

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

FRANÇOISE BERTRANDIAS

Théorème de Koksma en p -adique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 6, n° 1 (1964-1965),
exp. n° 3, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1964-1965__6_1_A2_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

23 novembre 1964

THÉORÈME DE KOKSMA EN p -ADIQUE

par Mme Françoise BERTRANDIAS

Le but de cet exposé est de démontrer un analogue p -adique du théorème de Koksma sur la répartition modulo 1 ; ce théorème démontre une propriété métrique d'équirépartition modulo 1 dans \mathbb{R} , dont voici un des énoncés (non le plus général, cf. [5]).

THÉORÈME DE KOKSMA. - a et b désignent deux réels, avec $a < b$. Soit $\{f_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite d'applications continues et dérivables de (a, b) dans \mathbb{R} , telles que, pour tout couple m, n ($m, n \in \mathbb{N}$) avec $m \neq n$, l'application $f'_m - f'_n$ soit monotone sur (a, b) et vérifie :

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| > K > 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

(K indépendant de m, n, x).

Alors la suite $\{f_n(x)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) est équirépartie dans \mathbb{R} modulo 1 pour presque tout x de (a, b) .

Il en résulte immédiatement :

COROLLAIRE 1. - La suite $\{x\theta^n\}$ ($\theta \in \mathbb{R}$, $|\theta| > 1$) est équirépartie modulo 1 pour presque tout x de \mathbb{R} .

COROLLAIRE 2. - La suite $\{\lambda x^n\}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) est équirépartie modulo 1 pour presque tout x de \mathbb{R} tel que $|x| > 1$.

Dans sa démonstration, KOKSMA utilise le théorème de Weyl, qui donne une caractérisation des suites équiréparties : $\{u_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) désigne une suite de réels ; $\{u_n\}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, pour tout $k \neq 0$ de \mathbb{Z}

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp 2i\pi k u_n = 0.$$

Les corollaires 1 et 2 du théorème de Koksma sont en relation avec les éléments de l'ensemble S (nombres de Pisot) :

Si θ est un élément de S , pour tout x entier algébrique du corps $\mathbb{Q}(\theta)$,

$$x\theta^n \rightarrow 0 \text{ modulo } 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty ;$$

un tel x appartient donc à l'ensemble de mesure nulle du corollaire 1. Dans le corollaire 2, si $\lambda = 1$ et si x est un élément de S ,

$$x^n \rightarrow 0 \text{ modulo } 1 \text{ quand } n \rightarrow +\infty ;$$

S est donc contenu dans l'ensemble de mesure nulle du corollaire 2, dans le cas $\lambda = 1$.

Dans cet exposé, on se propose d'étudier la répartition de suites de réels définies par des applications de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} (§ 2), et de suites vectorielles définies par des applications de $V_E(\mathbb{Q})$ dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{c(E)}$ (§ 3), en vue d'obtenir des théorèmes métriques analogues au théorème de Koksma. Les résultats obtenus seront en relation avec les éléments de l'ensemble $S_{(p)}^{(0)}$ de \mathbb{Q}_p , ou de l'ensemble $S_E^{(0)}$ de $V_E(\mathbb{Q})$ [1]. On rappellera dans le § 1 quelques propriétés de l'intégration dans \mathbb{Q}_p et dans $V_E(\mathbb{Q})$.

1. Intégration dans \mathbb{Q}_p et $V_E(\mathbb{Q})$.

1.1 Homomorphismes dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . - Tout nombre p -adique x possède une infinité de développements de la forme

$$x = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n p^n \quad (n \in \mathbb{Z}, a_{-k} \not\equiv 0 \pmod{p}).$$

Deux développements distincts (a_n) et (a'_n) sont tels que le rationnel

$$\sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n - \sum_{n=-k}^{-1} a'_n p^n$$

a une valeur absolue p -adique ≤ 1 ; ce rationnel, qui ne contient en dénominateur que le facteur p , est donc un entier.

On note $H_p(x)$ l'élément de \mathbb{R}/\mathbb{Z} défini par :

$$H_p(x) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n p^n \pmod{1}.$$

L'application H_p de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} possède les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_p(x_1 + x_2) = H_p(x_1) + H_p(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}_p \\ |x_1 - x_2|_p \leq 1 \Rightarrow H_p(x_1) = H_p(x_2), \end{array} \right.$$

H_p est donc un homomorphisme continu du groupe additif \mathbb{Q}_p dans le groupe additif

\mathbb{R}/\mathbb{Z} . On voit facilement que l'application $x \rightarrow H_p(xy)$, où $y \in \mathbb{Q}_p$, est elle aussi un homomorphisme continu de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On montre ([4], § 25-1) qu'on obtient ainsi tous les homomorphismes continus du groupe additif \mathbb{Q}_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

