/2}{u_1} (1-z).$$

Pour $u_1 = 2$ et $u_2 \geq 3$, $D_3(z)$ admettrait un zéro supérieur à $\hat{\theta}_3$. En limitant, pour $q = 1$, notre étude aux nombres $\theta < \hat{\theta}_3$, nous obtenons $u_2 \leq 2$. De plus, nous avons $u_2 \geq w_2 = \frac{u_1^2}{2} = 2$, soit en définitive $w_2 = u_2 = 2$ et $\theta = \theta'$.

qu₁ étant égal à l'unité, l'expression du polynôme $D_3(z)$ devient

$$D_3(z) \equiv (1+z)\left(1 + \frac{1}{2q}z - z^2\right) - z\left(qu_2 - \frac{1}{2q}\right)(1-z).$$

A partir de la relation

$$\hat{P}_1(z) - q D_3(z) \equiv (q^2 u_2 - 3) z(1-z),$$

nous en déduisons, pour $q^2 u_2 \geq 3$, les inégalités

$$\hat{\theta}_1 \leq \tau_3 < \theta.$$

Puisque nous limitons notre étude aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_1$, il s'ensuit que

$$q^2 u_2 \leq 2.$$

De plus, nous savons que $u_2 \geq w_2 = \frac{u_1^2}{2} = \frac{1}{2q^2}$, soit en définitive

$$1 \leq q^2 u_2 \leq 2.$$

LEMME 2. - Les seuls éléments de S_q définis par les développements

$$\left(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{2}, \dots, u_n, \dots\right)$$

sont les nombres θ' , θ'_n , et $\hat{\theta}'_n$.

Soit $f(z) = \frac{A(z)}{Q(z)} = \left(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{2}, \dots, u_n, \dots\right)$.

Effectuons sur $f(z)$ la transformation suivante :

$$f_1(z) \equiv \frac{(q - z - qz^2) f(z) - q(1 - z^2)}{(q + z - qz^2) - q(1 - z^2) f(z)} = \frac{\lambda z^3 + \dots}{-\frac{1}{q} z^2 + \dots}.$$

Sur $|z| = 1$, nous avons

$$|q + z - qz^2| = |1 - q(z - \frac{1}{z})| > q|z - \frac{1}{z}| = q|1 - z^2|,$$

et $|f_1(z)| \leq 1$. D'après le théorème de Rouché, le dénominateur de $f_1(z)$, après multiplication par $Q(z)$, admet dans $|z| \leq 1$ le même nombre de racines que $Q(z)(q + z - qz^2)$, soit deux racines. Or, il en a déjà deux racines en $z = 0$, donc il n'en a pas d'autres. En simplifiant par z^2 , $f_1(z)$ devient holomorphe dans, et sur, le cercle-unité. De plus, après multiplication par $Q(z)$, numérateur et dénominateur de $f_1(z)$ sont des polynômes à coefficients entiers rationnels, et le terme constant du dénominateur vaut 1. Donc, le développement de Taylor de $f_1(z)$ est à coefficients entiers rationnels, et comme $f_1(z)$ est holomorphe et borné par 1 dans $|z| \leq 1$, il s'ensuit, d'après le principe du maximum, que

$$f_1(z) \equiv 0 \quad \text{ou} \quad f_1(z) = \varepsilon z^n \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Le premier cas donne $\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q(1 - z^2)}{q - z - qz^2}$, qui correspond à $\theta = \theta'$; les autres cas donnent

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv \frac{q(1 - z^2) + \varepsilon z^n(q + 2 - qz^2)}{(q - z - qz^2) + \varepsilon qz^n(1 - z^2)},$$

qui correspondent à θ'_n pour $\varepsilon = +1$, et à $\hat{\theta}'_n$ pour $\varepsilon = -1$.

Les nombres θ , définis par les développements $(1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \dots, u_n, \dots)$, étant complètement déterminés, nous nous intéresserons dorénavant à l'ensemble T_2 des éléments de S_q définis par $(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{2}, \dots)$ et inférieurs à $\hat{\theta}'_1$.

