

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MICHEL TALAGRAND

Sélection mesurable de mesures maximales

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 15 (1975-1976), exp. n° C3, p. C1-C4

http://www.numdam.org/item?id=SC_1975-1976__15__A13_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SÉLECTION MESURABLE DE MESURES MAXIMALES

par Michel TALAGRAND

Soit X un convexe compact d'un e. l. c. s. Pour chaque $x \in X$, notons M_x l'ensemble des mesures maximales (pour l'ordre de CHOQUET) qui représentent x , et M'_x l'ensemble des points extrémaux de M_x . Dans le cas où X est métrisable, l'existence d'une sélection borélienne $x \mapsto m_x \in M_x$ (resp. M'_x) a été établie dans [1] par M. RAO (resp. dans [2] par W. SMITH).

Nous allons exposer une méthode très élémentaire qui permet d'améliorer ces résultats.

Notons $S(X)$ l'ensemble des fonctions convexes continues sur X . L'espace $M_+^1(X)$ des probabilités sur X sera toujours muni de la topologie faible. La résultante d'une mesure $\mu \in M_+^1(X)$ sera notée $r(\mu)$.

THÉOREME 1. - Supposons X métrisable. Il existe alors une sélection borélienne $x \mapsto m_x \in M_x$, de première classe de Baire.

Démonstration. - $S(X)$ est séparable. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partie totale de $S(X)$ formée de fonctions de norme ≤ 1 .

Soit h l'application $\mu \mapsto (r(\mu), (\mu(f_n))_n)$ de $M_+^1(X)$ dans $E \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Elle est affine continue. Son image est donc un convexe compact K , qui est contenu dans $X \times [-1, 1]^{\mathbb{N}}$, puisque $\|f_n\| \leq 1$ pour tout n . Cette application est injective, puisque $S(X)$ étant total dans $C(X)$, la famille $(f_n)_n$ est aussi totale dans $C(X)$.

Désignons par π (resp. π_n) la projection canonique de $E \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur E (resp. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sur le n -ième facteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Soit ξ la fonction numérique continue $(y_n) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}(1 - y_i)^2$, définie sur $(-1, 1)^{\mathbb{N}}$. Pour $x \in X = \pi(K)$, définissons

$$K(x) = \{y \in [-1, 1]^{\mathbb{N}}, (x, y) \in K\}, \text{ et } \varphi(x) = \inf\{\xi(y); y \in K(x)\}.$$

La compacité de K implique aisément que φ est s. c. i. La convexité de $K(x)$, et le fait que $\xi((y + y')/2) < \xi(y)$ si $\xi(y) = \xi(y')$ et $y \neq y'$, impliquent l'existence d'un unique point $\theta(x)$ de $K(x)$ tel que $\xi(\theta(x)) = \varphi(x)$.

Prouvons que, pour tout n , l'application $x \mapsto \pi_n(\theta(x))$ est de 1re classe de Baire. Soit F un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et soit $K' = \pi_n^{-1}(F) \cap K$, C' est un convexe compact. Définissons φ' et θ' relativement à K' comme nous avons défini φ et θ relativement à K . Montrons tout d'abord que

$$\pi_n(\theta(x)) \in F \iff \varphi(x) = \varphi'(x).$$

En effet, si $\pi_n(\theta(x)) \in F$, alors $\theta(x) \in K'$, d'où

$$\varphi(x) = \xi(\theta(x)) \geq \varphi'(x) \geq \varphi(x).$$

Réciproquement, si $\varphi(x) = \varphi'(x)$, on a

$$\xi(\theta'(x)) = \varphi'(x) = \varphi(x) = \inf \{ \xi(y) ; y \in K(x) \},$$

ce qui montre que $\theta(x) = \theta'(x)$ d'après l'unicité, d'où enfin $\pi_n(\theta(x)) \in F$.

Puisque φ et φ' sont de 1re classe $(\pi_n \circ \theta)^{-1}(F)$ est un G_δ . Il en résulte que $(\pi_n \circ \theta)^{-1}(I)$ est un F_σ si I est une demi-droite ouverte, donc aussi si I est un intervalle ouvert, et enfin aussi si I est un ouvert quelconque.

