Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Jean-Paul Bertrandias

Le problème de Waring

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 2 (1960-1961), exp. n° 12, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1960-1961__2__A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT
(Théorie des nombres)
2e année, 1960/61, n° 12

24 avril 1961

LE PROBLÈME DE WARING

par Jean-Paul BERTRANDIAS

1. Les nombres $g(k)$ et $G(k)$.

En 1770, WARING énonçait sans démonstration dans un de ses livres que "tout nombre est somme d'au plus 4 carrés, 9 cubes, 19 bicarrés, etc.". Le problème que posait ainsi WARING est celui de la représentation d'un entier positif par une somme d'un nombre fixé s de puissances k^e d'entiers positifs.

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k \quad . \tag{1}$$

On peut énoncer le problème de Waring de la façon suivante :

Est-il possible de trouver un nombre $g(k)$ (ne dépendant que de k) tel que tout entier n puisse se mettre sous la forme (1) avec $s \leqslant g(k)$ et tel qu'il existe au moins un entier n_0 pour lequel la valeur minima s_m de s soit exactement $g(k)$?

C'est seulement en 1909 que HILBERT montre l'existence du nombre $g(k)$ pour tous les entiers k .

Les nombres n , pour lesquels $s_m = g(k)$, sont relativement petits. Par exemple, pour $k = 3$, $g(3) = 9$, et il n'y a que deux nombres pour lesquels $s_m = 9$:

$$n = 23 = 2.2^3 + 7.1^3$$

$$n = 239 = 2.4^3 + 4.3^3 + 3.1^3 \ .$$

Pour le cas où $k = 3$, on a fait des calculs numériques résumés dans le tableau ci-dessous [1]. Chaque colonne correspond à une valeur de s_m , et chaque ligne donne la répartition d'un millier de valeurs entre les différentes valeurs de s_m .

nombre de cubes / milliers	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 .. 1 000	10	41	122	242	293	202	73	15	2
1 000 - 2 000	2	27	113	283	358	194	23		
9 000 .. 10 000	1	17	121	277	401	83	121 nombres dont le plus grand est 8042	15 nombres dont le plus grand est 454	2 nombres : 23 et 239
19 000 .. 20 000	1	12	100	400	426	61			
29 000 .. 30 000	1	11	105	448	388	47			
39 000 .. 40 000	1	13	117	457	384	28			
998 000 - 999 000	0	1	98	640	262	1			
999 000 .. 1 000 000	1	1	94	614	289	1			

L'examen de ce tableau montre l'intérêt d'introduire un autre nombre $G(k)$:

Tout entier suffisamment grand ($n \geq N_0(k)$) est représentable par au plus $G(k)$ puissances k^e , et il existe une infinité d'entiers tels que $s_m = G(k)$.

Le nombre $G(k)$ paraît davantage lié à des propriétés générales des nombres que $g(k)$. Les nombres demandant beaucoup de puissances k^e pour leur représentation apparaissent comme des accidents, et sont relativement petits.

La démonstration de l'existence de $G(k)$ entraîne celle de $g(k)$: connaissant $G(k)$ et $N_0(k)$, il suffira d'examiner la décomposition des nombres inférieurs à $N_0(k)$ pour avoir $g(k)$.

2. Historique du problème [2].

Avant la démonstration de HILBERT, l'existence de $g(k)$ avait été établie pour de petites valeurs de k :

$k = 2$ $\quad g(2) = 4$ $\quad$ LAGRANGE (1770)

$k = 3$ $\quad g(3) = 9$ $\quad$ WIEFRICH (1909)

$k = 4$ $\quad g(4) < 53$ $\quad$ LIOUVILLE (1853)

ainsi que pour $k = 5$, 6 , 7 , 8 et 10 .

