

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Ensembles K-analytiques et fonctions croissantes de compacts

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C1, p. C1-C2

[<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A6_0>](http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A6_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ENSEMBLES $\mathcal{K}$ -ANALYTIQUES ET FONCTIONS CROISSANTES DE COMPACTS

par Michel TALAGRAND

Désignons par $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts d'un espace topologique X . Le théorème suivant est dû à G. CHOQUET.

THÉOREME 1. - Soient X un espace polonais, et Y un espace compact dans lequel tout point admet une base dénombrable de voisinages. Soit f une application croissante de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{K}(Y)$. Alors, $f(X) = \bigcup \{f(K) ; K \in \mathcal{K}(X)\}$ est $\mathcal{K}$ -analytique.

Démonstration. - Soit d une distance sur X qui en fait, est un espace métrique complet. Pour $K \in \mathcal{K}(X)$, posons

$$B(K, n^{-1}) = \{x \in X ; d(x, K) \leq n^{-1}\},$$

puis

$$h(K) = \bigcap_n \overline{\bigcup \{f(L) ; L \in \mathcal{K}(X), L \subset B(K, n^{-1})\}}.$$

C'est un ensemble compact. Pour tout voisinage V de $h(K)$, il existe un n tel que, si $L \in B(K, n^{-1})$, on ait $h(L) \subset V$. Ceci montre que, si l'on munit $\mathcal{K}(X)$ de la topologie donnée par la distance de Hausdorff, l'application $L \rightarrow h(L)$ est semi-continue supérieurement. Puisque $\mathcal{K}(X)$ est polonais, il en résulte [1] que $h(X) = \bigcup \{h(K) ; K \in \mathcal{K}(X)\}$ est $\mathcal{K}$ -analytique. Il reste à montrer que $h(X) = f(X)$. Il est clair que $f(X) \subset h(X)$. Soient $y \in h(X)$, et $K \in \mathcal{K}(X)$, tels que $y \in h(K)$. Soit (V_n) une suite de voisinages de y . Pour tout n , il existe $L_n \subset B(K, n^{-1})$, tel que $V_n \cap f(L_n) \neq \emptyset$. Mais $L = K \cup \bigcup_n L_n$ est compact, et puisque f est croissante, on a $V_n \cap f(L) \neq \emptyset$, pour tout n , donc $y \in f(L)$.

C. Q. F. D.

Le but de cette communication est de montrer que, si le compact Y ne vérifie pas la condition du théorème 1, alors $f(X)$ n'est pas nécessairement $\mathcal{K}$ -analytique, et même peut ne pas être de Lindelöf, ni universellement mesurable.

Soit $\Sigma = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, munie de l'ordre produit et de la topologie usuelle (pour laquelle il est polonais). Pour $\sigma \in \Sigma$, posons

$$E_\sigma = \{(a_p) \in [0, 1]^\Sigma ; (p \geq \sigma) \implies (a_p = 0)\}.$$

C'est un ensemble compact. Pour $\sigma \leq \sigma'$, on a $E_\sigma \subset E_{\sigma'}$. Posons $E = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} E_\sigma$. Tout compact de Σ est majoré pour l'ordre. Il en résulte que E est image de $\mathcal{K}(\Sigma)$ par l'application croissante donnée par $f(K) = \bigcap_{K \leq \sigma} E_\sigma$.

Prouvons que E n'est pas de Lindelöf. Pour $\sigma \in \Sigma$, posons

$$V_\sigma = \{(a_\rho) \in \{0, 1\}^\Sigma; a_\sigma = 0\}.$$

C'est un ouvert de $\{0, 1\}^\Sigma$. Puisque $E_\sigma \subset V_\sigma$, on a $E \subset \bigcup_\sigma V_\sigma$. Montrons que si D est une partie dénombrable de Σ , on n'a pas $E \subset \bigcup_{\sigma \in D} V_\sigma$, ce qui établira que E n'est pas de Lindelöf. Il existe, en effet, $\tau \in \Sigma$ tel que $\tau \not\leq \sigma$, pour $\sigma \in D$ (par exemple, si τ croît plus vite que tout élément de D). L'élément $(a_\rho) \in \{0, 1\}^\Sigma$, défini par

$$a_\rho = 1 \iff \rho \in D,$$

n'appartient à aucun V_σ , pour $\sigma \in D$. Mais il appartient à E puisqu'il appartient à E_τ .

Prouvons que E n'est pas mesurable pour la mesure canonique m de $\{0, 1\}^\Sigma$. Nous allons utiliser le fait classique suivant. Si K est un compact de $\{0, 1\}^\Sigma$ de mesure > 0 , il existe une partie dénombrable D de Σ , et un compact L de $\{0, 1\}^D$ tels que, si on désigne par π_D la projection canonique de $\{0, 1\}^\Sigma$ sur $\{0, 1\}^D$, on ait

$$\pi_D^{-1}(L) \subset K, \text{ et } m(\pi_D^{-1}(L)) = m(K).$$

Ceci montre déjà que tout compact K de $\{0, 1\}^\Sigma$, qui est de mesure > 0 , contient un élément qui n'a qu'un nombre plus dénombrable de composantes non nulles. Puisque tout élément de E a un nombre non dénombrable de composantes nulles, on a $K \not\subset E$, donc $m_*(E) = 0$. D'autre part, pour toute partie dénombrable D de Σ , il existe $\tau \in \Sigma$, tel que, pour $\sigma \in D$, on ait $\tau \not\leq \sigma$. Il en résulte que $\pi_D(E_\sigma) = \{0, 1\}^D$, et donc que E rencontre tout compact K de mesure > 0 , c'est-à-dire que $m^*(E) = 1$, ce qui prouve que E n'est pas mesurable pour m .

Signalons pour terminer le résultat suivant, qui est une reformulation de la proposition 6.13 de [2]. On désigne par p la topologie de la convergence ponctuelle.

THÉORÈME 2. - Soit Z un espace compact. S'il existe un espace polonais X , et une application à valeurs compactes croissante de $\mathcal{K}(X)$ sur $\mathcal{C}_p(Z, \{0, 1\})$, alors $\mathcal{C}_p(Z)$ est $\mathcal{K}$ -analytique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FROLIK (Z.). - A survey of separable descriptive theory of sets and spaces, Czechoslovak math. J., t. 20 (95), 1970, p. 406-467.
- [2] TALAGRAND (M.). - Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$ -analytiques (à paraître).

(Texte reçu le 2 novembre 1977)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05