

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

CLAUDE PIQUET

Propriétés des applications quadratiques d'un espace de Hilbert dans un espace vectoriel. Applications à la théorie spectrale des opérateurs normaux et à l'image numérique d'un opérateur

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° 1, p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A2_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS QUADRATIQUES
D'UN ESPACE DE HILBERT DANS UN ESPACE VECTORIEL.
APPLICATIONS À LA THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS NORMAUX
ET À L'IMAGE NUMÉRIQUE D'UN OPÉRATEUR

par Claude PIQUET

On considère une classe particulière d'applications d'un espace de Hilbert dans un espace vectoriel topologique ; ces applications sont continues et satisfont à l'identité du parallélogramme.

On étudie, dans une première partie, les propriétés de l'image W de la sphère unité du Hilbert par une application b du type précédent. On montre, moyennant une hypothèse supplémentaire sur b , que W est convexe, et l'on obtient une caractérisation des faces de W .

On applique, dans les paragraphes 2 et 3, les résultats précédents aux représentations unitaires d'un groupe abélien localement compact, ce qui permet de retrouver la théorie spectrale des opérateurs normaux (§ 4).

Enfin, on retrouve, dans les paragraphes 6 et 7, les propriétés essentielles de l'image numérique d'un opérateur.

On aura présent à l'esprit, dans les sections 2, 3 et 4, que l'on se refuse d'utiliser la théorie spectrale des opérateurs normaux ⁽¹⁾, puisque c'est le but de ces paragraphes. A peu près tous les théorèmes énoncés deviennent évidents si l'on suppose connue la théorie spectrale des opérateurs normaux.

1. Définition des b -applications. Propriétés générales.

1.1. Notations et définitions : $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe dont le produit scalaire, noté $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche. Si $x \in \mathcal{H}$, on pose

$$\hat{x} = 0 \text{ si } x = 0, \quad \hat{x} = x/\|x\| \text{ si } x \neq 0.$$

$\mathcal{H}_r$ (resp. $\mathcal{B}_r$) est l'ensemble des x de $\mathcal{H}$ tels que $\|x\| = r$ (resp. $\|x\| \leq r$). Enfin, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Si $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, L^* désigne l'adjoint de L .

DÉFINITION : Une application b de $\mathcal{H}$ dans un e. v. t. l. c. $\mathcal{V}$ sera une b -application si

1° b est continue,

(¹) On se rappellera que l'existence et les propriétés de la racine carrée positive d'un opérateur positif borné ne font pas appel à la théorie spectrale. Cf. [1] par exemple.

2° b satisfait à l'identité du parallélogramme :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall y \in \mathcal{X}, \quad b(x+y) + b(x-y) = 2b(x) + 2b(y).$$

Il est facile de montrer qu'alors :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathcal{X}, \quad b(\lambda x) = |\lambda|^2 b(x)$$

et que

$$\{x, y\} \rightarrow \frac{1}{4}\{b(x+y) - b(x-y) + ib(x+iy) - ib(x-iy)\}$$

est sesquilinéaire de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$.

Soit V un sous-espace de $\mathcal{X}$. On pose $W(V) = \text{conv} \{b(V \cap \mathcal{X}_1)\}$ et $W = W(\mathcal{X})$. Soit A une partie de $W(V)$. On définit alors

$F(A)$ = face de W engendrée par A .

$$M(A) = \{x \in V; \quad b(x) \in \|x\|^2 A\}.$$

1.2. PROPOSITION : Si A est une face de $W(V)$, $M(A)$ est un sous-espace vectoriel de V .

Il est évident que $M(A)$ est $\mathbb{C}$ -homogène ; soient x et y dans $M(A)$. On a $b(x+y) + b(x-y) = 2\{b(x) + b(y)\} \in 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)A$. Posons

$$t = \frac{2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle}{\|x\|^2 + \|y\|^2};$$

alors $t \in [0, 1]$ et l'on a :

$$\frac{1}{2}(1+t) b(x+y) + \frac{1}{2}(1-t) b(x-y) \in A.$$

A est une face, donc $b(\widehat{x \pm y}) \in A$, soit $x \pm y \in M(A)$.

C. Q. F. D.

La réciproque de cette proposition est en général fausse. C'est pourquoi nous introduisons une classe plus restreinte de b -applications.

1.3. DÉFINITION : Une b -application b de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$ est une bc -application si, pour tout couple (x, y) de $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1$, il existe un y' de $\mathcal{X}_1$ tel que $b(y') = b(y)$ et $b(\widehat{x + y'})$ appartient à la droite (réelle) définie par $b(x)$ et $b(y)$.

Afin de pouvoir caractériser le W d'une bc -application, nous avons besoin d'un lemme.

1.4. LEMME : Soit b une bc -application de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{Y}$. Alors :

$$\forall \omega_1 \in b(\mathcal{X}_1), \forall \omega_2 \in b(\mathcal{X}_1), \forall t \in [0, 1],$$

il existe x et y de $\mathcal{X}_1$, $x \in M(\omega_1)$, $y \in M(\omega_2)$, et $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tels que

$$b(\widehat{(\cos \theta)x + (\sin \theta)y}) = t\omega_1 + (1-t)\omega_2.$$

b étant une bc -application, on peut supposer que $b(\widehat{x+y})$ appartient à la droite Δ définie par ω_1 et ω_2 . Comme $b(x+y) + b(x-y) = 2b(x) + 2b(y)$, on voit que $b(\widehat{x-y}) \in \Delta$. Il existe donc α et β réels tels que

$$b(x+y) = \|x+y\|^2 \{\alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2\} \quad \text{et} \quad b(x-y) = \|x-y\|^2 \{\beta\omega_1 + (1-\beta)\omega_2\}.$$

De plus, $b((\cos \theta)x + (\sin \theta)y) = (\cos^2 \theta)\omega_1 + (\sin^2 \theta)\omega_2 + (\sin \theta \cos \theta)[b(x+y) - b(x-y)]$, donc en posant

$$t(\theta) = \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \{\alpha - \beta + 2(\alpha + \beta) \operatorname{Re}\langle x, y \rangle\}}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta \operatorname{Re}\langle x, y \rangle},$$

on obtient

$$b(\widehat{(\cos \theta)x + (\sin \theta)y}) = t(\theta)\omega_1 + 1 - t(\theta)\omega_2.$$

Comme l'application $\theta \rightarrow t(\theta)$ est continue et que $t(\theta) = 1$ et $t(\frac{\pi}{2}) = 0$, le lemme est démontré.