Soit

$$x = \sum_{p \in \mathbb{E}} x_p e(p)$$

un élément de $V_{\mathbb{E}}(\mathbb{Q})$ ($x_p \in \mathbb{Q}_p$), (voir notations dans [2]). On désigne par $c(\mathbb{E})$ le nombre d'éléments de l'ensemble \mathbb{E} ; si ξ est un réel, $H_0(\xi)$ désigne l'élément de \mathbb{R}/\mathbb{Z} défini par $H_0(\xi) = \xi \pmod{1}$. On voit facilement que l'application

$$x \rightarrow (H_p(x_p))_{p \in \mathbb{E}}$$

est un homomorphisme continu du groupe additif $V_{\mathbb{E}}(\mathbb{Q})$ dans le groupe additif $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{c(\mathbb{E})}$, ainsi que toute application

$$x \rightarrow (H_p(x_p y_p))_{p \in \mathbb{E}} \quad \text{où } y \in V_{\mathbb{E}}(\mathbb{Q}).$$

1.2 Intégrale et mesure de Haar. - Le groupe additif \mathbb{Q}_p étant un groupe abélien localement compact, il existe une fonctionnelle linéaire non négative, invariante par translation, sur l'espace $C_{00}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes de support compact dans \mathbb{Q}_p ([4], § 15), et une mesure associée, ou mesure de Haar. On normalise la mesure de Haar de \mathbb{Q}_p par la condition : $\text{mes } Z_p = 1$. Par suite, si D est un disque de rayon p^h de \mathbb{Q}_p , c'est-à-dire

$$D = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p \leq p^h\},$$

on a

$$\text{mes } D = p^h.$$

Le groupe additif $V_{\mathbb{E}}(\mathbb{Q})$ étant isomorphe au groupe produit des groupes additifs \mathbb{Q}_p ($p \in \mathbb{E}$), son intégrale et sa mesure de Haar se déduisent de l'intégrale et de la mesure de Haar de \mathbb{Q}_p ([4], § 13). A étant un compact de $V_{\mathbb{E}}(\mathbb{Q})$ défini par

$$A = \{x \in V_{\mathbb{E}}(\mathbb{Q}) : x_p \in A_p, p \in \mathbb{E}\}$$

où A_p est un compact de \mathbb{Q}_p , et f_p étant une application continue de A_p dans \mathbb{Q}_p , on a

$$\int_A \left(\prod_{p \in \mathbb{E}} f_p(x_p) \right) dx = \prod_{p \in \mathbb{E}} \left(\int_{A_p} f_p(x_p) dx_p \right).$$

1.3 Intégration des caractères sur Z_p . - L'application $x \rightarrow H_p(xy)$ (où $y \in \mathbb{Q}_p$) est un homomorphisme continu du groupe additif Z_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , puisque

homomorphisme continu de \mathbb{Q}_p dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} (§ 1.1). Or

$$|x|_p \leq 1 \implies H_p(xy) = H_p(xH_p(y)) .$$

Par suite les homomorphismes précédents non nuls sont de la forme :

$$x \rightarrow H_p(xy) \text{ avec } y = mp^{-k} \quad (m \in \mathbb{Z}, |m|_p = 1, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1) .$$

L'application $x \rightarrow \exp(2i\pi H_p(xy))$ est donc un caractère continu du groupe additif \mathbb{Z}_p , différent de 1 si et seulement si $|y|_p > 1$. Conséquence : L'intégrale sur un groupe compact d'un caractère étant égale à 0 ou 1 suivant que ce caractère est différent de 1 ou non, ([4], § 23.19), on a :

$$(1) \quad \int_{\mathbb{Z}_p} \exp(2i\pi H_p(xy)) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |y|_p > 1 \\ 1 & \text{si } |y|_p \leq 1 . \end{cases}$$

Il est intéressant de donner une démonstration élémentaire de ce résultat. On peut supposer $y = mp^{-k}$, avec $k \geq 1$ et $|m|_p = 1$ (le cas $|y|_p \leq 1$ est évident). Le disque \mathbb{Z}_p est recouvert par p^k disques disjoints de rayon p^{-k} , centrés aux points $0, 1, \dots, p^k - 1$. Comme

$$|x - x'|_p \leq p^{-k} \implies H_p(xy) = H_p(x'y) ,$$

l'intégrale est égale à la somme finie

$$p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(nmp^{-k})) = p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi nmp^{-k}) = 0 .$$

De la relation (1), on va déduire le résultat suivant :