La démonstration de HILBERT est uniquement une démonstration d'existence. A l'origine, elle était transcendante (utilisation d'une intégrale à 25 dimensions), mais elle a été rendue complètement algébrique un peu plus tard (Identités entre somme de puiddances k^e). Cette méthode est rapidement trop compliquée pour permettre de trouver une borne supérieure pour $g(k)$.

HARDY et LITTLEWOOD, dans une série d'articles intitulés "Some problems of partio numerorum", publiés entre 1919 et 1928, ont appliqué au problème de Waring la méthode de la fonction génératrice utilisée depuis EULER dans des problèmes de théorie additive des nombres beaucoup plus simples. Cette méthode donne une formule asymptotique pour le nombre de représentations $r(n)$ de n sous la forme (1) (Voir § 3), et donne une borne supérieure pour $G(k)$ qui est de l'ordre de $k2^{k-1}$, lorsque k augmente indéfiniment.

VINOGRADOV, en 1934, a perfectionné la méthode de HARDY et LITTLEWOOD, et a trouvé une meilleure borne pour $G(k)$.

$$G(k) \sim 6k \log k \sim \quad (\text{pour } k \to \infty) \quad .$$

Cette amélioration, et la connaissance d'une borne inférieure pour $g(k)$ [2] :

$$2^k + \widehat{(3/2)^k} - 2 \leqslant g(k)$$

ont permis de déterminer la valeur exacte de $g(k)$ pour toutes les valeurs de k supérieures à 6 (les valeurs exactes de $G(4)$ et $G(5)$ ne sont pas encore donnues).

La dernière amélioration du résultat de VINOGRADOV [7] donne

$$G(k) \sim 2k \log k$$

mais les valeurs exactes de $G(k)$ ne sont pas connues, sauf $G(2) = 4$ et $G(4) = 16$.

3. Principe de la méthode de HARDY et LITTLEWOOD.

a. Définition de la fonction génératrice. - La fonction génératrice pour le problème de Waring est :

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{h^k} \tag{2}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est 1 , et elle représente une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle $|x| = 1$.

Si $r(n)$ est le nombre de représentations de n sous la forme (1), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r(n)\, x^n = [f(x)]^s \tag{3}$$

(avec certaines conventions sur les représentations considérées comme distinctes).

La valeur de $r(n)$ est donnée par l'intégrale de Cauchy :

$$r(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{[f(x)]^s}{x^{n+1}}\, dx \tag{4}$$

C étant un cercle de rayon inférieur à 1 (par exemple $|x| = \exp(-1/n)$).

Pour calculer $r(n)$, il suffit donc d'avoir la valeur de $f(x)$ sur le cercle C ou, au moins, une évaluation assez précise de $f(x)$.

b. Étude de la fonction génératrice au voisinage du cercle de convergence. - Étudions d'abord le comportement de $f(x)$ au voisinage d'un point d'argument $\theta = 2\pi\frac{p}{q}$ (p et q entiers premiers entre eux : $0 < p < q$). Posons

$$\sigma = \exp 2i\pi\frac{p}{q} \qquad \text{et} \qquad x = \sigma X \ .$$

On doit donc étudier $f(\sigma X)$ lorsque X tend vers 1

$$f(\sigma X) = \sum_{h=0}^{\infty} \sigma^{h^k} X^{h^k} \ . \tag{5}$$

On applique à cette série la transformation d'Abel, en posant

$$\tau(m) = \sum_{h=0}^{h^k \leqslant m} \sigma^{h^k} = \sum_{h=0}^{\widehat{m^{1/k}}} \sigma^{h^k} \tag{6}$$

$\widehat{m^{1/k}}$ étant la partie entière de $m^{1/k}$.