Remarque : Il existe aussi un $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ répondant à la question.

Nous obtenons maintenant le théorème suivant :

1.5. THÉORÈME : Soit $b : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ une bc -application. Alors

1° $b(\mathcal{X}_1)$ est convexe.

2° A est une face de $b(\mathcal{X}_1)$ si et seulement si $M(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}$.

3° Pour toute partie A de $b(\mathcal{X}_1)$, $M(F(A))$ est le sous-espace de $\mathcal{X}$ engendré par $M(A)$.

1° Cela résulte trivialement du lemme 1.4.

2° Compte tenu de la proposition 1.2, il faut montrer que si $M(A)$ est un sous-espace, A est une face. Considérons ω_1 et ω_2 dans $b(\mathcal{X})$ tels que $t\omega_1 + (1-t)\omega_2$ pour un $t \in]0, 1[$. b étant une bc -application, et compte tenu du lemme 1.4, il existe $x \in M(\omega_1)$, $y \in M(\omega_2)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ($x, y \in \mathcal{X}_1$) tels que

$$b((\cos \theta)x + (\sin \theta)y) = t\omega_1 + (1-t)\omega_2 \in A.$$

Donc $(\cos \theta)x + (\sin \theta)y \in M(A)$. D'après la remarque du lemme 1.4, il existe $\theta' \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos \theta' x - \sin \theta' y \in M(A)$.

$$M(A) \text{ sous-espace} \Rightarrow x \text{ et } y \in M(A),$$

donc ω_1 et $\omega_2 \in A$, et donc A est une face.

3° Soit $\langle M(A) \rangle$ le sous-espace engendré par $M(A)$. Comme $M(A) \subset M(F(A))$, on a $\langle M(A) \rangle \subset M(F(A))$. Si A est une face, il n'y a rien à démontrer. Si A n'est pas une face, pour tout $x \in M(F(A))$ tel que $b(x) \notin A$ ($\|x\| = 1$), il existe $b(y) \in F(A)$ et $t \in]0, 1[$ tels que $tb(x) + (1-t)b(y) \in A$. b étant une bc -application, on remplace y par y' tel que $b(y') = b(y)$ et

$$b(\cos \theta x + \sin \theta y) \in A$$

(lemme 1.4). Donc $\cos \theta x + \sin \theta y \in M(A)$; de même, il existe θ' tel que $\cos \theta' x - \sin \theta' y \in M(A)$, donc x (et y) appartient à $\langle M(A) \rangle$, ce qui montre que

$$\langle M(A) \rangle = M(F(A)) .$$

C. Q. F. D.

D'une façon plus parlante, on peut dire que l'image réciproque par b de la face du cône convexe $b(\mathcal{K})$ engendrée par A est le sous-espace de $\mathcal{K}$ engendré par l'image réciproque de A .

2. Fonctions de type positif associées à une représentation unitaire d'un groupe abélien localement compact.

2.1. Notations et définition.

G est un groupe abélien localement compact ; son groupe dual $\hat{G}$ est localement compact.

$P(G)$ (resp. $P_1(G)$, resp. $P^1(G)$) est le cône convexe propre (resp. le convexe) des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ continues, de type positif sur G (resp. $f \in P(G), f(0)=1$; resp. $f \in P(G)$, $f(0) \leq 1$) .

X est l'espace vectoriel des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, continues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. $\tilde{P}(G) = P(G)$ est dense dans X .

Si $\mathcal{C}$ est un espace topologique compact, $\mathcal{M}_1^+(\mathcal{C})$ désigne le compact convexe des mesures positives sur $\mathcal{C}$, de masse totale ≤ 1 .

$\pi : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{K})$ est une représentation unitaire de G ; $\pi(0) = 1_{\mathcal{K}}$.

b_π ou $b : \mathcal{K} \rightarrow P(G) \subset X$ est définie par $b(x) = f_x$ où $f_x(g) = \langle \pi(g)x , x \rangle$ ($g \in G$) .

$\{\pi\}'$ est le commutant dans $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ de la famille (abélienne) des $\{\pi(g)\}$.

$\mathbb{W}$ est l'adhérence, dans $P^1(G)$, de $b_\pi(\mathcal{B}_1)$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(G) , L^1(G))$.

2.2. LEMME : $b(x) = b(y) \iff \exists U \in \{\pi\}'$, U unitaire tel que $y = Ux$.

Il est clair que si $y = Ux$, $\langle \pi(g)y , y \rangle = \langle \pi(g)x , U^* Ux \rangle$, donc $b(x) = b(y)$.

Si $b(x) = b(y)$, alors $\|x\| = \|y\|$ ($\neq 0$, sinon prendre $U = 1_{\mathcal{K}}$) . Soit $V(x)$ (resp. $V(y)$) le sous-espace de $\mathcal{K}$ engendré par les $\pi(g)x$ (resp. $\pi(g)y$) où $g \in G$. Donc

$$z \in V(x) \iff \exists M \text{ de la forme } \sum_1^n \lambda_k \pi(g_k) , \text{ où } \lambda_k \in \mathbb{C} , g_k \in G ,$$

tel que $z = Mx$.

Soit $S : V(x) \rightarrow V(y)$ l'opérateur linéaire défini par $S(z) = My$ où $z = Mx$.