LEMME 1. - Soit ϕ une application isométrique de \mathbb{Z}_p dans lui-même c'est-à-dire telle que, quels que soient x, y dans \mathbb{Z}_p , on ait :

$$|\phi(x) - \phi(y)|_p = |x - y|_p .$$

On a :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \exp(2i\pi H_p(y\phi(x))) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } |y|_p > 1 \\ 1 & \text{si } |y|_p \leq 1 . \end{cases}$$

Démonstration. - Le cas $|y|_p \leq 1$ étant évident, on va supposer $y = mp^{-k}$, avec $|m|_p = 1$ et $k \geq 1$. Considérons le recouvrement de \mathbb{Z}_p par les p^k disques de rayon p^{-k} . Comme

$$|x - x'|_p \leq p^{-k} \implies |\phi(x) - \phi(x')|_p \leq p^{-k} \implies H_p(y\phi(x)) = H_p(y\phi(x')) ,$$

l'intégrale est égale à la somme finie :

$$p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(y\Phi(n))) .$$

Or $n \neq n' \Rightarrow |\Phi(n) - \Phi(n')| = |n - n'|_p \geq p^{-k}$. Les $\Phi(n)$ ($n = 0, 1, \dots, p^k - 1$) sont donc incongrus modulo p^k ; comme ils sont au nombre de p^k , ils constituent un système complet de représentants de $Z_p/p^k Z_p$. Par suite, il existe une permutation $(j_n)_{n=0, \dots, p^k-1}$ de $(0, 1, \dots, p^k - 1)$ telle que $|\Phi(n) - j_n|_p \leq p^{-k}$. Il en résulte :

$$p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(y\Phi(n))) = p^{-k} \sum_{n=0}^{p^k-1} \exp(2i\pi H_p(yn)) = \int_{Z_p} \exp(2i\pi H_p(yx)) dx .$$

D'où le résultat.

1.4 Un théorème métrique. - La propriété suivante se déduit d'une propriété générale de toute fonctionnelle linéaire non négative sur l'espace $C(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes, définies sur un espace topologique compact X ([4], § 11.27).

LEMME 2. - Soient X un compact de G , groupe abélien localement compact, et $\{h_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite d'applications non négatives de $C(X, \mathbb{C})$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I(h_n) = 0, \text{ où } I(h_n) = \int_X h_n(x) dx \text{ (intégrale de Haar).}$$

Soit $\{n_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) une suite croissante d'entiers positifs tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(h_{n_k}) < +\infty .$$

Il en résulte :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} h_{n_k}(x) = 0 \text{ presque partout dans } X$$

(c'est-à-dire sauf pour x appartenant à un sous-ensemble de X ayant une mesure de Haar nulle).

Dans la suite, on appliquera le lemme 2 au cas : $G = \mathbb{Q}_p^+$, et $G = V_E(\mathbb{Q})^+$ (le cas $G = \mathbb{R}^+$ de cette propriété est utilisé dans la démonstration du théorème de Koksma).

2. Equirépartition d'une suite d'applications de Q_p dans R/Z .

2.1. - On se propose de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1. - D désigne un disque de Q_p . Soit $\{f_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite d'applications continues de D dans Q_p . Pour tout couple (m, n) d'entiers positifs, on note $F_{m,n}$ l'application $f_m - f_n$. K désigne un sous-ensemble de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (ensemble des couples d'entiers positifs) contenant les couples (m, n) tels que $m = n$, et K_N désigne le nombre d'éléments (m, n) de K tels que : $\sup(m, n) \leq N$. On suppose les deux conditions suivantes vérifiées :

(1) Si $(m, n) \notin K$, quels que soient x et $y \in D$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda_{m,n}} |x - y|_p$$

où $\Lambda_{m,n} \in \mathbb{Z}$ et vérifie $\Lambda_{m,n} \rightarrow +\infty$ quand $\sup(m, n) \rightarrow +\infty$.

(2) Il existe une suite croissante $\{N_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) d'entiers positifs tels que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{N_{k+1}}{N_k} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{K_{N_k}}{N_k^2} < +\infty.$$

Alors la suite $\{H_p(f_n(x))\}$ ($n = 1, 2, \dots$) est équirépartie dans R/Z pour presque tout x de D .

La condition 2 est équivalente à la condition suivante

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \frac{K_N}{N^3} < +\infty.$$

THÉORÈME 1 bis. - Dans l'énoncé du théorème 1 on peut remplacer la condition (1) par la condition plus faible (1 bis) (*) :

(1 bis) Si $(m, n) \in K$, il existe une partition :

$$D = \bigcup_{j=1}^{J(m,n)} D_{m,n}^j$$

du disque D en un nombre fini $J(m, n)$ de disques disjoints $D_{m,n}^j$, de rayon $p^{\frac{j}{m,n}}$, tels que, quels que soient x et $y \in D_{m,n}^j$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\Lambda_{m,n}^j} |x - y|_p$$

(*) à la suite d'une remarque de Y. AMICÉ .

où $\Lambda_{m,n}^j \in \mathbb{Z}$, et

$$\inf_{j=1, \dots, J(m,n)} (\Lambda_{m,n}^j + h_{m,n}^j) \rightarrow +\infty \text{ quand } \sup(m, n) \rightarrow +\infty.$$

COROLLAIRES du théorème 1.