Remarquons que nous avons la relation

$$P_2(z) - q D_3(z) \equiv (q^2 u_2 - 2) z(1 - z).$$

Nous en déduisons que, si θ est inférieur à θ_2 , il appartient à l'ensemble T_1 , et un calcul simple montre que les seuls nombres de T_2 , inférieurs à θ_2 , sont $\theta_1 = \theta'_1$, θ'_2 , et θ'_3 . Nous obtenons ainsi les quatre plus petits éléments de S_q , à savoir θ'_1 , θ'_2 , θ'_3 , et θ_2 , déterminés déjà par C. PISOT.

Avant de poursuivre l'étude de l'ensemble T_2 , nous établissons le lemme suivant :

LEMME 3. - Soient $A(z)$, $A_1(z)$, $Q(z)$, $Q_1(z)$, polynômes à coefficients entiers rationnels tels que :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$$

$$\frac{A_1(z)}{Q_1(z)} = (u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}, \dots)$$

$$Q(z) = q + q_1 z + \dots$$

$$Q_1(z) = q + q_1^{(1)} z + \dots$$

Supposons que $u_n = u_n^{(1)}$, pour $n < N$, et $u_N \neq u_N^{(1)}$. Nous avons alors $k_N = q^2(u_N - u_N^{(1)})$ entier rationnel, et il en est de même pour

$$k_{N+1} = q^2(u_{N+1} - u_{N+1}^{(1)}) - 4 \frac{k_N}{q},$$

si $\frac{A_1(z)}{Q_1(z)} \equiv \frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ et $N \geq 3$.

Posons :

$$K_N(z) = \frac{1}{z^N} [A Q_1 - Q A_1] = k_N + k'_N z + \dots,$$

$$H(z) = Q(z) \cdot Q_1(z) = q^2 + q(q_1 + q_1^{(1)})z + \dots$$

Les polynômes $K_N(z)$ et $H(z)$ sont à coefficients entiers rationnels tels que

$$\frac{K_N(z)}{H(z)} = (u_N - u_N^{(1)}, u_{N+1} - u_{N+1}^{(1)}, \dots).$$

Comme $H(0) = q^2$, nous avons $K_N(0) = k_N = q^2(u_N - u_N^{(1)})$ entier rationnel. De plus,

$$k'_N = q^2(u_{N+1} - u_{N+1}^{(1)}) + \frac{k_N}{q} (q_1 + q_1^{(1)}),$$

ou encore

$$k'_N = k_{N+1} + k_N \left(\frac{4 + q_1 + q_1^{(1)}}{q} \right).$$

Or, si nous supposons que $\frac{A_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{A^*(z)}{Q^*(z)}$ et $N \geq 3$, nous obtenons

$$q_1^{(1)} = q - 2,$$

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{q + q_1 z + q_2 z^2 + \dots} = \left(1, \frac{1}{q}, \frac{2}{q^2} z^2, \dots \right),$$

soit, par identification,

$$q(a_2 - q_2) = q_1 + 2 ,$$

et l'expression de k_N' devient

$$k_N' = k_{N+1} + (1 + a_2 - q_2)k_N ,$$

et il s'ensuit que k_{N+1} est entier rationnel.

Soit θ un élément de l'ensemble T_2 ; pour calculer les polynômes $D_n(z)$ et $D_n^*(z)$ associés à la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ définissant θ , nous utilisons les polynômes $P_n(z)$ et $\hat{P}_n(z)$ dont les expressions ont été données dans l'introduction.

Considérons les développements en série entière suivants :

$$\frac{A(z)}{Q(z)} \equiv (1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \dots , u_n , \dots) ,$$

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \equiv (1 , \frac{1}{q} , \frac{2}{q^2} , \dots , v_n , \dots) .$$

Soit N un entier tel que $u_n = v_n$ pour $n < N$, et $u_N \neq v_N$. Nous voyons que $N \geq 3$. D'autre part, si $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini s , nous avons $s \geq N$. Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de Rouché au polynôme

$$A(z) \cdot Q^*(z) - A^*(z) \cdot Q(z) \equiv q^2(u_N - v_N)z^N + \dots ; \quad A(z) = \varepsilon z^s Q(1/z) .$$

Puisque $N \geq 3$ et $s \geq N$, dans le cas où $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini, les polynômes $D_N(z)$ et $D_N^*(z)$ sont déterminés d'une manière unique, et admettent sans aucune restriction les propriétés signalées.