Définissons $m_x = h^{-1}((x, \theta(x)))$. On a donc $r(m_x) = x$. La mesure m_x est maximale. Soit en effet $\mu > m_x$. Pour chaque n , on a donc

$$\mu(f_n) \geq m_x(f_n) = \pi_n(\theta(x)).$$

Par définition de ξ , ceci implique que $\xi((\mu(f_n))_n) \leq \xi(\theta(x))$. Puisque l'on a $r(\mu) = r(m_x) = x$, donc que $(\mu(f_n))_n \in K(x)$, la définition de $\theta(x)$ montre que $(\mu(f_n))_n = \theta(x) = (m_x(f_n))_n$, donc, enfin, $\mu = m_x$ puisque la famille $(f_n)_n$ est totale.

Pour chaque n la fonction $x \rightarrow m_x(f_n) = \pi_n \circ \theta(x)$ est de première classe de Baire. Puisque toute fonction f continue sur X est limite uniforme de combinaisons linéaires des f_n , la fonction $x \rightarrow m_x(f)$ est de première classe. Tout ouvert de $M_+^1(X)$ étant réunion dénombrable d'intersections finies d'ouverts de la forme $\{\mu ; |(\mu(f) - \alpha)| < \varepsilon\}$, il en résulte que l'application $x \rightarrow m_x$ est de première classe de Baire.

C. Q. F. D.

Remarque. - Soit $x_1, \dots, x_n$ des points de X , et

$$A = \{(t_i)_{1 \leq i \leq n} ; t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1\}.$$

Il est aisé de montrer que l'application $(t_i)_{1 \leq i \leq n} \rightarrow \sum_{i=1}^n t_i x_i$ est continue sur A .

Supposons maintenant que X ne soit pas nécessairement métrisable. La tribu des boréliens de Baire de $M_+^1(X)$ (tribu engendrée par les compacts G_δ) est la moins fine rendant mesurables les fonctions continues sur $M_+^1(X)$. Le sous-espace vectoriel $\{\mu \rightarrow \mu(f) ; f \in C(X)\}$ de $C(M_+^1(X))$ sépare les points. Il engendre donc une sous-algèbre dense de $C(M_+^1(X))$. Il en résulte que la tribu des boréliens de Baire de $M_+^1(X)$ est la moins fine rendant mesurables les fonctions $\mu \rightarrow \mu(f)$ ($f \in C(X)$). La mesurabilité d'une application $x \rightarrow m_x$ de X dans $M_+^1(X)$ équivaut à celle de $x \rightarrow m_x(f)$ pour toute f de $C(X)$. Lorsque X est métrisable la tribu des boréliens de Baire coïncide avec la tribu borélienne.

THÉORÈME 2. - Supposons que X possède une base d'ouverts de cardinal $\leq \aleph_1$. Il

existe alors une sélection $x \rightarrow m_x \in M_1^+(X)$ de X dans $M_1^+(X)$, mesurable lorsque
 X est muni de sa tribu borélienne et $M_1^+(X)$ de la tribu des boréliens de Baire.

Démonstration. - Il est classique que la condition sur X de l'énoncé implique que $C(X)$, donc aussi $S(X)$, possède une partie totale de cardinal $\leq \aleph_1$. Soit $(f_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ une telle partie (Ω désignant le premier ordinal non dénombrable).

Désignons par h l'application $\mu \rightarrow (r(\mu), (\mu(f_\alpha))_\alpha)$ de $M_1^+(X)$ dans $E \times \underline{\mathbb{R}}^{[0, \Omega[}$. Elle est affine, continue et injective. Son image est un convexe compact K .

Désignons par π la projection canonique de $E \times \underline{\mathbb{R}}^{[0, \Omega[}$ sur E , par π_α celle sur $E \times \underline{\mathbb{R}}^{[0, \alpha[}$.

Construisons par induction une famille u_α de fonctions numériques définies sur X , vérifiant les conditions suivantes (où l'on pose $v_\alpha(x) = (x, (u_\beta(x))_{\beta < \alpha})$)

- (1) u_α est borélienne ;
- (2) $v_\alpha(x) \in \pi_\alpha(K)$, $\forall x \in X$;
- (3) $u_\alpha(x) = \sup \{t ; (v_\alpha(x), t) \in \pi_{\alpha+1}(K)\}$.