Cette définition a un sens car $\|S(z)\|^2 = \|z\|^2$. En effet,

$$\|Sz\|^2 = \sum_{p,q} \lambda_p \bar{\lambda}_q b(y)(g_p - g_q) = \sum_{p,q} \lambda_p \bar{\lambda}_q b(x)(g_p - g_q) = \|z\|^2.$$

Donc si $Mx = M'x$, alors $My = M'y$. La relation précédente montre de plus que S est une isométrie, et se prolonge donc en une isométrie de $\overline{V(x)} \rightarrow \overline{V(y)}$. Il est évident que S est surjective; l'isométrie T de $\overline{V(y)} \rightarrow \overline{V(x)}$, définie par $T(My) = Mx$, est son inverse à droite. D'autre part, si $z \in V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}$, on a :

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \text{ où } z_n \in V(y).$$

z_n s'écrit $z_n = M_n y$ et, pour tout opérateur N de la forme $\sum_1^k \lambda_p \pi(g_p)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Nx, z_n \rangle = 0, \text{ soit } \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Nx, M_n y \rangle = 0,$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M_n^* x, N^* y \rangle = 0$. Comme $V(y)^\perp$ est invariant par M_n et M_n^* , on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n x = Mx$ appartient à $V(y)^\perp$. Il en résulte que

$$T\{V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}\} = \overline{V(x)} \cap V(y)^\perp.$$

Soient maintenant P le projecteur sur $\overline{V(x)}$, Q le projecteur sur $V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}$, et R le projecteur sur $V(x)^\perp \cap V(y)^\perp$. On a $P + Q + R = 1_{\mathcal{H}}$; soit alors $U = SP + TQ + R$. En raison de l'invariance par π des espaces $\overline{V(x)}$ et $\overline{V(y)}$, on a $U \in \{\pi\}'$ et U est unitaire, car SP , TQ et R sont des isométries surjectives de

$\overline{V(x)}$ dans $\overline{V(y)}$, $V(x)^\perp \cap \overline{V(y)}$ dans $\overline{V(x)} \cap V(y)^\perp$ et $V(x)^\perp \cap V(y)^\perp$ dans $V(x)^\perp \cap V(y)^\perp$ respectivement. Enfin,

$$Ux = SPx = Sx = y.$$

C. Q. F. D.

2.3. LEMME : A tout couple (x, y) de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$ correspond un opérateur unitaire U de $\{\pi\}'$ tel que

$$\forall g \in G, \quad \langle \pi(g)x, Uy \rangle + \langle \pi(g)Uy, x \rangle = 0.$$

Soit $V(x)$ le sous-espace attaché à x , défini au lemme précédent. Nous considérons quatre cas :

(α) $y \in V(x)^\perp$; $U = 1_{\mathcal{H}}$ convient alors parfaitement.

(β) $y \in V(x)$; on a alors $y = Mx$, où M est normal et $M \in \{\pi\}''$.

Soit $M = iU^*H$ une décomposition polaire de M , où U est unitaire (possible car M est normal). On sait qu'alors H est hermitien, et que H et U appartiennent à $\{\pi\}'$. Alors $Uy = iHx$ et l'on a

$$\langle \pi(g)x, Uy \rangle + \langle \pi(g)Uy, x \rangle = 0.$$

(γ) $y \in \overline{V(x)}$; alors $y = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n x$, où M_n est de la forme précédente. Soit

$M_n = iU_n^* H_n$ une décomposition polaire analogue à celle de M dans (β) . On sait que $M_n x$ converge. Montrons que $H_n x$ converge. On a

$$\|(H_p - H_q)x\|^2 = \|H_p x\|^2 + \|H_q x\|^2 - 2\langle H_p H_q x, x \rangle$$

car $H_p H_q = H_q H_p$. Mais H_p , donc $H_p H_q$ est positif, donc

$$|\langle M_p x, M_q x \rangle + \langle M_q x, M_p x \rangle| = |\langle H_p H_q U_p^* U_q x, x \rangle + \langle H_p H_q x, U_p^* U_q x \rangle|$$

est majoré par

$$4\langle H_p H_q x, x \rangle \langle H_p H_q U_p^* U_q x, U_p^* U_q x \rangle = (2\langle H_p H_q x, x \rangle)^2.$$

Il en résulte que $\|(H_p - H_q)x\|^2 \leq \|(M_p - M_q)x\|^2$, si bien que $z = \lim_{n \rightarrow \infty} iH_n$ existe. b étant continue (en effet, $\sup_{g \in G} |b(x)(g) - b(y)(g)| \leq 2\|x - y\|$), on a

$$b(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(H_n x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(M_n x) = b(y).$$

D'après le lemme 2.2, il existe U unitaire dans $\{\pi\}'$ tel que $z = Uy$, et comme on a

$$\langle \pi(g)x, z \rangle + \langle \pi(g)z, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \{i\langle \pi(g)H_n x, x \rangle - i\langle \pi(g)x, H_n x \rangle\} = 0,$$

Le lemme est démontré dans ce cas.

(δ) Enfin, si y est quelconque, on écrit $y = u + v$, où $u \in \overline{V(x)}$, $v \in V(x)^\perp$. Soient U_1 l'opérateur donné par (γ) appliqué au couple (x, u) et P le projecteur sur $\overline{V(x)}$. Alors $U = PU_1 + (1 - P)$ est unitaire et dans $\{\pi\}'$, car PU_1 est un opérateur unitaire de $\overline{V(x)}$. Il vient $Uy = Uu + v$ et comme

$$\langle \pi(g)x, Uy \rangle = \langle \pi(g)x, Uu \rangle,$$

le lemme est démontré.

En appliquant ce lemme à un couple quelconque, on voit que b_π est une bc-application de $\mathcal{K}$ dans X . (Prendre $y' = Uy$). Compte tenu du théorème 1.5, on obtient le théorème suivant.

2.4. THÉORÈME : L'application b_π , définie en 2.1, est une bc-application de $\mathcal{K}$ dans X . On a :

(i) $b(\mathcal{K}_1)$ est un convexe de $P_1(G)$.

(ii) Si $\omega = b(x)$, où $x \in \mathcal{K}_1$, on a

$$M(\omega) \cap \mathcal{K}_1 = \{y \in \mathcal{K} ; \exists U \text{ unitaire}, U \in \{\pi\}', \text{ tel que } y = Ux\}.$$

(iii) Si A est une partie de $b(\mathcal{K}_1)$, $M(F(A))$ est le sous-espace de $\mathcal{K}$ engendré par $M(A)$

Remarque : La condition (i) peut s'énoncer ainsi : L'ensemble des fonctions de type positif associées à une représentation unitaire π d'un groupe abélien G est convexe.