On a donc :

$$(7)\qquad \begin{cases} \tau(m) - \tau(m-1) = \varepsilon^{h_0^k} & \text{si } m \text{ est une puissance } k^e \text{ exacte } m = h_0^k \\ \tau(m) - \tau(m-1) = 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

et par conséquent :

$$(8)\qquad \begin{aligned} f(\sigma X) &= \sum_{m=0}^{\infty} [\tau(m) - \tau(m-1)]\, X^m = \sum_{m=0}^{\infty} \tau(m)(X^m - X^{m+1}) \\ f(\sigma X) &= (1 - X) \sum_{m=0}^{\infty} \tau(m)\, X^m \quad . \end{aligned}$$

On cherche ensuite un équivalent de $\tau(m)$ lorsque m augmente indéfiniment.

$\varepsilon^{h^k} = \exp 2i\pi \frac{p}{q} h^k$ est une fonction périodique de h de période q. Soit

$$(9)\qquad S(p , q) = \sum_{h=0}^{q-1} \exp 2i\pi \frac{p}{q} h^k \quad .$$

Si $h_0 = \lambda q + \mu$ (λ et μ entiers, $0 \leqslant \mu < q$), on a

$$(10)\qquad \sum_{h=0}^{h_0} \varepsilon^{h^k} = \lambda S(p , q) + \sum_{h=1}^{\mu} \exp 2i\pi \frac{p}{q} h^k \quad .$$

Donc, d'après (6) :

$$(11)\qquad \begin{aligned} \tau(m) &= \left(\frac{\widehat{(m^{1/k})}}{q} \right) S(p , q) + O(q) \\ \tau(m) &= m^{1/k} \frac{S(p , q)}{q} + K(p , q) \end{aligned}$$

$K(p , q)$ étant une fonction bornée par une fonction ne dépendant que de p et q.

Pour utiliser cet équivalent de $\tau(m)$, on peut se servir d'un théorème de CÉSARO :

THÉORÈME. - <u>Si deux séries entières</u> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = A(X)$ <u>et</u> $\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n = B(X)$ <u>ont le cercle</u> $|X| = 1$ <u>pour cercle de convergence et si</u> :

1° $b_n \geqslant 0$

2° $\sum_{n=0}^{N} b_n \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$

3° $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

alors $\frac{A(X)}{B(X)}$ tend vers ℓ lorsque X tend vers 1 par valeurs inférieures.

On notera $A(X) \sim \ell . B(X)$.

D'après (8) et (11) :

$$\frac{f(\sigma X)}{1 - X} \approx \frac{S(p , q)}{q} \sum_{m=0}^{\infty} m^{1/k} X^m \quad . \tag{12}$$

Or, d'autre part

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^{1/k} X^m \approx \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{k})}{(1 - X)^{(1/k)+1}} \tag{13}$$

car le coefficient de X^m dans le développement de la seconde fonction est :

$$\frac{1}{m!} (\tfrac{1}{k} + 1)(\tfrac{1}{k} + 2) \ldots (\tfrac{1}{k} + m) \tag{14}$$

et on sait que

$$\Gamma(1 + \tfrac{1}{k}) = \lim_{m \to \infty} \frac{m ! \, m^{1/k}}{(\frac{1}{k} + 1)(\frac{1}{k} + 2) \ldots (\frac{1}{k} + m)} \quad \text{(formule de Gauss).} \tag{15}$$

Donc lorsque X tend vers 1 , la fonction $f(\sigma X)$ se comporte comme la fonction

$$\varphi_{p,q}(X) = \frac{S(p , q)}{q} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{k})}{(1 - X)^{1/k}} \tag{16}$$

et $[f(\sigma X)]^s$ se comporte comme $\left(\frac{S(p , q)}{q}\right)^s \frac{[\Gamma(1 + \frac{1}{k})]^s}{(1 - X)^{s/k}}$.

