

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GILLES GODEFROY

**Espaces vectoriels de codimension finie ou dénombrable
dans un espace de Banach**

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C4, p. C1-C2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A14_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES VECTORIELS DE CODIMENSION FINIE OU DÉNOMBRABLE
 DANS UN ESPACE DE BANACH

par Gilles GODEFROY

On va démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Soient E un espace de Banach, H un sous-espace vectoriel (s. e. v.) de E de codimension finie ou dénombrable. Alors H est tonnelé pour la topologie induite.

Démonstration. - On peut supposer que $\overline{H} = E$. Soient X un tonneau de H , et $\overline{X}$ sa fermeture dans E . L'espace vectoriel engendré par $\overline{X}$ est

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n\overline{X}) .$$

C'est un sous-espace vectoriel de E , qui contient H . De plus, V est un $\mathfrak{S}_\sigma$. On a alors $V = E$. En effet, on a le résultat suivant.

LEMME 2. - Soient E un espace de Banach, V un s. e. v. de E , borélien, et de codimension finie ou dénombrable. Alors V est fermé.

Il suffit pour démontrer ce lemme de démontrer que, pour tout sous-espace fermé séparable F de E , l'espace $F \cap V$ est fermé. Or $F \cap V$ est un borélien de F , donc un analytique ; c'est de plus un sous-espace de codimension finie ou dénombrable. Or on déduit aisément du théorème du graphe analytique la proposition suivante (voir [1], p. 75) :

Soient E un Banach, F et G des s. e. v. analytiques tels que $E = F \oplus G$. Alors F et G sont fermés. Le lemme 2 s'ensuit immédiatement.

Puisque $V = E$, l'ensemble $\overline{X}$ est un tonneau de E . Par conséquent, $\overline{X}$ est un voisinage de 0 dans E ; et $\overline{X} \cap H = X$ est un voisinage de 0 dans H .

C. Q. F. D.

Remarque 3. - Ce résultat permet de voir que le théorème du graphe fermé ne peut se généraliser aux espaces tonnelés ; il suffit de considérer H un hyperplan non fermé d'un Banach E , une droite D supplémentaire, et l'espace $H \times D$ qui est tonnelé. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : H \times D &\longrightarrow E \\ (x, x') &\longmapsto x + x' \end{aligned}$$

est une bijection continue entre espaces tonnelés qui n'est pas bicontinue.

Remarque 4. - La question suivante reste posée :

Existe-t-il des hyperplans non fermés dans un Banach E qui ne soient pas des espaces de Baire ? Le résultat ci-dessus ne résoud pas la question, puisqu'il existe des espaces normés tonnelés qui ne sont pas de Baire (par exemple, dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$, l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des parties de $\mathbb{N}$, voir [2], p. 198).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHRISTENSEN (J.). - Topology and Borel structure. - Amsterdam, North-Holland publishing Company ; New York, American Elsevier publishing Company, 1974 (North-Holland Mathematics Studies, 10 ; Notas de Matematica, 51).
- [2] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1958.

(Texte reçu le 30 janvier 1976)

Gilles GODEFROY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05