(1) La suite $\{H_p(x\theta^n)\}$ ($\theta \in \mathbb{Q}_p$, $|\theta|_p > 1$) est équirépartie dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} pour presque tout x de \mathbb{Q}_p .

(2) La suite $\{H_p(\lambda x^n)\}$ ($\lambda \in \mathbb{Q}_p$, $\lambda \neq 0$) est équirépartie dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} pour presque tout x de \mathbb{Q}_p tel que $|x|_p > 1$.

Remarques :

1° Si θ est un élément de l'ensemble $S_{(p)}^{(0)}$, et si x est un élément algébrique α du corps $\mathbb{Q}(\theta)$ tel que

- $p^a \alpha$ soit entier algébrique ($a \in \mathbb{Z}$),

- tous les conjugués de α (dans Ω_p) aient une valeur absolue p -adique ≤ 1 ,
alors

$$H_p(\alpha\theta^n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour les nombres p -adiques x de cette forme, la suite $\{H_p(x\theta^n)\}$ n'est donc pas équirépartie.

2° Si $\lambda = 1$, et si x est un élément de $S_{(p)}^{(0)}$,

$$H_p(\lambda x^n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

la suite $\{H_p(x^n)\}$ n'est donc pas équirépartie.

2.2 Démonstration des théorèmes 1 et 1 bis. - On utilise les sommes de Weyl relatives à la suite $\{H_p(f_n(x))\}$:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2i\pi k H_p(f_n(x))) \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0).$$

D'où ($||$ désigne la valeur absolue dans \mathbb{C}) :

$$|\sigma_N(x)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} \cos(2\pi k H_p(F_{m,n}(x))).$$

Posons $I_N = \int_D |\sigma_N(x)|^2 dx$. On a

$$I_N = \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} i_{m,n}$$

où

$$i_{m,n} = \int_D \cos(2\pi k H_p(F_{m,n}(x))) dx ,$$

et $\text{mes } D = p^h$ ($h \in \mathbb{Z}$, p^h étant le rayon du disque D).

Pour tout couple (m, n) :

$$|i_{m,n}| \leq \text{mes } D = p^h .$$

Soit un couple (m, n) n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel K , et supposons que l'application $F_{m,n}$ vérifie la condition (1 bis). Notons :

$$i_{m,n}^j = \int_{D_{m,n}^j} \cos(2\pi k H_p(F_{m,n}(x))) dx .$$

on a :

$$i_{m,n} = \sum_{j=1}^{J(m,n)} i_{m,n}^j .$$

Soit $x_{m,n}^j$ un centre du disque $D_{m,n}^j$ c'est-à-dire :

$$D_{m,n}^j = \{x : |x - x_{m,n}^j|_p \leq p^{h_{m,n}^j}\} .$$

On pose :

$$x = x_{m,n}^j + p^{-h_{m,n}^j} \xi$$

et

$$F_{m,n}(x_{m,n}^j + p^{-h_{m,n}^j} \xi) p^{\Lambda_{m,n}^j + h_{m,n}^j} = \Phi_{m,n}^j(\xi) .$$

La condition (1 bis) entraîne, pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{Z}_p$,

$$|\Phi_{m,n}^j(\xi) - \Phi_{m,n}^j(\eta)|_p = |\xi - \eta|_p .$$

L'application $\Phi_{m,n}^j$ est donc isométrique dans \mathbb{Z}_p . Or :

$$\begin{aligned} i_{m,n}^j &= p^{h_{m,n}^j} \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(2\pi k H_p(p^{-\Lambda_{m,n}^j - h_{m,n}^j} \Phi_{m,n}^j(\xi))) d\xi \\ &= p^{h_{m,n}^j} \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(2\pi H_p(k p^{-\Lambda_{m,n}^j - h_{m,n}^j} \Phi_{m,n}^j(\xi))) d\xi . \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 1 (§ 1.3) que l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \exp(2i\pi H_p(k p^{-\Lambda_{m,n}^j - h_{m,n}^j} \Phi_{m,n}^j(\xi))) d\xi$$

est égale à 0 si $\Lambda_{m,n}^j + h_{m,n}^j - \chi \geq 1$, et égale à 1 dans le cas contraire (ou

note $|k|_p = p^{-\chi}$). D'où le même résultat pour l'intégrale $i_{m,n}^j$.