Nous allons maintenant examiner plus en détail les propriétés de $\mathcal{K}$.

2.5. LEMME : $\mathbb{W}$ est un compact convexe dont les points extrémaux sont $\{0\}$ et la trace $\mathbb{W} \cap \hat{G}$ de $\mathbb{W}$ sur le groupe dual $\hat{G}$.

$b(\mathbb{W}_1)$ étant un convexe de $P_1(G)$, $b(\mathbb{B}_1)$ est un convexe de $P^1(G)$. Comme $P^1(G)$ est un simplexe de Bauer pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ ([2], théorème 13.5.2), $\mathbb{W}$ est un compact convexe de $P^1(G)$.

Soit $f \in \mathbb{W}$, extrémal et distinct de 0 (0 est évidemment extrémal, car $P(G)$ est un cône propre). $f(0) = 1$ puisque f est extrémal ; donc $f \in P_1(G)$. Or ([3], chapitre VI, § 31,7, théorème 6), sur $P_1(G)$, la topologie faible coïncide avec la topologie forte (topologie de la convergence compacte). Il existe donc une suite généralisée ⁽²⁾, f_n de $b(\mathbb{B}_1)$ telle que $\lim_n f_n = f$ (pour la convergence compacte). Il existe donc une suite x_n de $\mathbb{B}_1$ telle que $b(x_n)$ converge vers f . Comme $\|x_n\|^2 = f_n(0)$, on peut supposer que $x_n \in \mathbb{W}_1$.

Soit $x_n^\pm = [1 \pm \lambda \pi(g_0)]x_n$, où $|\lambda| = 1$, et $f_n^\pm = b(x_n^\pm)$. On a

$$f_n^\pm(g) = 2f_n(g) \pm (\lambda f_n(g + g_0) + \bar{\lambda} f_n(g - g_0)) ;$$

par conséquent, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\pm = f^\pm$ existe, et l'on a $f^+(g) + f^-(g) = 4f(g)$. Mais

$$\|x_n^\pm\|^2 = 2 \pm (\lambda f_n(g_0) + \bar{\lambda} f_n(g_0)) .$$

L'extrémalité de f implique donc :

$$[2 + \lambda f(g_0) + \bar{\lambda} f(g_0)]f(g) = 2f(g) + \lambda f(g + g_0) + \bar{\lambda} f(g - g_0) .$$

Ceci est vrai pour tout λ , $|\lambda| = 1$, donc $f(g + g_0) = f(g)f(g_0)$: f est un caractère continu de G .

Inversement, tout élément de $\mathbb{W} \cap \hat{G}$ est extrémal dans $P^1(G)$, donc dans $\mathbb{W}$. Le lemme est démontré.

On remarque que $\mathbb{W} \cap \hat{G}$ est fortement fermé ; comme $P^1(G)$ est un simplexe de Bauer, il en va de même de $\mathbb{W}$ qui est une face fermée de $P^1(G)$. Donc on a le résultat suivant.

2.6. THÉORÈME : L'adhérence faible $\mathbb{W}$ de l'ensemble des fonctions de type positif (continues) f telles que $f(0) \leq 1$, associées à une représentation unitaire π d'un groupe abélien localement compact G , est une face fermée de $P^1(G)$. C'est un simplexe de Bauer dont les points extrémaux sont $\{0\}$ et $\mathbb{W} \cap \hat{G}$.

On introduit maintenant une définition.

2.7. DÉFINITION : On appelle spectre de π , et l'on note $sp(\pi)$ le fermé $\mathbb{W} \cap \hat{G}$.

Par le théorème de représentation des simplexes de Bauer, on a le théorème suivant.

⁽²⁾ Dans la suite de la démonstration, "suite" signifie "suite généralisée".

2.8. THÉOREME : $\mathbb{W}$ est affinement isomorphe et homéomorphe à $\mathcal{M}_1^+(\text{sp}(\pi) \cup \{0\})$.
A tout x de $\mathbb{W}_1$ correspond une mesure μ_x , unique, de $\mathcal{M}_1^+(\text{sp}(\pi))$ telle que

$$b(x) = \int_{\text{sp}(\pi)} \chi \, d\mu_x(\chi) .$$

Nous avons seulement à montrer que si $x \neq 0$, μ_x ne charge pas le point $\{0\}$. Ceci résulte de ce que $b(x)(0) = 1 = \int_{\text{sp}(\pi)} d\mu_x$, donc μ_x est portée par $\text{sp}(\pi)$.

Remarque : L'homéomorphisme précédent n'est rien d'autre que la transformation de Fourier.

Nous précisons maintenant la structure des faces de $\mathbb{W}$.

2.9. THÉOREME : Soit $\widetilde{F}$ une face fermée de $\mathbb{W}$; alors

$$M(\widetilde{F}) = \{x \in \mathbb{W} ; b(x) \in \|\cdot\|^2 \widetilde{F}\}$$

est un sous-espace fermé de $\mathbb{W}$ invariant par π . Inversement, si E est un sous-espace fermé invariant par π , l'adhérence faible de $b(E \cap \mathcal{B}_1)$ est une face fermée de $\mathbb{W}$.

La proposition directe résulte du théorème 1.5 et de la continuité de b . La proposition inverse est évidente en remplaçant $\mathbb{W}$ par E .

Toute face fermée de $\mathbb{W}$ étant déterminée par ses points extrémaux et inversement, on a un corollaire.

2.10. COROLLAIRE : Soit $\hat{G}$ un fermé de $\hat{G}$; si $\widetilde{F}$ est la face fermée de $\mathbb{W}$ engendrée par $F \cap \mathbb{W}$, alors $M(\widetilde{F}) = \{x \in \mathbb{W}, \mu_x \text{ est portée par } F\}$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{W}$ invariant par π . Inversement, si E est un sous-espace fermé de $\mathbb{W}$, invariant par π , alors $E = M(\widetilde{F})$ où $\widetilde{F}$ est la face fermée de $\mathbb{W}$ engendrée par la trace F de l'adhérence de $b(E \cap \mathcal{B}_1)$ sur $\hat{G}$.