Nous devons distinguer deux cas, suivant que N est pair ou impair.

(A) Premier cas. - $N = 2p$ avec $p \geq 2$.

Il est facile de vérifier que

$$q(1+z) D_{2p}(z) \equiv P_{2p}(z) + \frac{p+2}{p+1} z \cdot P_{2p-2}(z) ,$$

$$w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q^2} \frac{p+2}{p+1} .$$

Il résulte, d'après la première propriété des $D_n(z)$, que

$$u_{2p} \geq w_{2p} = v_{2p} - \frac{1}{q} \frac{p+2}{p+1},$$

soit

$$q^2(u_{2p} - v_{2p}) \geq -\frac{p+2}{p+1};$$

or, $k_{2p} = q^2(u_{2p} - v_{2p})$ est entier rationnel, d'après le lemme 3 ; il vient que

$$-1 \leq k_{2p}.$$

Nous formons ensuite le polynôme

$$D_{2p+1}(z) \equiv (1+z) D_{2p}(z) - z \frac{u_{2p} - w_{2p}}{u_{2p-1} - w_{2p-1}} D_{2p-1}(z),$$

avec $q \cdot D_{2p-1}(z) \equiv P_{2p-2}(z)$ et $u_{2p-1} - w_{2p-1} \equiv v_{2p-1} - w_{2p-1} = \frac{1}{2}$. En utilisant la deuxième propriété, soit $D_{2p+1}(1) \geq 0$, il s'ensuit que

$$k_{2p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

Sauf dans le cas $p=2$, où l'égalité $k_{2p}=2$ est possible, l'entier k_{2p} admet seulement les valeurs -1 et $+1$.

(a) $k_{2p}=2$ avec $p=2$. - Mais nous avons alors $D_{2p+1}(1) = 0$, et la 2e propriété des $D_n(z)$ donne

$$D_{2p+1}(z) \equiv (1-z) D_{2p}^*(z) \quad \text{et} \quad \theta = \tau_{2p}^*,$$

et un calcul simple montre que

$$D_{2p+1}(z) \equiv \hat{P}_{2p-1}(z) - z P_{2p-2}(z).$$

Soit $D_5(\hat{\theta}_1) > -\hat{\theta}_1 P_2(\hat{\theta}_1) > 0$; il en résulte que $D_4^*(\hat{\theta}_1) < 0$, condition équivalente à $\hat{\theta}_1 < \tau_4^* = \theta$. Le cas $k_{2p}=2$ est à éliminer, puisque nous limitons notre étude aux nombres $\theta < \hat{\theta}_1$.

(b) $k_{2p}=+1$. - Dans ce cas, le polynôme $D_{2p+1}(z)$ se met sous la forme plus simple :

$$q \cdot D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z) - z P_{2p-2}(z) \equiv \hat{P}_{2p-1}(z);$$

nous en déduisons :

$$w_{2p+1} = v_{2p+1} - \frac{2(q-2)}{q^3},$$

soit, d'après la première propriété,

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) - \frac{4}{q} \geq -2.$$

Nous formons ensuite le polynôme

$$D_{2p+2} \equiv (1+z) D_{2p+1}(z) - z \frac{u_{2p+1} - w_{2p+1}}{u_{2p} - w_{2p}} D_{2p}(z);$$

il en résulte, d'après la deuxième propriété,

$$k_{2p+1} \leq -2 + \frac{4p+6}{p^2+p-1}.$$

k_{2p+1} étant entier rationnel d'après le lemme 3, et vérifiant les inégalités

$$-2 \leq k_{2p+1} \leq -2 + \frac{4p+6}{p^2+p-1},$$

nous avons les deux cas suivants :

(α) $k_{2p+1} = -2$, mais alors $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, soit $\theta = \tau_{2p+1} = \hat{\theta}_{2p-1}$;

(β) $k_{2p+1} \geq -1$, avec $p \leq 4$.