Par suite, si $\Lambda_{m,n}^j + h_{m,n}^j - \chi \geq 1$, $i_{m,n}^j = 0$.

Par hypothèse

$$\inf_{j=1, \dots, J(m,n)} \Lambda_{m,n}^j + h_{m,n}^j \rightarrow +\infty \text{ quand } \sup(m, n) \rightarrow +\infty$$

c'est-à-dire : \exists un entier $\nu(\chi)$ tel que

$$\sup(m, n) > \nu(\chi) \implies \inf_{j=1, \dots, J(m,n)} \Lambda_{m,n}^j + h_{m,n}^j \geq 1 + \chi.$$

L'inégalité précédente est donc vérifiée pour tout couple (m, n) non dans K , sauf éventuellement pour les couples tels que $\sup(m, n) \leq \nu(\chi)$: le nombre de ces couples est majoré par $\nu(\chi)^2$.

On a donc $i_{m,n}^j = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, J(m, n)$ (et par suite $i_{m,n} = 0$) pour tout couple (m, n) non dans K , sauf peut-être pour $\nu(\chi)^2$ d'entre eux. Il en résulte :

$$I_N \leq \text{mes } D \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} (\nu(\chi)^2 + K_N) \right).$$

C'est-à-dire, puisque $K_N \geq N$:

$$I_N = O\left(\frac{K_N}{N^2}\right).$$

Considérons la suite $\{N_k\}$ de la condition (2). On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_{N_k} < +\infty.$$

D'où, en utilisant le lemme 2 (§ 1.4) avec $G = \mathbb{Q}_p^+$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\sigma_{N_k}(x)|^2 = 0 \text{ pour presque tout } x \text{ de } D.$$

Soit N un entier positif quelconque. Il existe un entier k , et un seul, tel que :

$$N_k \leq N < N_{k+1}$$

$$\sigma_N(x) = \frac{N_k}{N} \sigma_{N_k}(x) + \frac{1}{N} \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} \exp(2i\pi n k H_p(F_{m,n}(x))).$$

D'où :

$$\left| \sigma_N(x) - \frac{N_k}{N} \sigma_{N_k}(x) \right| \leq \frac{N_{k+1} - N_k}{N} \leq \frac{N_{k+1}}{N_k} - 1$$

et :

$$|\alpha_N(x)| \leq \frac{N^k}{N} |\alpha_{N_k}(x)| + \left| \frac{N^{k+1}}{N_k} - 1 \right| \leq |\alpha_{N_k}(x)| + \left| \frac{N^{k+1}}{N_k} - 1 \right| .$$

D'après la condition (2)

$$\left| \frac{N^{k+1}}{N_k} - 1 \right| \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty .$$

Si x est tel que $|\alpha_{N_k}(x)| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$, quel que soit N :

$$|\alpha_N(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty .$$

Par suite, $|\alpha_N(x)| \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ presque partout dans D . Le théorème 1 bis est donc démontré.

Pour achever la démonstration du théorème 1, il suffit de remarquer que la condition (1) est un cas particulier de la condition (1 bis) :

$$J(m, n) = 1 \quad h_{m,n}^j = h \quad \Lambda_{m,n}^j = \Lambda_{m,n} .$$

2.3 Démonstration des corollaires du théorème 1. - Le corollaire 1 est immédiat : en effet, si l'on pose $f_n(x) = x\theta^n$, on a

$$F_{m,n}(x) = x(\theta^m - \theta^n) ,$$

d'où, si $m \neq n$:

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = |\theta^m - \theta^n|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}_p$$

où $|\theta^m - \theta^n|_p = p^k \sup(m,n)$ (si $|\theta|_p = p^k$). La condition (1) est donc vérifiée. L'ensemble K se compose uniquement des couples (m, n) tels que $m = n$; c'est-à-dire $K_N = N$.

Pour démontrer le corollaire 2, on pose $f_n(x) = \lambda x^n$. Soit D un disque quelconque de rayon 1, non contenu dans \mathbb{Z}_p . Soit p^k ($k \geq 1$) la valeur absolue p -adique des points de D . Soit $y - x = p\alpha$, où $|\alpha|_p \leq 1$. On a, si $x \neq y$:

$$\frac{y^n - x^n}{y - x} = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1} .$$

On pose : $|n|_p = p^{-\nu}$, $|\ell|_p = p^{-\lambda}$, $|m|_p = p^{-\mu}$. De la relation

$$\left| \binom{n}{\ell} \right|_p = p^{-P} \text{ avec } P = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right] - \left[\frac{\ell}{p^i} \right] - \left[\frac{n-\ell}{p^i} \right] ,$$

résulte :

$$\left| \binom{n}{\ell} \right|_p \leq p^{-(\nu-\lambda)} \text{ si } \nu > \lambda .$$