N. B. - Fermé signifie fermé pour la topologie de la convergence compacte.

3. Mesure spectrale associée à une représentation unitaire π .

Les mots "fermé", "compact", ... signifient fermé, compact, ... pour la topologie de la convergence compacte.

3.1. Notations : On note $\mathcal{E}(F)$ le sous-espace fermé de $\mathbb{W}$ associé au fermé F de $\hat{G}$ obtenu au corollaire 2.10. On rappelle que si $x \in \mathbb{W}$, $\overline{V(x)}$ est le sous-espace fermé de $\mathbb{W}$, engendré par les vecteurs $\pi(g)x$. Il est clair que pour tout $x \in \mathcal{E}(F)$, $\overline{V(x)} \subset \mathcal{E}(F)$. Plus précisément, il résulte du théorème 2.4 que $\mathcal{E}(F)$ s'identifie au sous-espace de $\mathbb{W}$ engendré par Ux lorsque $U \in \{\pi\}'$, et U est unitaire. (x quelconque dans $\mathcal{E}(F)$).

Un problème important est de savoir quand $\mathcal{E}(F)$ est non réduit à $\{0\}$. A cet effet, nous démontrons quelques lemmes.

3.2. LEMME : Soit $x \in \mathcal{K}$. Pour toute fonction $\alpha : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$, continue, à support compact, il existe un $x_\alpha \in \overline{V(x)}$ tel que $\mu_{x_\alpha} = |\alpha|^2 \mu_x$.

Soit $\varphi : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $\varphi = \sum_1^n \lambda_k g_k$ (où $g_k \in G \approx \hat{G}$) ($\lambda_k \in \mathbb{C}$) . On associe à φ l'opérateur $M_\varphi = \sum_1^n \lambda_k \pi(g_k)$. On a alors

$$b(M_\varphi x) = \sum_{p,q} \lambda_p \bar{\lambda}_q \langle \pi(g_p - g_q)x, x \rangle$$

et par conséquent,

$$\mu_{M_\varphi x} = \{ \sum_{p,q} \lambda_p \bar{\lambda}_q g_p \bar{g}_q \} \mu_\psi ,$$

soit

$$\mu_{M_\varphi \psi} = |\varphi|^2 \mu_\psi .$$

Or α est limite uniforme sur $\hat{G}$ de fonctions φ du type précédent.

D'autre part, $\|x\|^2 = b(x)(0) = \langle \mu_x, 1 \rangle$, donc $\|M_\varphi x\|^2 = \langle \mu_x, |\varphi|^2 \rangle$ et

$$\|(M_\varphi - M_{\varphi'})x\|^2 = \langle \mu_x, |\varphi - \varphi'|^2 \rangle .$$

Si donc la suite φ_i converge uniformément sur $\hat{G}$, $M_{\varphi_i} x$ converge dans $\overline{V(x)}$. Si x_α désigne la limite obtenue, on a

$$\mu_{x_\alpha} = \lim_{\varphi_i} \mu_{M_{\varphi_i} x} = \lim |\varphi_i|^2 \mu_x = |\alpha|^2 \mu_x .$$

De plus, pour tout $y \in V(x)$, $\|y\| = 1$, on a

$$\mu_{M_\alpha y} = |\alpha|^2 \mu_y , \text{ avec } M_\alpha = \lim \text{ forte sur } V(x) \text{ de } M_{\varphi_i} .$$

Donc

$$\|\pi_\alpha y\|^2 = \langle \mu_y, |\alpha|^2 \rangle \leq \|\alpha\|_\infty^2$$

π_α est uniformément borné sur $V(x)$, donc se prolonge en un opérateur borné de $\overline{V(x)}$. Enfin, si $\tilde{\alpha}$ est la conjuguée hermitienne de α , on a $M_{\tilde{\alpha}} = (\pi_\alpha)^*$.

3.3. LEMME : Soit α la fonction caractéristique d'un compact K de $\hat{G}$. Alors,
 $\forall x , \exists x_\alpha \in \overline{V(x)} , \mu_{x_\alpha} = \alpha \mu_x$.

α est une limite décroissante d'une suite de fonctions continues positives à support compact. Soient α_n ces fonctions ; soit M_n l'opérateur associé à x (fixé) et $\sqrt{\alpha_n}$, par le lemme précédent. $\alpha_n \geq 0 \Rightarrow M_n$ hermitien positif. Comme

$$\langle (\pi_p - \pi_q)x, x \rangle = \langle \mu_x, \sqrt{\alpha_p} - \sqrt{\alpha_q} \rangle ,$$

la suite M_n d'opérateurs bornés positifs est monotone décroissante. Soit $M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$. M est borné et $\mu_{M\psi} = \alpha \mu_\psi$ avec $M\psi \in \overline{V(x)}$.

3.4. LEMME : Soient F_1 et F_2 deux fermés de $\hat{G}$. Alors $\mathcal{E}(F_1)$ et $\mathcal{E}(F_2)$ sont orthogonaux si, et seulement si, pour tout x_1 de $\mathcal{E}(F_1)$, tout x_2 de $\mathcal{E}(F_2)$, les mesures μ_{x_1} et μ_{x_2} sont étrangères.

Supposons $\mathcal{E}(F_1)$ et $\mathcal{E}(F_2)$ non orthogonaux : Il existe un couple (x_1, x_2) de

$\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$ tel que $x_1 \in \mathcal{E}(F_1)$, $x_2 \in \mathcal{E}(F_2)$ et $x_1 = \alpha x_2 + \beta x_2'$ où $x_2' \in \mathcal{E}(F_2)^\perp$ et $\alpha \neq 0$. $\mathcal{E}(F_2)^\perp$ étant π -invariant, on a :

$$\mu_{x_1} = |\alpha|^2 \mu_{x_2} + |\beta|^2 \mu_{x_2'}.$$

Comme $\mu_{x_2}(F_2) = 1$, $\mu_{x_1}(F_2) > 0$, et les mesures μ_{x_1} et μ_{x_2} ne sont pas étrangères.