Supposons cette construction effectuée pour tout $\beta < \alpha$. Si α est de la forme $\gamma + 1$, la condition (2) est vérifiée puisque (3) l'est au rang γ . Si α est limite, pour $\beta < \gamma$, le compact $K \cap \pi_\beta^{-1}(v_\beta(x))$ est non vide par hypothèse. Cette famille de compacts est filtrante décroissante, donc son intersection, qui n'est autre que $K \cap \pi_\alpha^{-1}(v_\alpha(x))$, est non vide, ce qui montre que la condition (2) est encore vérifiée.

Il est donc possible de définir u_α à l'aide de (3), puisque pour tout z de $\pi_\alpha(K)$ il existe un t tel que $(z, t) \in \pi_{\alpha+1}(K)$.

Pour terminer la construction, il suffit de prouver que u_α est borélienne. L'application $z \rightarrow \sup \{t ; (z, t) \in \pi_{\alpha+1}(K)\}$ de $\pi_\alpha(K)$ dans $\underline{\mathbb{R}}$ est s. c. i. d'après la compacité de $\pi_{\alpha+1}(K)$. D'autre part, l'application $x \rightarrow v_\alpha(x)$ est borélienne. Pour le voir il suffit de remarquer que tout ouvert de $X \times \underline{\mathbb{R}}^{[0, \alpha[}$ est de réunion dénombrable de produits $V \times \prod_{\beta < \alpha} O_\beta$, où V est un ouvert de X et O_β un intervalle ouvert de $\underline{\mathbb{R}}$, à extrémités rationnelles, égal à $\underline{\mathbb{R}}$ sauf pour un nombre fini d'indices, et que l'image réciproque d'un tel ouvert par v_α est borélienne, ce qui termine la construction.

Définissons $m_x = h^{-1}(v_\Omega(x))$. On a déjà $r(m_x) = \pi(v_\Omega(x)) = x$. Montrons que m_x est maximale. Soit $\mu > m_x$. Pour tout α , on a $\mu(f_\alpha) > m_x(f_\alpha)$. Supposons $\mu \neq m_x$. La famille (f_α) étant totale, il existe des indices tels que $\mu(f_\alpha) \neq m_x(f_\alpha)$. Soit γ le plus petit d'entre eux. Puisque $\alpha < \gamma \Rightarrow \mu(f_\alpha) = m_x(f_\alpha) = u_\alpha(x)$, on a $\pi_\gamma(h(\mu)) = v_\gamma(x)$. Ainsi $(v_\gamma(x), \mu(f_\gamma)) \in \pi_{\gamma+1}(K)$, ce qui d'après (3) prouve que $m_x(f_\gamma) < \mu(f_\gamma) \leq m_x(f_\gamma)$. Cette absurdité établit que $\mu = m_x$, donc que m_x est maximale. L'extrémalité de m_x se prouve de façon très similaire.

Pour tout α la fonction $x \rightarrow m_x(f_\alpha)$ est borélienne. Il en est donc de même de la fonction $x \rightarrow m_x(f)$ où $f \in \mathcal{C}(X)$ puisque la famille des f_α est totale, ce qui termine tout.

C. Q. F. D.

Remarque. - En général, il n'existe pas de sélection $x \rightarrow m_x$ qui soit mesurable quand $M_+^1(X)$ est muni de sa tribu borélienne.

En effet, l'ensemble des mesures de Dirac est fermé dans $M_+^1(X)$, et son image réciproque est exactement $\mathcal{E}(X)$, qui peut ne pas être borélien.

THÉOREME 3. - Supposons X métrisable. Alors il existe une sélection borélienne $x \rightarrow m_x \in M'_x$ de classe ω .

Démonstration. - Elle est très semblable à la précédente, en remplaçant la famille (f_α) par une suite dense de $S(X)$, en remplaçant l'induction transfinie par une induction dénombrable, et en prouvant par récurrence que u_n est de classe de Baire $\leq n$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RAO (M.). - Measurable selection of representing measures, Quaterly J. of Math., Series 2, t. 22, 1971, p. 571-572.
- [2] SMITH (W.). - Measurable selection of simplicial maximal measures, J. London math. Soc., Series 2, t. 7, 1973, p. 427-428.

(Texte reçu le 20 décembre 1975)

Michel TALAGRAND
Equipe d'Analyse, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05