

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

PAULETTE SAAB

Sur les cônes convexes topologiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° C6, p. C1-C2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A21_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES CÔNES CONVEXES TOPOLOGIQUES

par Paulette SAAB

Nous donnons une démonstration simple d'un théorème de PAZMAN [2] concernant les cônes convexes topologiques.

Définition 1. - Un cône convexe abstrait est un demi-groupe abélien $(X, +)$, d'élément neutre 0_x , muni d'une loi de composition externe : $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ de $\mathbb{R}_+ \times X$ dans X telle que, pour tout x et y dans X , tout λ et tout μ dans $\mathbb{R}_+$, on ait :

$$1^\circ \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y ,$$

$$2^\circ \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x ,$$

$$3^\circ \quad 1 \cdot x = x ,$$

$$4^\circ \quad \lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x ,$$

$$5^\circ \quad 0 \cdot x = 0_x .$$

Définition 2. - On appelle cône convexe topologique tout cône convexe abstrait muni d'une topologie telle que les deux applications canoniques de $X \times X$ dans X et de $\mathbb{R}_+ \times X$ dans X soient continues.

Définition 3. - Un cône convexe abstrait est dit régulier si, pour tous x , a et b dans X , $(x + a = x + b)$ implique que $a = b$.

THÉORÈME 3 [1]. - Un cône convexe abstrait est régulier si, et seulement si, il est isomorphe à un sous-cône convexe d'un espace vectoriel réel.

THÉORÈME 4. - Tout cône convexe topologique séparé est régulier.

En effet, soient x , a et $b \in X$ tels que

$$(1) \quad x + a = x + b .$$

(1) implique que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus (0)$, $x + na = x + nb$, d'où

$$\frac{x}{n} + a = \frac{x}{n} + b$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{n} + a \right) = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{n} + b \right) = b ,$$

donc $a = b$.

Les théorèmes 3 et 4 impliquent que tout cône convexe topologique séparé est en fait plongeable dans un espace vectoriel réel.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGGERI (J. C.) et LESCARRET (C.). - Généralités sur les cônes convexes, Séminaire d'analyse convexe, Montpellier 1972.
- [2] PAZMAN (Andrej). - Mixture sets and convex sets, Matematický Časopis, t. 22, 1972, p. 148-155.

(Texte reçu le 17 avril 1975)

Paulette SAAB
15 rue d'Ulm
75005 PARIS