En utilisant encore la formule de Gauss, et en revenant à la variable x , on peut donc dire que la fonction $[f(x)]^s$ se comporte au voisinage du point

$$x = \sigma = \exp 2i\pi \frac{p}{q}$$

comme la fonction

$$\psi^{(s)}_{p,q}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(1 + \frac{1}{k})]^s}{\Gamma(\frac{s}{k})} m^{(s/k)-1} \left(\frac{S(p , q)}{q}\right)^s \frac{x^m}{\sigma^m} \tag{17}$$

Les points du cercle $|x| = 1$ d'argument rationnel (modulo 2π) sont donc des points singuliers pour la fonction $f(x)$; elle tend vers l'infini comme

$\frac{1}{(\sigma - x)^{1/k}}$ (si $S(p , q) \neq 0$).

Pour un point d'argument irrationnel (modulo 2π), $\theta = 2\pi\alpha$, le théorème de Weyl sur la répartition modulo 1 de αh^k donne :

$$\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \exp 2i\pi\alpha h^k = 0 \tag{18}$$

(0 au lieu de $\frac{S(p\ ,\ q)}{q}$ dans le cas rationnel). Le raisonnement fait ci-dessus montre que $f(x)$ est d'un ordre inférieur à celui de $\frac{1}{((\exp 2i\pi\alpha) - x)^{1/k}}$.

c. "Décomposition de $[f(x)]^s$ en éléments simples". - Les points d'argument rationnel sont donc un peu plus "singuliers" que les autres, et on peut penser qu'il est possible de reconstituer la fonction $[f(x)]^s$ en sommant les fonctions $\psi^{(s)}_{p,q}(x)$ pour toutes les valeurs possibles de p et q : on aurait ainsi une sorte de décomposition de $[f(x)]^s$ en éléments simples (sous réserve de convergence):

$$[f(x)]^s \sim \sum_{m=0}^{\infty} x^n\, n^{(s/k)-1}\, \frac{[\Gamma(1+\frac{1}{k})]^s}{\Gamma(\frac{s}{k})} \sum\sum \left(\frac{S(p\ ,\ q)}{q}\right)^s \exp(-2i\pi \frac{p}{q} n) \ . \tag{19}$$

Il apparaît ainsi les séries :

$$\mathfrak{S}(n\ ,\ s) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{p \not| q \\ p<q}} \left(\frac{S(p\ ,\ q)}{q}\right)^s \exp(-2i\pi \frac{p}{q} n) \tag{20}$$

qui sont appelées "séries singulières".

D'après la formule (3) le nombre de représentations serait asymptotiquement

$$r(n) \sim \frac{[\Gamma(1+\frac{1}{k})]^s}{\Gamma(\frac{s}{k})}\ n^{(s/k)-1}\ \mathfrak{S}(n\ ,\ s) = r^*(n) \ . \tag{21}$$

d. Principe de la démonstration de HARDY et LITTLEWOOD [4]. - Cette formule asymptotique a été démontrée rigoureusement par HARDY et LITTLEWOOD, et est à la base de leur démonstration de l'existence de $G(k)$.

Ils montrent que, si s est supérieur à une certaine valeur s_0 et si $n > n_0$, on a

$$|r(n) - r^*(n)| = O(n^{(s/k)-1-\gamma}) \qquad \text{avec } \gamma > 0 \tag{22}$$

et

$$\mathfrak{S}(n\ ,\ s) > \eta > 0 \ . \tag{23}$$

Par conséquent, pour n assez grand ($n > N$), on a certainement $r(n) > 0$ et, comme $r(n)$ est entier, $r(n) \geq 1$. Alors tous les nombres supérieurs à N sont

représentables d'au moins une façon par une somme de s_0 puissances k^e, et donc

$$G(k) \leqslant s_0 \quad .$$

La démonstration des formules (22) et (23) se fait en plusieurs étapes.