Supposons maintenant μ_{x_1} et μ_{x_2} non étrangères ($x_1 \in \mathcal{E}(F_1)$, $x_2 \in \mathcal{E}(F_2)$). Les mesures μ_{x_1} et μ_{x_2} sont $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ boréliennes ; il existe un K faiblement compact tel que $\mu_{x_1}(K) > 0$, $\mu_{x_2}(K) > 0$. Mais $K \subset P_1(G)$ et, comme sur $P_1(G)$ les topologies fortes et faibles coïncident, K est fortement compact. D'après le lemme 3.3, il existe $y \in \overline{V(x_1)} \subset (F_1)$ tel que $\mu_y(K) = \mu_{x_1}(K) > 0$. Il existe donc $y \neq 0$ tel que $y \in \mathcal{E}(F_1)$ et $y \in \mathcal{E}(F_2)$, ce qui montre que $\mathcal{E}(F_1)$ et $\mathcal{E}(F_2)$ ne sont pas orthogonaux.

3.5. COROLLAIRE : Soit F un fermé de $\hat{G}$. Alors, $\forall x \in \mathcal{E}(F)^\perp$, $\mu_x(F) = 0$.

Ce résultat est immédiat.

3.6. LEMME : Soient F un fermé de $\hat{G}$, et $E(F)$ le projecteur sur $\mathcal{E}(F)$. Alors, pour tout x de $\mathcal{H}$, on a

$$\langle E(F)x, x \rangle = \int_F d\mu_x = \|x\|^2 \int_F d\mu_x.$$

On peut supposer $\|x\| = 1$. Si $x \in \mathcal{E}(F)$, $E(F)x = x$ et $\int_F d\mu_x = 1$. Si $x \in \mathcal{E}(F)^\perp$, on a $\mu_x(F) = 0$ (Corollaire 3.5). Enfin, si x est quelconque, $x = \alpha u + \beta v$ où $u \in \mathcal{E}(F)$, $v \in \mathcal{E}(F)^\perp$. Ces espaces étant invariants par π , on a

$$\mu_x = |\alpha|^2 \mu_u + |\beta|^2 \mu_v$$

et donc

$$\mu_x(F) = |\alpha|^2 = \langle E(F)x, x \rangle.$$

Nous obtenons enfin le théorème de décomposition spectrale ([8], chap. VI, § 31, 7, théor. 6).

3.7. THÉORÈME : Soient G un groupe abélien localement compact, et π une représentation unitaire de G . Soient $\mathcal{C}(\hat{G})$ la tribu borélienne de $\hat{G}$ et $\mathcal{P}$ la famille des projecteurs de $\mathcal{H}$. Il existe une fonction $E : \mathcal{C}(\hat{G}) \rightarrow \mathcal{P}$, et une seule, telle que :

$$1^\circ E(\emptyset) = 0_{\mathcal{H}}, \quad E(\hat{G}) = E(\text{sp}(\pi)) = 1_{\mathcal{H}}.$$

$$2^\circ \text{ Si } B_1, B_2 \in \mathcal{C}(\hat{G}), \quad B_1 \subset B_2, \text{ on a } E(B_1) \leq E(B_2).$$

3° Si B_n est une classe monotone de $\mathcal{C}(\hat{G})$, $E(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(B_n)$, cette dernière limite étant prise au sens de la topologie forte (ou faible) de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

$$4^\circ \forall x \in \mathcal{H}, \quad \forall B \in \mathcal{C}(G), \quad \langle E(B)x, x \rangle = \int_B d\mu_x = \mu_x(B).$$

$$5^\circ \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad b(x) = \int \chi \, d\mu_x(\chi) .$$

L'existence de E résulte du lemme 3.6 et du fait que la tribu borélienne de $\hat{G}$ est engendrée par les compacts.

L'unicité est due à l'unicité de la mesure μ_x représentant $b(x)$.

Enfin, E est σ -additive car $\langle E(B)x, x \rangle = \int_B d\mu_x$, et μ_x est une mesure de probabilité sur X .

4. Mesure spectrale d'un opérateur normal.

On indique, dans ce paragraphe, comment le théorème précédent permet de retrouver le théorème classique de décomposition spectrale d'un opérateur normal.

4.1. DÉFINITION : Un opérateur L de domaine de définition $\mathcal{D}_L$ dense dans $\mathcal{X}$ est normal s'il est linéaire, fermé, et si $LL^* = L^*L$.

Par le théorème de Von Neumann, on sait que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{LL^*} = \mathcal{D}_{L^*L}$ est dense dans $\mathcal{X}$ (LL^* et L^*L sont autoadjoints). Comme pour tout x de $\mathcal{D}$, on a $\|Lx\| = \|L^*x\|$, on voit que $\mathcal{D}_L = \mathcal{D}_{L^*}$. On peut donc écrire $L = A + iB$, $L^* = A - iB$ avec A et B autoadjoints, définis sur $\mathcal{D}_L$. Enfin, $\forall x \in \mathcal{D}$, $\langle (AB - BA)x, x \rangle = 0$, donc $AB = BA$.

4.2. LEMME : Soit A un opérateur autoadjoint. Alors $A_\rho = (1 + \rho^2 A^2)^{-1} A$ ($\rho \in \mathbb{R}^+$) est autoadjoint, borné et converge fortement sur $\mathcal{D}$ vers A lorsque $\rho \rightarrow 0$ ($\mathcal{D}$ = domaine de A^2).

L'existence de A_ρ , et le fait que A_ρ soit borné, sont classiques. Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que, pour tout x de $\mathcal{D}_{A^2}$, on a :

$$\|(A - A_\rho)x\| = \|\rho^2 A^2 (1 + \rho^2 A^2)^{-1} Ax\| \leq \rho \|A^2 x\| .$$

4.3. LEMME : Soit π_ρ la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, définie par

$$\pi_\rho(u, v) = \exp i(uA + vB) .$$

π_ρ est une représentation unitaire de $\mathbb{R}^2$ et possède, uniformément en u et v sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, une limite forte notée π . On écrit

$$\pi(u, v) = \exp i(uA + vB) .$$

Il suffit de remarquer que $AB = BA \Rightarrow A_\rho B_\rho = B_\rho A_\rho$ sur $\mathcal{D}_{LL^*}$ qui est dense dans $\mathcal{X}$. L'existence de π résulte du lemme précédent. Comme $A_\rho B_\rho = B_\rho A_\rho$, π_ρ (et donc π) est une représentation unitaire de $\mathbb{R}^2$.

