

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GILLES GODEFROY

Quelques remarques sur la propriété (C) des espaces de Banach

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 17, n° 2 (1977-1978), exp. n° C10, p. C1-C3

[<http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A15_0>](http://www.numdam.org/item?id=SC_1977__17_2_A15_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES SUR LA PROPRIÉTÉ (C) DES ESPACES DE BANACH

par Gilles GODEFROY

H. H. CORSON a défini dans [1] la propriété (C) des espaces de Banach de la façon suivante : Toute famille $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ des convexes fermés de E telle que, pour tout $I \subseteq A$ dénombrable, on ait $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset$, vérifie $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$.

Tout espace de Banach E , qui est Lindelöf pour sa topologie faible, a la propriété (C), la réciproque étant fausse, comme l'a montré R. POL [3].

R. POL a montré, en particulier dans [3], le résultat suivant.

PROPOSITION 1. - Soit E un espace de Banach. On a l'équivalence :

1° E a la propriété (C).

2° La boule unité $B_1(E')$ de E' , munie de la topologie $\sigma(E', E)$, a la propriété (C') :

Si $x' \in \bar{A}'$ ($A' \subset B_1(E')$), alors il existe $C' \subset A'$ dénombrable, tel que $x' \in \overline{\text{conv}}(C')$.

On peut déduire de cette proposition un certain nombre de résultats. Rappelons tout d'abord qu'un compact K est dit un compact de Rosenthal si K est homéomorphe à un compact de fonctions de 1re classe sur un polonais, muni de la topologie de la convergence simple. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Soit K un compact de Rosenthal. Alors, l'espace $C(K)$ a la propriété (C).

Démonstration. - Soit $\mathcal{M}^1(K)$ le compact des mesures de masse inférieure ou égale à 1 sur K . Il est démontré dans [2] que, si K est un compact de Rosenthal, alors $\mathcal{M}^1(K)$ est un compact de Rosenthal. En particulier, $\mathcal{M}^1(K)$ est angélique, donc a fortiori $\mathcal{M}^1(K)$ vérifie la propriété (C') de la proposition 1. Donc $C(K)$ a la propriété (C).

C. Q. F. D.

En particulier, soit H l'espace de Helly, i. e. l'espace des fonctions croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même, muni de la topologie de la convergence simple. Le compact H est évidemment un compact de Rosenthal, donc $C(H)$ a la propriété (C); ce qui répond à une question de R. POL ([3], 3.3, exemple 4).

On peut encore énoncer le curieux résultat suivant. On notera $\text{Bor}(E, E')$ la tribu "cylindrique" d'un Banach E , c'est-à-dire la tribu engendrée par les formes linéaires continues. Un espace mesurable (X, Σ) est dit souslinien s'il est borel-isomorphe à un analytique de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 3. - Soit E un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Si l'espace $(E, \text{Bor}(E, E'))$ est souslinien, alors E a la propriété (C).

Démonstration. - Il est démontré dans [2] que $(E, \text{Bor}(E, E'))$ est souslinien si, et seulement si, $B_1(E')$ est un compact de Rosenthal. Les compacts de Rosenthal étant angéliques, $B_1(E')$ vérifie alors a fortiori la propriété (C'); et E vérifie donc la propriété (C).

C. Q. F. D.

Terminons par une caractérisation des duals d'espaces de Banach séparables qui ne contiennent pas $\ell^1(\mathbb{N})$.

PROPOSITION 4. - Soit E un Banach séparable. On a l'équivalence

1° E ne contient pas de sous-espace isomorphe à $\ell^1(\mathbb{N})$.

2° E' a la propriété (C).

Démonstration.

1° $\implies$ 2° : Si $E \not\subset \ell^1(\mathbb{N})$, alors $(B_1(E''), \sigma(E'', E'))$ est un compact de Rosenthal, et est donc angélique, et, par conséquent, E' a la propriété (C).

2° $\implies$ 1° : Si $E \supset \ell^1(\mathbb{N})$, alors $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est quotient de E'. Or la propriété (C) est stable par quotient, et on vérifie facilement que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'a pas la propriété (C).

C. Q. F. D.

Remarques. - Le résultat ci-dessus met bien en évidence le fait que la classe des duals d'espaces séparables, ne contenant pas $\ell^1(\mathbb{N})$, étend de façon naturelle la classe des duals séparables.

On a montré en fait qu'un dual E' d'un espace séparable avait la propriété (C) si, et seulement si, il avait une propriété a priori plus forte, à savoir l'angélicité de la boule unité préfaible de son dual.

On déduit du résultat ci-dessus le résultat suivant : Si E' est dual d'un espace séparable E, on a "E' faiblement-asplund" implique "B₁(E'') est $\sigma(E'', E')$ -séquentiellement compact" qui implique " $E \not\subset \ell^1(\mathbb{N})$ " qui implique "E' a la propriété (C)". Donc en résumé, "E' faiblement-asplund" implique "E' a la propriété (C)". Cette implication restera vraie pour un espace F tel qu'il existe une partie D dénombrable de B₁(F'), dense dans $(B_1(F'), \sigma(F', F))$, et telle que la tribu engendrée par D sur F soit souslinienne. C'est là, je crois, un phénomène général : Les résultats démontrés, pour les espaces duals, doivent s'étendre, dans un certain nombre de cas, aux espaces F tels qu'il existe une partie P de F' telle que la topologie de la convergence simple sur P ait de "bonnes" propriétés topologiques ou boréliennes. Dans le cas des espaces duals, il s'agit de la compacité de B₁(F).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CORSON (H. H.). - The weak topology of a Banach space, Trans. Amer. math. Soc., t. 101, 1961, p. 1-15.
- [2] GODEFROY (G.). - Compacts de Rosenthal, Thèse 3e cycle, Université Pierre et Marie Curie, 1977 (à paraître).
- [3] POL (R.). - On a question of H. H. CORSON and some related problems, 1978 (Preprint).

(Texte reçu le 29 juin 1978)

Gilles GODEFROY
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05