D'abord, on peut remarquer que dans l'expression de $\mathfrak{S}$ (20), les termes les plus importants sont ceux qui correspondent aux petites valeurs de q. Au voisinage des points correspondants, on cherchera à approcher $f(x)$ par les fonctions $\varphi_{p,q}(\frac{x}{\sigma})$. Il sera commode de décomposer le cercle $C(|x| = \exp(-1/n))$ en arcs de Farey correspondant aux fractions $\theta = \frac{p}{q}$ telles que p et q soient inférieurs à $n^{1-\alpha}$ (α étant un nombre choisi : $0 < \alpha < \frac{1}{k}$). On classera les arcs en deux catégories :

- les "arcs majeurs" $\mathfrak{M}$ correspondant aux petites valeurs de q : $q < n^{\alpha}$;
- les "arcs mineurs" $\mathfrak{m}$: $n^{\alpha} < q < n^{1-\alpha}$.

Première étape. - Sur les arcs mineurs, on peut majorer directement $f(x)$, si s est assez grand ($s = (k-2)\,2^{k-1} + 4$), en appliquant aux $\tau(\mathfrak{m})$ le lemme de Weyl sur les sommes trigonométriques.

LEMME DE [illegible] - Si $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$, on a

$$|\sum_{\nu=1}^{P} \exp 2i\pi\alpha\nu^k| < K P^{1+\varepsilon} q^{\varepsilon} (\frac{1}{P} + \frac{1}{q} + \frac{q}{P^k})^{1/(2^{k-1})} \tag{24}$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

On obtient alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{m}} \frac{[f(x)]^s}{x^{n+1}}\, dx = O(n^{(s/k)-1-\gamma_1}) \quad .$$

D'après (22) et (4), il reste donc à démontrer que :

$$|r(n) - \frac{1}{2i\pi} \sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{M}} \frac{[f(x)]^s}{x^{n+1}}\, dx| = O(n^{(s/k)-1-\gamma_2}) \tag{25}$$

Le lemme de Weyl permet d'autre part d'obtenir une majoration de $S(p, q)$ et par suite l'inégalité (23). Mais pour cette inégalité, le lemme n'est pas essentiel car on peut obtenir directement une majoration meilleure de $S(p, q)$ (Voir : § 5, (38)).

Deuxième étape. - Sur les arcs majeurs, on peut approcher $f(x)$ par les fonctions $\varphi_{p,q}(\frac{x}{\sigma})$ correspondant à chaque arc, ce qui revient à préciser les équivalences (12) et (13). Après avoir montré que le terme d'erreur est suffisamment petit, on

est ramené à démontrer que :

$$(26) \qquad \left| r(n) - \frac{1}{2i\pi} \sum_{m} \int_{\mathfrak{M}} \frac{\left[\varphi_{p,q}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]^s}{x^{n+1}} \, dx \right| = O\left(n^{(s/k)-1-\gamma_3}\right)$$

Troisième étape. - On montre ensuite qu'on peut étendre les intégrations de la formule (26) au cercle C tout entier :

$$(27) \qquad \left| r(n) - \frac{1}{2i\pi} \sum_{m} \int_{C} \frac{\left[\varphi_{p,q}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]^s}{x^{n+1}} \, dx \right| = O\left(n^{(s/k)-1-\gamma_4}\right)$$

Quatrième étape. Les intégrales le long de C sont faciles à calculer

$$(28) \qquad \frac{1}{2i\pi} \int_{C} \frac{\left[\varphi_{p,q}\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]^s}{x^{n+1}} \, dx = \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} \left(\frac{S(p, q)}{q}\right)^s \frac{\Gamma\left(\frac{s}{k} + n\right)}{n\,!} \, \sigma^{-n} \, .$$

Si on remplace dans cette expression $\frac{\Gamma\left(\frac{s}{k} + n\right)}{n\,!}$ par $n^{(s/k)-1}$ (en précisant (15)), on est ramené à démontrer :

$$(29) \qquad \left| r(n) - \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} \, n^{(s/k)-1} \sum_{q<n^{\alpha}} \sum_{\substack{p \not| q \\ p<q}} \left(\frac{S(p, q)}{q}\right)^s \sigma^{-n} \right| = O\left(n^{(s/k)-1-\gamma_5}\right)$$

Cinquième étape. - Il ne reste plus qu'à remplacer $\sum_{q<n^{\alpha}}$ par $\sum_{q=1}^{\infty} = 6$, ce qui est facile, car, pour les valeurs choisies de s et n , la série $\sum_{q}$ est absolument convergente. On a donc finalement

$$\left| r_n - \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)} \, n^{(s/k)-1} \, 6(n , s) \right| = O\left(n^{(s/k)-1-\gamma_6}\right)$$

qui est bien la formule (22).