4.4. DÉFINITION : La représentation π précédente est la représentation unitaire de $\mathbb{R}^2$ associée à l'opérateur normal L .

Avant d'appliquer le paragraphe 3 à la représentation π , il faut préciser le spectre de π .

4.5. THÉOREME : Soient L un opérateur normal, et π_L la représentation unitaire de $\tilde{R}^2$ associée. Alors $\text{sp}(\pi_L)$ est le spectre de l'opérateur L .

Soit $(\alpha, \beta) \in \text{sp}(\pi_L)$. En changeant L en $L - (\alpha + i\beta)1_{\mathcal{H}}$, on se ramène au cas où $(0, 0) \in \text{sp}(\pi_L)$. $\tilde{R}^2$ étant σ -compact, il existe une suite x_n telle que $\|x_n\| = 1$ et $\langle \exp(i(uA + vB)) x_n, x_n \rangle \rightarrow 1$ uniformément sur tout compact de $\tilde{R}^2$, lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit K un voisinage compact de l'origine dans $\tilde{R}^2$. On peut (lemme 3.3) supposer que $x_n \in \mathcal{E}(K)$. En ce cas, les transformées de Fourier $\hat{b}(x_n)$ de $b(x_n)$ convergent vers δ au sens des distributions à support compact. Par le théorème de Paley-Wiener, on voit que $((\partial^2 b)/\partial u^2)(x_n)(0)$ converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc $Ax_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. De même, $Bx_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc, $(0, 0)$ appartient au spectre de L : $\text{sp}(\pi_L) \subset \text{sp}(L)$. Inversement, si $0 \in \text{sp}(L)$, il existe une suite x_n telle que $Lx_n \rightarrow 0$ (le spectre résiduel de L est vide, car L est normal). On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0.$$

De plus,

$$\|\exp(iuA) x_n - x_n\| = 2\|\sin(\frac{uA}{2}) x_n\| \leq |u| \|Ax_n\|.$$

Donc $b(x_n)$ converge uniformément vers 1 sur tout compact de $\tilde{R}^2$ si bien que $0 \in \text{sp}(\pi_L)$.

Appliquant enfin le théorème 3.7 on obtient le résultat suivant.

4.6. THÉOREME : Soit $L = A + iB$ un opérateur normal de $\mathcal{H}$. Alors, si

$$E(\lambda, \mu) = E(-\infty, \lambda] \times]-\infty, \mu]$$

au sens du théorème 3.7, pour tout x de $\mathcal{H}$, la fonction $(\lambda, \mu) \rightarrow \langle E(\lambda, \mu)x, x \rangle$ est une fonction de répartition sur $\tilde{R}^2$, continue à droite. La mesure associée est la mesure spectrale de L , et l'on a

$$1^\circ \quad E(-\infty, -\infty) = 0_{\mathcal{H}}, \quad E(+\infty, +\infty) = 1_{\mathcal{H}}.$$

$$2^\circ \quad \forall x \in \mathcal{H}, \quad (\lambda, \mu) \rightarrow \langle E(\lambda, \mu)x, x \rangle \text{ est continue à droite.}$$

$$3^\circ \quad \forall x \in \mathcal{H}, \quad \langle \exp(i(uA + vB)) x, x \rangle = \iint \exp(i(u\lambda + v\mu)) d\langle E(\lambda, \mu)x, x \rangle.$$

5. Deux critères de normalité pour un opérateur.

Dans ce paragraphe, L désigne un opérateur que l'on sait mettre sous la forme $L = A + iB$, $L^* = A - iB$ ($A + B$ autoadjoints). Autrement dit, L est un couple d'opérateurs autoadjoints. On a vu, au paragraphe 4, que L est normal si, et seulement si, la fonction $\pi_L(u, v) = \exp(i(uA + vB))$ est une représentation (unitaire) de $\tilde{R}^2$.

5.1. THÉOREME ⁽³⁾ : L est normal si, et seulement si, pour tout x de $\mathcal{H}$, la

⁽³⁾ Ce théorème est démontré, par une autre méthode, dans : BROISE (M.). - Sur les représentations unitaires des groupes abéliens, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 3157-3160.

fonction $(u, v) \rightarrow \langle \pi_L(u, v) x, x \rangle$ est continue de type positif sur $\mathbb{R}^2$.

La condition nécessaire est évidente.

Démontrer la condition suffisante revient à démontrer que tout projecteur $E_A(\lambda)$ de la famille spectrale de A commute avec tout projecteur de la famille spectrale de B , autrement dit que $E_A(\lambda) E_B(\mu)$ est hermitien pour tout couple (λ, μ) de $\mathbb{R}^2$.

On pose

$$\omega_x(u, v) = \langle \pi_L(u, v) x, x \rangle,$$

et

$$\hat{\omega}_x = \text{transformée de Fourier de } \omega_x.$$

$\hat{\omega}_x$ est une mesure positive finie par hypothèse.

Soient $x \in \mathcal{H}$ et $x = f + g$ sa décomposition suivant $E_A(\lambda)$ et $1 - E_A(\lambda)$, $f = E_A(\lambda) x$, $g = x - f$. Puis on introduit

$$\begin{aligned} u_1 &= E_B(\mu) f = E_B(\mu) E_A(\lambda) x; & u_2 &= E_B(\mu) [1 - E_A(\lambda)] x, \\ v_1 &= [1 - E_B(\mu)] E_A(\lambda) x, & v_2 &= [1 - E_B(\mu)] [1 - E_A(\lambda)] x. \end{aligned}$$

On a $x = f + g = u_1 + v_1 + u_2 + v_2$; et $f = u_1 + v_1$, $g = u_2 + v_2$. Donc $u_1 = f - v_1$. Par conséquent, $\hat{\omega}_{u_1} + \hat{\omega}_{f+v_1} = 2\hat{\omega}_f + 2\hat{\omega}_{v_1}$. Les mesures $\hat{\omega}$ sont positives, donc $\hat{\omega}_{u_1} \leq 2(\hat{\omega}_f + \hat{\omega}_{v_1})$ si bien que :

$$\text{supp } \hat{\omega}_{u_1} \subset \text{supp } (\hat{\omega}_f) \cup \text{supp } (\hat{\omega}_{v_1}).$$