On a donc, dans tous les cas,

$$\left| \binom{n}{\ell} \right|_p \leq p^{-(\nu-\lambda)} .$$

Comme $p^\lambda \leq \ell \implies \lambda \leq \frac{\log \ell}{\log p} \leq \frac{\log \ell}{\log 2} \leq 2\ell - 3$ pour $\ell \geq 2$, on a :

$$\left| \binom{n}{\ell} \right|_p \leq p^{-\nu+2\ell-3} \text{ pour } \ell \geq 2 .$$

Donc

$$\left| \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1} \right|_p \leq p^{-\nu+\ell-2+(n-\ell)k} = p^{(n-1)k-\nu-(\ell-1)(k-1)-1} ,$$

or

$$\left| \binom{n}{1} x^{n-1} \right|_p = p^{(n-1)k-\nu} .$$

Comme $\ell \geq 2$, $k \geq 1$, il en résulte :

$$\left| \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} p^{\ell-1} \alpha^{\ell-1} \right|_p < \left| \binom{n}{1} x^{n-1} \right|_p \quad (2 \leq \ell \leq n) .$$

D'où, pour tout couple $x, y \in D$ avec $x \neq y$:

$$\left| \frac{y^n - x^n}{y - x} \right|_p = \left| nx^{n-1} \right|_p = p^{(n-1)k-\nu} .$$

De même

$$\left| \frac{y^m - x^m}{y - x} \right|_p = \left| mx^{m-1} \right|_p = p^{(m-1)k-\mu} .$$

Donc, si $(n-1)k - \nu \neq (m-1)k - \mu$, et $x \neq y$ dans D :

$$\left| \frac{F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)}{x - y} \right|_p = \left| \frac{y^m - x^m}{y - x} - \frac{y^n - x^n}{y - x} \right|_p = p^{\Lambda_{m,n}}$$

où $\Lambda_{m,n} = \sup\{(n-1)k - \nu, (m-1)k - \mu\}$. Ceci entraîne :

$$\Lambda_{m,n} \geq \sup\left\{(n-1)k - \frac{\log n}{\log p}, (m-1)k - \frac{\log m}{\log p}\right\} .$$

La condition (1) du théorème 1 est donc vérifiée.

L'ensemble exceptionnel K est constitué d'une part des couples (m, n) tels que $m = n$, d'autre part des couples (m, n) tels que

$$nk - \nu = mk - \mu$$

c'est-à-dire $k(n-m) = \nu - \mu$.

Supposons $n > m$, et $|\nu - \mu|_p = p^{-r}$. On a :

$$\nu - \mu = k\ell p^r \quad (\text{où } |\ell|_p = 1)$$

$$n - m = \ell p^r .$$

On en déduit successivement : $\nu > r$, $\mu \geq r$, puis $\mu = r$. A une valeur de $\nu - \mu$ correspond donc une seule valeur de μ et une seule valeur de ν . Or ν étant fixé, il existe $\sigma(\nu)$ entiers n' , tels que $n = n'p^\nu \leq N$ et $|n'|_p = 1$, et l'on a :

$$\sigma(\nu) \leq \left[\frac{N}{p^\nu} \right].$$

$\nu - \mu$ et n étant fixés, le seul choix possible pour m est : $n - lp^r$. Le nombre de couples (m, n) ($m < n$) tels que $k(n - m) = \nu - \mu$, est donc majoré par

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\log N}{\log p} \right]} \sigma(\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{+\infty} \left[\frac{N}{p^\nu} \right] < \frac{N}{p-1}.$$

Par suite

$$K_N < N + 2 \frac{N}{p-1}$$

$$K_N = O(N).$$

La condition (2) du théorème 1 est donc vérifiée.

3. Equirépartition d'une suite d'applications de $V_E(Q)$ dans $(R/Z)^{c(E)}$.

3.1. - Dans le § 3, on étudiera l'équirépartition dans $(R/Z)^r$ (r entier ≥ 1 , dans la suite $r = c(E)$) de suites vectorielles. On rappelle la définition suivante : La suite vectorielle $\{(u_{n,1}, \dots, u_{n,r})\}$ ($n = 1, 2, \dots$) ($u_{n,i} \in R/Z$) est équirépartie dans $(R/Z)^r$ si, et seulement si, quels que soient les $2r$ réels α_i, β_i avec $0 \leq \alpha_i < \beta_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq r$),

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\nu(\alpha_i, \beta_i, N)}{N} = \prod_{i=1}^r (\beta_i - \alpha_i),$$

où $\nu(\alpha_i, \beta_i, N)$ est le nombre de termes de la suite vectorielle $\{(u_{n,i})\}$ vérifiant

$$n \leq N \text{ et } u_{n,i} \in [\alpha_i, \beta_i[\pmod{1} \quad (i = 1, \dots, r).$$

Une caractérisation des suites vectorielles équiréparties dans $(R/Z)^r$ est donnée par le théorème de Weyl ([3]) : $\{(u_{n,1}, \dots, u_{n,r})\}$ est équirépartie dans $(R/Z)^r$ si, et seulement si, pour tout système (k_1, \dots, k_r) d'entiers $\neq (0, \dots, 0)$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2i\pi(k_1 u_{n,1} + \dots + k_r u_{n,r})) = 0.$$

Remarques.