4. La méthode de VINOGRADOV [6], [3].

VINOGRADOV améliore la démonstration de HARDY et LITTLEWOOD surtout sur deux points

a. On remarque que pour représenter n sous la forme (1), on n'a pas besoin de nombres x_i supérieurs à $n^{1/k}$. Il sera plus simple d'opérer sur des sommes $\sum^{\widehat{n^{1/k}}} x^{h^k}$ que sur la fonction f(x) . En particulier, on pourra prendre le cercle $|x| = 1$ comme cercle d'intégration et la formule (4) s'écrira :

$$(30) \qquad r(n) = \int_0^1 \left(\sum_{h=0}^{n^{1/k}} \exp 2i\pi\alpha h^k \right)^s \exp(-2i\pi n\alpha)\, d\alpha$$

b. La valeur relativement grande de la borne de $G(k)$ trouvée par HARDY et LITTLEWOOD provient surtout de l'étape 1 (majoration de $f(x)$ sur les arcs mineurs). La puissance de 2 qui intervient provient d'une application répétée de l'inégalité de Schwarz dans la démonstration du lemme de Weyl. VINOGRADOV remplace ce lemme par un autre, d'application beaucoup moins directe, mais qui n'utilise qu'une fois l'inégalité de Schwarz.

LEMME DE VINOGRADOV. - Si $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{q^2}$ $(p , q) = 1$, $q > 1$,
et si ξ parcourt H nombres entiers d'un intervalle de longueur X
η parcourt K nombres entiers d'un intervalle de longueur Y ,
on a :

$$(31) \qquad \Big|\sum_{\xi}\sum_{\eta} \exp 2i\pi\alpha\xi\eta\Big|^2 = O\Big[HKXY \frac{\log q}{q} \Big(1 + \frac{q}{X}\Big)\Big(1 + \frac{q}{Y}\Big)\Big] \quad .$$

Le résultat de VINOGRADOV est finalement :

$$G(k) < k(3 \log k + 11) \qquad \text{dans [6]}$$

pour $k \geqslant 3$. La majoration la plus précise est :

$$G(k) < k[2 \log k + 4 \log\log k + 2 \log\log\log k + 13]$$

pour k assez grand [7].

5. Interprétation de l'expression asymptotique de $r(n)$.

a. Factorisation de $\mathfrak{S}(n , s)$.

α. DÉFINITIONS.

$$(9) \qquad S(a , q) = \sum_{h=0}^{q-1} \exp 2i\pi \frac{a}{q} h^k$$

$$(32) \qquad A(q , n , s) = \sum_{\substack{a \\ a<q}}^{\prime} \left(\frac{S(a , q)}{q}\right)^s \exp\Big(-2i\pi \frac{a}{q} n\Big) \quad .$$

Donc

$$(33) \qquad \mathfrak{S}(n , s) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q , n , s)$$

(sous réserve de convergence)

$$(34) \qquad \psi(p\ ,\ n\ ,\ s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A(p\ ,\ n\ ,\ s)$$

(sous réserve de convergence) p étant un nombre premier.

$$(35) \qquad \begin{aligned} &M(m\ ,\ n\ ,\ s) = \text{nombre de solutions de la congruence} \\ &w_s = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k \equiv n \mod m\ . \end{aligned}$$

β. LEMMES. - On démontre facilement les lemmes suivants [6] :