Si nous exprimons la valeur de $D_{2p+2}(z)$ pour $z = \hat{\theta}_{2p-1}$, il vient :

$$D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p-1}) = -\frac{p+1}{2p+3} (k_{2p+1} + 2) \hat{\theta}_{2p-1} D_{2p}(\hat{\theta}_{2p-1}) > 0;$$

il en résulte alors les inégalités

$$\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p-1} > \hat{\theta}_7.$$

Nous éliminons ce dernier en nous bornant dorénavant aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_7$.

(c) $k_{2p} = -1$. - Nous obtenons $q D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p-1}(z)$, d'où

$$w_{2p+1} = v_{2p+1} + \frac{2(q-2)}{q^3}.$$

Nous formons ensuite le polynôme :

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z) D_{2p+1}(z) - (p+1)(q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) + \frac{4}{q} - 2)z D_{2p}(z).$$

Les deux principales propriétés des polynômes $D_n(z)$ donnent les inégalités :

$$2 \leq k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) + \frac{4}{q} \leq 2 + \frac{2(2p-1)}{p^2+p-1}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs de l'entier k_{2p+1} montrent que

(α) ou bien $k_{2p+1} = 2$, soit $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, ce qui entraîne $\theta = \theta_{2p-1}$,

(β) ou bien $k_{2p+1} \geq 3$, avec $p = 2$;

l'étude de ce dernier cas ($s \geq 2p + 2 = 6$ si $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini) se poursuit de la même façon. Nous obtenons :

$$q \cdot D_6(z) \equiv q - z - (q - 2)z^2 + (q - 2)z^4 + 2z^5 - qz^6.$$

Nous utilisons ensuite le polynôme

$$D_7(z) \equiv (1 + z) D_6(z) - zq^2(u_6 - w_6) D_5(z).$$

L'inégalité $D_7(1)$ est équivalente à

$$q^2(u_6 - w_6) \leq \frac{2}{3},$$

et, d'après la première propriété, $q^2(u_6 - w_6) \geq 0$; ce nombre entier rationnel, en vertu du lemme 3, est alors nécessairement nul. Nous en concluons que $\theta = \tau_6$, racine du polynôme $D_6(z)$; c'est le nombre que nous avons représenté par θ dans l'introduction.

(B) Deuxième cas. - $N = 2p + 1$, avec $p \geq 1$.

Il est facile de voir que

$$q \cdot D_{2p+1}(z) \equiv P_{2p}(z), \quad \text{d'où } w_{2p+1} = v_{2p+1} - \frac{1}{q^2},$$

et nous en déduisons, à partir de la première propriété,

$$k_{2p+1} = q^2(u_{2p+1} - v_{2p+1}) \geq -1.$$

Nous formons ensuite le polynôme :

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1 + z) D_{2p+1}(z) - z \frac{u_{2p+1} - w_{2p+1}}{w_{2p} - w_{2p}} D_{2p}(z),$$

où $D_{2p}(z)$ désigne le même polynôme que celui que nous avons utilisé au début de l'étude du premier cas.

Remarquons que nous avons $u_{2p} - w_{2p} = v_{2p} - w_{2p} \equiv \frac{1}{q^2} \frac{p+2}{p+1}$, d'où

$$D_{2p+2}(z) \equiv (1+z) D_{2p+1}(z) - \frac{p+1}{p+2} (k_{2p+1} + 1)z D_{2p}(z) .$$

En exprimant la deuxième propriété, soit $D_{2p+2}(1) \geq 0$, il vient :

$$k_{2p+1} \leq 1 + \frac{2(p+1)}{p^2 + p - 1} .$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de l'entier non nul k_{2p+1} montrent que nous devons examiner successivement :

(a) $k_{2p+1} = -1$, mais alors $u_{2p+1} = w_{2p+1}$, d'où $\theta = \tau_{2p+1} = \theta_{2p}$,

(b) $k_{2p+1} \geq 2$, avec $p \leq 2$.