1° Si la suite vectorielle $\{(u_{n,i})_{i=1,\dots,r}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) est équirépartie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$, alors la suite de réels $\{v_1 u_{n,1} + \dots + v_r u_{n,r}\}$ ($n = 1, 2, \dots$), où (v_1, \dots, v_r) est un système d'entiers $\neq (0, \dots, 0)$, est équirépartie dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} (comme on le voit en utilisant le critère de Weyl dans le cas $r = 1$).

2° Le fait que la suite de réels $\{u_{n,i}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) soit équirépartie dans \mathbb{R}/\mathbb{Z} , pour tout $i = 1, 2, \dots, r$, n'entraîne pas que la suite vectorielle $\{(u_{n,i})_{i=1,\dots,r}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) soit équirépartie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$.

3.2. - On se propose de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 2. - Soient D un compact de $V_E(\mathbb{Q})$ défini par :

$$D = \{x \in V_E(\mathbb{Q}) : x_p \in D_p, p \in E\}$$

où D_p est un disque de \mathbb{Q}_p si $p \neq 0$, et, dans le cas où $(0) \in E$, D_0 un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} .

Soit, pour tout $p \in E$, une suite $\{f_{n,p}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) d'applications continues de D_p dans \mathbb{Q}_p vérifiant les conditions du théorème 1 (ou 1 bis) si $p \neq (0)$ (l'ensemble K sera noté K_p et K_N noté $K_{N,p}$), et les conditions du théorème de Koksma si $p = (0)$:

Alors la suite vectorielle $\{(H_p(f_{n,p}(x_p)))_{p \in E}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) est équirépartie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{c(E)}$ pour presque tout x de D .

COROLLAIRES du théorème 2.

(1) La suite vectorielle $\{(H_p(x_p \theta_p^n))_{p \in E}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) (où $\theta_p \in \mathbb{Q}_p$, $|\theta_p|_p > 1$ pour tout $p \in E$) est équirépartie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{c(E)}$ pour presque tout x de $V_E(\mathbb{Q})$.

(2) La suite vectorielle $\{(H_p(\lambda_p x_p^n))_{p \in E}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) (où $\lambda_p \in \mathbb{Q}_p$, $\lambda_p \neq 0$, pour tout $p \in E$) est équirépartie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{c(E)}$ pour presque tout x de $V_E(\mathbb{Q})$ tel que :

$$\inf_{p \in E} |x_p|_p > 1.$$

Remarques.

1° Si θ est un élément de $S_E^{(0)}$, et si x est un élément algébrique α de l'anneau $\mathbb{Q}_E[\theta]$ (cf. [2]) tel que α soit racine d'un polynôme

$$A(x) \equiv \left(\prod_{p \in E^-} p^n \right) x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_0 \quad (n_p, a_i \in \mathbb{Z}),$$

dont les racines différentes de α_p dans Ω_p aient une valeur absolue p -adique ≤ 1 si $p \in E^-$, alors

$$\varepsilon_0(\alpha \theta^n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Par définition

$$\varepsilon_0(\alpha \theta^n) = H_0(\alpha_0 \theta_0^n) - \sum_{p \in E^-} H_p(\alpha_p \theta_p^n) \pmod{1}.$$

La suite vectorielle $\{(H_p(\alpha \theta^n))_{p \in E^-}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) n'est donc pas équirépartie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{c(E)}$ (remarque 1 du § 3.1).

2° Si x est un élément de $S_E^{(0)}$,

$$\varepsilon_0(x^n) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Il en résulte que la suite vectorielle $\{(H_p(x_p^n))_{p \in E^-}\}$ n'est pas équirépartie dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{c(E)}$.