LEMME I (Propriétés multiplicatives des fonctions S et A). - Si $q_1, q_2, \ldots, q_j$ sont des entiers premiers entre eux, et si on pose

$$Q_s = q_1\ q_2 \ldots q_j \cdot \frac{1}{q_s} \qquad \text{pour} \quad s = 1\ ,\ \ldots\ ,\ j\ ,$$

on a

$$(36) \qquad S(a_1\ ,\ q_1)\ S(a_2\ ,\ q_2) \ldots S(a_j\ ,\ q_j) = S(a_1\ Q_1 + \ldots + a_j\ Q_j\ ,\ q_1 \ldots q_j)$$

$$(37) \qquad A(q_1\ ,\ n\ ,\ s)\ A(q_2\ ,\ n\ ,\ s) \ldots A(q_j\ ,\ n\ ,\ s) = A(q_1\ q_2 \ldots q_j\ ,\ n\ ,\ s).$$

LEMME II (Majoration des fonctions S et A). - On a

$$(38) \qquad |S(p\ ,\ q)| < k^{k^6}\ q^{1-(1/k)}$$

$$(39) \qquad |A(q\ ,\ n\ ,\ s)| < k^{sk^6}\ q^{1-(r/k)} \qquad .$$

LEMME III (Rapports entre les fonctions A , ψ , et M). - On a

$$(40) \qquad \sum_{q|m} A(q\ ,\ n\ ,\ s) = m^{-(s-1)}\ M(m\ ,\ n\ ,\ s)$$

CONSÉQUENCE. - D'après (34) :

$$(41) \qquad \psi(p\ ,\ n\ ,\ s) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{M(p^\lambda\ ,\ n\ ,\ s)}{p^{\lambda(s-1)}}$$

γ. THÉORÈME (Factorisation de $\mathfrak{S}(n\ ,\ s)$). - Si $s \geqslant 2n + 1$, les séries $\mathfrak{S}(n\ ,\ s)$ et $\psi(p\ ,\ n\ ,\ s)$ sont absolument convergentes, et on a :

$$(42) \qquad \mathfrak{S}(n\ ,\ s) = \prod_{p} \psi(p\ ,\ n\ ,\ s)$$

le produit étant étendu à toutes les valeurs du nombre premier p .

Les convergences absolues proviennent du lemme II.

La formule (42) provient du lemme I et de la convergence absolue de la série $\mathfrak{S}$.

b. Interprétation de la formule (21) [5].

$$r(n) \sim \frac{\left[\Gamma(1+\frac{1}{k})\right]^s}{\Gamma(\frac{s}{k})}\ n^{(s/k)-1}\ \mathfrak{S}(n\ ,\ s) = \delta . \mathfrak{S}(n\ ,\ s) \quad .$$

Le terme δ est la dérivée par rapport à n du volume V_n de l'espace à s dimensions défini par :

$$\rho_{h,s} = x_1^k + \ldots + x_s^k \leqslant n \quad ,$$

$$\delta = \frac{d}{dn} V_n \to \mathfrak{S}(n\ ,\ s) \sim \frac{r(n)\ dn}{dV_n}$$

$\mathfrak{S}$ apparaît donc comme une sorte de densité des solutions de l'équation $w_s = n$ dans le réseau $\mathcal{R}_s$ des points à coordonnées entières de l'espace à s dimensions.

De manière plus intuitive : δ est à peu près le volume de la zone Z_n définie par $n - \frac{1}{2} \leqslant \rho_{k,s} \leqslant n + \frac{1}{2}$. Dans cette zone, il serait donc "normal" qu'il y ait δ points à coordonnées entières. Or ces points sont tous sur $\rho_{k,s} = n$, et il y en a exactement $r(n)$. $\mathfrak{S} \sim \frac{r(n)}{\delta}$ est donc le rapport du nombre de points de $\mathcal{R}_s$ existant effectivement dans la zone Z_n et le nombre "normal" de points pouvant s'y trouver.

c. Interprétation de la factorisation de $\mathfrak{S}(n\ ,\ s)$. - La formule (41) permet d'interpréter aussi la fonction $\psi(p\ ,\ n\ ,\ s)$ comme "densité" des solutions entières de $w_s = n$ dans le corps Q_p des nombres p-adiques.