En exprimant la valeur de $q(1+z) D_{2p+2}(z)$ pour $z = \hat{\theta}_{2p}$, il vient :

$$q[1 + \hat{\theta}_{2p}] D_{2p+2}(\hat{\theta}_{2p}) \geq [1 + \hat{\theta}_{2p} (2 - \frac{p+1}{p+2} (k_{2p+1} + 1)) - k_{2p+1} \hat{\theta}_{2p}^2] P_{2p}(\hat{\theta}_{2p}) > 0 .$$

Nous en déduisons les inégalités

$$\theta > \tau_{2p+2} > \hat{\theta}_{2p} \geq \hat{\theta}_4 .$$

Ce cas doit être écarté, puisque nous avons limité notre étude aux nombres

$$\theta < \hat{\theta}_7 < \hat{\theta}_4 .$$

(C) $k_{2p+1} = 1$. - L'étude de ce cas (où $s \geq 2p+2$, quand $\frac{A(z)}{Q(z)}$ est de rang fini) se poursuit toujours de la même façon. Le polynôme $D_{2p+2}(z)$ admet ici une forme plus simple, soit

$$q(1+z) D_{2p+2}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z) + \frac{2z}{p+2} P_{2p}(z) ,$$

d'où

$$q^2(w_{2p+2} - v_{2p+2}) = + \frac{4}{q} - (2 + \frac{4}{p+2}) ,$$

et la première propriété donne

$$-2 - \frac{4}{p+2} \leq k_{2p+2} = q^2(u_{2p+2} - v_{2p+2}) - \frac{4}{q} .$$

Nous formons ensuite le polynôme $D_{2p+3}(z)$, soit

$$q \cdot D_{2p+3}(z) \equiv \hat{P}_{2p}(z) - z \frac{k_{2p+2} + 2}{2} P_{2p}(z) .$$

Il en résulte (deuxième propriété) :

$$k_{2p+2} \leq -2 + \frac{4}{p}.$$

Les deux inégalités bornant les valeurs possibles de l'entier k_{2p+2} , montrent que nous devons examiner successivement :

(α) $k_{2p+2} = -3$, avec $1 \leq p \leq 2$. - Le cas $p = 2$ nous donne $u_{2p+2} = w_{2p+2}$, soit $\theta = \tau_{2p+2} = \tau_6$; mais ce cas est à écarter puisque le polynôme $q D_6(z)$ n'est pas à coefficients entiers.

Tandis que, si $p = 1$, nous pouvons vérifier que

$$q(1 + \hat{\theta}_3) D_4(\hat{\theta}_3) = \hat{\theta}_3^2(\hat{\theta}_3^2 - 4\hat{\theta}_3 + 1) P^*(\hat{\theta}_3) > 0,$$

ce qui entraîne $\theta \geq \tau_4 > \hat{\theta}_3 > \hat{\theta}_7$. Notre étude étant limitée aux nombres inférieurs à $\hat{\theta}_7$, cette dernière possibilité est à éliminer.

(β) $k_{2p+2} \geq -1$, avec $p \leq 4$. - Nous avons alors

$$q D_{2p+3}(\hat{\theta}_{2p}) = -\hat{\theta}_{2p} \frac{k_{2p+2} + 2}{2} P_{2p}(\hat{\theta}_{2p}) > 0,$$

ce qui donne $\theta \geq \tau_{2p+3} > \hat{\theta}_{2p} \geq \hat{\theta}_8$. Nous éliminons ce cas, en limitant notre étude aux nombres θ inférieurs à $\hat{\theta}_8$.

(γ) $k_{2p+2} = -2$ (avec $s \geq 2p+3$, pour une fraction de rang fini). - Nous poursuivons notre étude de la même manière. Nous avons

$$q D_{2p+3}(z) = \hat{P}_{2p}(z).$$

Nous formons ensuite le polynôme :

$$D_{2p+4} \equiv (1+z) D_{2p+3}(z) - \frac{p+2}{4} q^2 (u_{2p+3} - w_{2p+3}) z D_{2p+2}(z).$$