3.3 Démonstration du théorème 2. - On utilise les sommes de Weyl relatives à la suite vectorielle $\{(H_p(f_{n,p}(x_p)))_{p \in E^-}\}$

$$\alpha_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp(2i\pi \sum_{p \in E^-} k_p H_p(f_{n,p}(x_p))) \quad (k_p \in \mathbb{Z} \text{ et } (k_p)_{p \in E^-} \neq (0, \dots, 0)).$$

D'où, en notant $F_{m,n,p} = f_{m,p} - f_{n,p}$:

$$|\alpha_N(x)|^2 = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} \cos(2\pi \sum_{p \in E^-} k_p H_p(F_{m,n,p}(x_p))).$$

On pose :

$$I_N = \int_D |\alpha_N(x)|^2 dx.$$

D'où

$$I_N = \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{2}{N^2} \sum_{1 \leq m < n \leq N} i_{m,n}$$

avec

$$i_{m,n} = \int_D \cos(2\pi \sum_{p \in E^-} k_p H_p(F_{m,n,p}(x_p))) dx = \int_D \cos(2\pi \sum_{p \in E^-} H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p))) dx.$$

Pour tout couple m, n :

$$i_{m,n} \leq \text{mes } D$$

on notera

$$j_{m,n} = \int_D \exp(2i\pi \sum_{p \in E^-} H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p))) dx.$$

On a (§ 1.2)

$$\mathfrak{J}_{m,n} = \prod_{p \in E} \int_{D_p} \exp(2i\pi H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p))) dx_p .$$

Comme $(k_p)_{p \in E} \neq (0, \dots, 0)$, il existe un indice p de E tel que $k_p \neq 0$.

1er cas $p \neq 0$. - Si $(m, n) \notin K_p$:

$$\int_{D_p} \exp(2i\pi H_p(k_p F_{m,n,p}(x_p))) dx_p = 0$$

sauf au plus pour $\nu(\chi_p)^2$ couples (m, n) (cf. § 2.2). Pour les mêmes couples (m, n) on a : $\mathfrak{J}_{m,n} = 0$, et donc $i_{m,n} = 0$. Il en résulte :

$$I_N \leq \text{mes } D \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} (\nu_p(\chi_p)^2 + K_{N,p}) \right) .$$

D'où

$$I_N = O\left(\frac{1}{N^2} K_{N,p}\right) .$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème 1 bis, puisqu'on peut appliquer le lemme 2 au groupe $G = V_E(Q)^+$.

2e cas $p = (0)$. - En utilisant, comme dans la démonstration du théorème de Koksma le 2e théorème de la moyenne, on trouve :

$$\left| \int_{D_0} \cos(2\pi k_0 F_{m,n,0}(x_0)) dx_0 \right| \leq \frac{1}{\pi |k_0|} \max \left\{ \frac{1}{F'_{m,n,0}(a)}, \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)} \right\} .$$

De même

$$\left| \int_{D_0} \sin(2\pi k_0 F_{m,n,0}(x_0)) dx_0 \right| \leq \frac{1}{\pi |k_0|} \max \left\{ \frac{1}{F'_{m,n,0}(a)}, \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)} \right\} .$$

D'où

$$\left| \int_{D_0} \exp(2i\pi k_0 F_{m,n,0}(x_0)) dx_0 \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi |k_0|} \max \left\{ \frac{1}{F'_{m,n,0}(a)}, \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)} \right\}$$

et

$$|i_{m,n}| \leq |\mathfrak{J}_{m,n}| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi |k_0|} \left(\prod_{p \in E} \text{mes } D_p \right) \max \left\{ \frac{1}{F'_{m,n,0}(a)}, \frac{1}{F'_{m,n,0}(b)} \right\} .$$

Il en résulte, comme dans la démonstration de Koksma :

$$I_N \leq \frac{\text{mes } D}{N} + \frac{\sqrt{2}}{\pi |k_0|} \left(\prod_{p \in E} \text{mes } D_p \right) A_N$$

où $A_N \leq \frac{2}{N} (1 + \log N)$.

Soit $N_k = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$). La série de terme général I_{N_k} converge. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2 au groupe $G = V_E(Q)$: il en résulte

$$|\sigma_{N_k}(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty \text{ pour presque tout } x \text{ de } D.$$

La démonstration s'achève comme dans les cas déjà traités.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRANDIAS (Françoise). - Caractérisation des ensembles S_q par la répartition modulo 1 en p-adique, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 17, 1963/64, n° 11, 20 p.
- [2] BERTRANDIAS (Françoise). - Éléments algébriques de l'algèbre $V_E(Q)$, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, t. 5, 1963/64, n° 19, 15 p.
- [3] CIGLER (J.) und HELMBERG (G.). - Neuere Entwicklungen in der Theorie der Gleichverteilung, Jahr. Deutsch. Math. Vereinig., t. 64, 1962, p. 1-50.
- [4] HEWITT (E.) and ROSS (K. A.). - Abstract harmonic analysis. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 115).
- [5] KOKSMA (J. F.). - Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Compositio Mathematica, t. 2, 1935, p. 250-258.