En effet, considérons les solutions en entiers p-adiques de l'équation $w_s = n$, et représentons-les par les développements :

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{11}\ p + \ldots + \alpha_{1\lambda}\ p^{\lambda} + \ldots \\ &\ldots \\ x_s &= \alpha_{s0} + \alpha_{s1}\ p + \ldots + \alpha_{s\lambda}\ p^{\lambda} + \ldots \end{aligned} \qquad \text{avec } 0 \leqslant \alpha_{ij} < p \quad .$$

Si on arrête le développement à l'ordre $\lambda - 1$, on constate que les nombres

$$x_i^{(\lambda)} = \sum_{j=0}^{\lambda-1} \alpha_{ij}\ p^j \qquad (i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ s)$$

sont solutions de l'équation $w_s \equiv n$ modulo p^{λ} , et que, par conséquent, il y a

au plus $M(p^\lambda , n , s)$ systèmes de nombres $x_i^{(\lambda)}$ différents. Il est facile de voir qu'il en a exactement $M(p^\lambda , n , s)$, si $\lambda > \lambda_0$ (λ_0 étant l'exposant de la plus grande puissance de p contenue dans n). Il y a donc en général une infinité de solutions entières p-adiques de l'équation $w_s = n$; on peut définir la "densité" des solutions entières de $w_s = n$ dans Q_p comme la limite lorsque λ augmente indéfiniment du nombre exact de solutions de l'équation $w_s \equiv n$ modulo p^λ [qui est $M(p^\lambda , n , s)$] au nombre "normal" de solutions de cette congruence. Ce nombre normal est $p^{\lambda(s-1)}$, car il y a $p^{\lambda s}$ systèmes de nombres $x_i^{(\lambda)}$ différents qui se répartiraient uniformément entre les p^s équations : $w_s \equiv 0$, $w_s \equiv 1$, ... , $w_s \equiv p^\lambda - 1$. D'après (41), cette "densité" est $\psi(p , n , s)$.

La formule (42)

$$\mathfrak{S}(n , s) = \prod_p \psi(p , n , s)$$

donne donc la densité des solutions en entiers naturels de $w_s = n$ dans le corps des nombres réels comme produit des densités des solutions en entiers p-adiques de la même équation dans les corps Q_p pour toutes les valeurs de p .

BIBLIOGRAPHIE

[1] HARDY (G. H.). - Trois problèmes célèbres de la théorie des nombres ... (Traduit de l'anglais par A. Sallin). - Paris, Presses universitaires de France, 1931.

[2] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 3d edition. - Oxford, Clarendon Press, 1954.

[3] HEILBRONN (Hans). - Über das Waringsche Problem, Acta Arithmetica, t. 1, 1936, p. 212-221.

[4] LANDAU (Edmund). - Vorlesungen über Zahlentheorie, Vol. 1. - Leipzig, Hirzel, 1927 (Reprinted : New York, Chelsea publishing Company, 1947).

[5] RADEMACHER (Hans). - Trends in research : The analytic number theory, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 379-401.

[6] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometric sums in the theory of numbers [Traduit du russe par K. F. Roth et Anne Davenport]. - London, Interscience Publishers, 1947.

[7] VINOGRADOV (I. M.). - Sur une borne supérieure pour G(n) [en russe], Izv. Akad. Nauk S. S. S. R., t. 23, 1959, p. 637-642.

[8] WEYL (Hermann). - Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins, Math. Ann., t. 77, 1916, p. 313-352.