Les deux propriétés principales des $D_n(z)$ donnent, pour l'entier $q^2 [u_{2p+3} - w_{2p+3}]$,

$$0 \leq q^2 [u_{2p+3} - w_{2p+3}] \leq \frac{8}{p+1},$$

lesquelles inégalités nous conduisent à considérer les deux cas suivants :

$$- q^2 (u_{2p+3} - w_{2p+3}) = 0, \text{ mais alors } \theta = \hat{\theta}_{2p},$$

$$- q^2 [u_{2p+3} - w_{2p+3}] \geq 1, \text{ avec } p \leq 7.$$

A partir de l'inégalité

$$D_{2p+4}(\hat{\theta}_{2p}) = \frac{-\hat{\theta}_{2p}^2 P_{2p}(\hat{\theta}_{2p})}{2(1 + \hat{\theta}_{2p})} > 0,$$

nous en déduisons que

$$\theta \geq \tau_{2p+4} > \hat{\theta}_{2p} \geq \hat{\theta}_{14}.$$

Nous écarterons ce dernier cas, en nous limitant aux nombres de S_q inférieurs à $\hat{\theta}_{14}$.

L'ensemble de ces résultats est résumé dans le théorème suivant :

THEOREME 1. - Les nombres θ de S_q , inférieurs à $\hat{\theta}_{14}$, et qui n'appartiennent pas à l'ensemble T_1 , sont les nombres θ_n , les nombres $\hat{\theta}_n$ où $n \geq 14$, le nombre θ'' . Le nombre θ^* est le seul point d'accumulation des nombres $\theta \leq \hat{\theta}_{14}$.

Nous allons poursuivre l'étude de l'ensemble fermé S_q par l'établissement de quelques propriétés de ces ensembles dérivés successifs $S_q^{(n)}$. R. SALEM a montré que, pour $q = 1$, les ensembles $S_q^{(n)}$ sont tous non vides, et il en sera encore de même pour $q \geq 1$.

Etant donnée une suite θ_μ de \mathbb{C} tendant vers θ , nous lui associons la famille des fractions rationnelles $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ définissant les θ_μ . Nous savons que cette famille est compacte. Nous pouvons alors extraire une sous-suite tendant vers la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$, ayant $\frac{1}{\theta}$ comme unique pôle dans $|z| < 1$, et vérifiant les conditions pour que $\theta \in S_q$.

Désignons respectivement par τ et τ_μ les valeurs moyennes sur $|z| = 1$ de $|\frac{A(z)}{Q(z)}|^2$ et $|\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}|^2$. Si nous introduisons les développements en série :

$$\left(\frac{1 - \theta z}{z - \theta}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n \quad \text{et} \quad \frac{1 - \theta_\mu z}{z - \theta_\mu} \cdot \frac{1 - \bar{\theta}_\mu z}{z - \bar{\theta}_\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{\mu,n} z^n,$$

nous obtenons, pour τ et τ_μ , les valeurs suivantes :

$$(1) \quad \tau = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^n \gamma_{n-p} u_p \right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^n \gamma_{\mu,n-p} u_p \right]^2,$$

$$(2) \quad \tau_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^n \gamma_{\mu,n-p} u_{\mu,p} \right]^2.$$

En raison de (1), étant donné ϵ un nombre positif, nous pouvons déterminer un entier N tel que :

$$\sum_{n=0}^N \left[\sum_{p=0}^n \gamma_{n-p} u_p \right]^2 > \tau - \varepsilon .$$

Les $\gamma_{\mu,n}$ tendant vers γ_n , quel que soit n , quand μ augmente indéfiniment, on peut déterminer un entier m tel que, pour $\mu > m$, on ait :

$$(3) \quad \sum_{n=0}^N \left[\sum_{p=0}^n \gamma_{\mu,n-p} u_p \right]^2 > \tau - 2\varepsilon ,$$

d'où, en tenant compte de (2),

$$(4) \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^n \gamma_{\mu,n-p} u_p \right]^2 < 2\varepsilon .$$

Choisissons pour μ une valeur assez grande (et nécessairement supérieure à m) pour que

$$(5) \quad u_{\mu,p} = u_p \quad \text{pour } p < N \quad \text{et} \quad u_{\mu,M} \neq u_M ,$$

M désignant un entier plus grand que N . Nous en déduisons, à partir du lemme 3, que

$$(5') \quad q^2 |u_{\mu,M} - u_M| \geq 1 .$$

Comme, de (5) et (5'), la relation (3) devient :

$$(6) \quad \sum_{n=0}^N \left[\sum_{p=0}^n \gamma_{\mu,n-p} u_{\mu,p} \right]^2 > \tau - 2\varepsilon ,$$

tandis que la relation

$$\left| \sum_{p=0}^M \gamma_{\mu,M-p} u_p \right| < \sqrt{2\varepsilon} ,$$

conséquence de l'inégalité (4), entraîne :

$$(7) \quad \left| \sum_{p=0}^M \gamma_{\mu,M-p} u_{\mu,p} \right| > \frac{\gamma_{\mu,0}}{2} - \sqrt{2\varepsilon} ,$$

les relations (2), (6), et (7) conduisent à l'inégalités

$$\tau_{\mu} > \tau - 2\varepsilon + \left(\frac{\gamma_{\mu,0}}{2} - \sqrt{2\varepsilon} \right)^2 .$$

En faisant tendre μ vers l'infini, et en remarquant que $\gamma_{\mu,0}$ tend vers $\gamma_0 = \frac{1}{\theta^2}$, nous en déduisons

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \tau_{\mu} \geq \tau + \frac{1}{(q\theta)^4} .$$

LEMME 4. - Soit une suite θ_μ de S_q tendant vers le nombre fini θ . Une suite partielle extraite de la suite $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$ tendra vers $\frac{A(z)}{Q(z)}$, et pour cette suite partielle, nous avons :

$$\tau \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \tau_\mu - \frac{1}{(q\theta)^4}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si un nombre θ appartient à l'ensemble dérivé $S_q^{(n)}$, il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers tel que $A(0) \geq q$ et sur $|z| = 1$, nous avons $|A(z)| \leq |Q(z)|$, la valeur moyenne de $|\frac{A(z)}{Q(z)}|^2$ étant au plus égale à $1 - \frac{n}{(q\theta)^4}$.

La démonstration se fait par récurrence. La propriété étant vraie pour $n = 0$, nous la supposerons aussi vraie pour $n = h$, et nous l'établirons pour $n = h + 1$. Si θ appartient à $S_q^{(h+1)}$, il est limite d'une suite θ_μ de $S_q^{(h)}$. Les fractions rationnelles $\frac{A_\mu(z)}{Q_\mu(z)}$, associées aux θ_μ , donnent des valeurs moyennes $\tau_\mu \leq 1 - \frac{h}{(q\theta_\mu)^4}$. Nous aurons donc :

$$\lim \tau_\mu \leq 1 - \frac{h}{(q\theta)^4},$$

et, d'après le lemme 4, la valeur moyenne de la fraction rationnelle $\frac{A(z)}{Q(z)}$ associée à la limite θ vérifie

$$\tau \leq 1 - \frac{h}{(q\theta)^4} - \frac{1}{(q\theta)^4} \equiv 1 - \frac{h+1}{(q\theta)^4}.$$

Dans les hypothèses du théorème 2, nous avons, en particulier, $1 - \frac{n}{(q\theta)^4} > 0$, ce que nous pouvons énoncer sous la forme :

COROLLAIRE. - Le plus petit élément de l'ensemble $S_q^{(n)}$ est supérieur à $\frac{n^{1/4}}{q}$, et par conséquent augmente indéfiniment avec n .

Il n'existe aucun élément qui soit commun à tous les éléments dérivés d'ordre fini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMARA (Mohamed). - Sur un ensemble remarquable de nombres algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1052-1054.
 - [2] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Sur les dérivés successifs d'un ensemble fermé d'entiers algébriques, Bull. Sc. math., 2e série, t. 77, 1953, 1re partie, p. 129-136.
 - [3] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité ; application à un ensemble fermé d'entiers algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 72, 1955, p. 69-92.
 - [4] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.
 - [5] SALEM (Raphaël). - A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan, Duke math. J., t. 11, 1944, p. 103-108.
 - [6] SALEM (Raphaël). - Power series with integral coefficients, Duke math. J., t. 12, 1945, p. 153-172.
-