Or $\text{supp } (\hat{\omega}_f) \subset]-\infty, \lambda] \times \mathbb{R}$, et $\hat{\omega}_{v_1}$ est portée par $\mathbb{R} \times]\mu, +\infty]$, donc

$$\hat{\omega}_{u_1} \text{ est portée par } (]-\infty, \lambda] \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times]\mu, \infty)).$$

D'autre part, $\hat{\omega}_{u_1}$ est portée par $\mathbb{R} \times]-\infty, \mu]$, donc

$$\hat{\omega}_{u_1} \text{ est portée par } \{ (]-\infty, \lambda] \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times]\mu, \infty)) \} \cap \{ \mathbb{R} \times]-\infty, \mu] \},$$

c'est-à-dire par $]-\infty, \lambda] \times]-\infty, \mu]$. On opère de même pour $\hat{\omega}_{u_2}$, $\hat{\omega}_{v_1}$, $\hat{\omega}_{v_2}$. On a :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{u_1} & \text{ est portée par }]-\infty, \lambda] \times]-\infty, \mu] \\ \hat{\omega}_{u_2} & \text{ " " " }]\lambda, \infty) \times]-\infty, \mu] \\ \hat{\omega}_{v_1} & \text{ " " " }]-\infty, \lambda] \times]\mu, \infty) \\ \hat{\omega}_{v_2} & \text{ " " " }]\lambda, \infty) \times]\mu, \infty). \end{aligned}$$

Il résulte du lemme 3.4, que u_1 , u_2 , v_1 et v_2 sont orthogonaux deux à deux, donc

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle E_B(\mu) E_A(\lambda) x, x \rangle$$

est positif, et le théorème est démontré.

5.2. THÉORÈME : Soient A et B deux opérateurs autoadjoints tous deux définis sur un même domaine $\mathcal{D}$, dense dans $\mathcal{H}$. Alors $L = A + iB$ est normal si, et seulement si, $\mathcal{W}$, enveloppe convexe fermée (pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$) de la famille des fonctions $\omega_x : (u, v) \rightarrow \langle \exp(i(uA + vB)) x, x \rangle$, $x \in \mathcal{D}_1$, est un simplexe de Choquet. Dans ces conditions, c'est une face fermée de $P^1(\mathcal{R}^2)$.

La condition nécessaire et la conclusion résultent du théorème 2.6 et de la définition 4.4.

Condition suffisante : On suppose que $\mathcal{W}$ est un simplexe de Choquet. Soit F un compact de $\mathcal{R}$. F détermine une face fermée $\mathcal{F}_A$ de $\mathcal{W}_A$ (théorème 2.9), où $\mathcal{W}_A$ est la face de $P^1(\mathcal{R})$ associée à la représentation $u \mapsto \exp iuA$. Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{F}_A$ détermine une face $\mathcal{F}$ fermée de $\mathcal{W}$: $\mathcal{F} = \{\omega \in \mathcal{W} ; \omega(u, 0) \in \mathcal{F}_A\}$. De plus, si F_1 et F_2 sont disjoints, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ le sont également ($\{0\} \notin \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$).

Soient F_1 et F_2 deux compacts disjoints de $\mathcal{R}$, et soient $x \in \mathcal{E}_A(F_1)$ et $y \in \mathcal{E}_A(F_2)$ deux vecteurs de $\mathcal{H}_1$. x et y sont orthogonaux (lemme 3.4), et $\omega_x \in \mathcal{F}_1$, $\omega_y \in \mathcal{F}_2$. Or

$$\frac{1}{2} \{ \omega_{(x+y)/\sqrt{2}} + \omega_{(x-y)/\sqrt{2}} \} = \frac{1}{2} (\omega_x + \omega_y)$$

appartient à la variété affine fermée engendrée par $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Comme $\mathcal{W}$ est un simplexe, la trace sur $\mathcal{W}$ de cette variété est une face fermée $\mathcal{F}$ de $\mathcal{W}$. Donc $\omega_{(x \pm y)/\sqrt{2}} \in \mathcal{F}$, et l'on a

$$\omega_{(x+y)/\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \omega_{x+y} = \lambda \omega_1 + (1 - \lambda) \omega_2,$$

où $\lambda \in \mathcal{R}$, $\omega_1 \in \mathcal{F}_1$, $\omega_2 \in \mathcal{F}_2$. Or

$$\omega_{x+y}(u, 0) = \omega_x(u, 0) + \omega_y(u, 0),$$

car $\mathcal{E}_A(F_1)$ et $\mathcal{E}_A(F_2)$ sont orthogonaux et invariants par A . Donc $\lambda = \frac{1}{2}$, et l'on a $\omega_{x+y} = \omega_1 + \omega_2$. On en déduit que :

$$\omega_{(\cos \theta)x + (\sin \theta)y} = \cos \theta \{ (\sin \theta) \omega_1 + (\cos \theta - \sin \theta) \omega_x \} + \sin \theta \{ (\cos \theta) \omega_2 - (\cos \theta - \sin \theta) \omega_y \}.$$

Mais $\omega_{(\cos \theta)x + (\sin \theta)y}$ appartient à $\mathcal{F}$, donc se décompose de façon unique sous la forme

$$t(\theta) \omega_{3,\theta} + (1 - t(\theta)) \omega_{4,\theta}, \text{ où } t(\theta) \in [0, 1], \omega_{3,\theta} \in \mathcal{F}_1, \omega_{4,\theta} \in \mathcal{F}_2.$$

Par normalisation, on voit que $t(\theta) = \cos^2 \theta$ et que :

$$(\sin \theta) \omega_1 + (\cos \theta - \sin \theta) \omega_x = (\cos \theta) \omega_{3,\theta}.$$

Le cas où θ tend vers $\pi/2$ montre que $\omega_1 = \omega_x$. De même, $\omega_2 = \omega_y$, et donc

$$\omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y.$$

On change y en iy pour obtenir $\omega_{x+iy} = \omega_x + \omega_y$, donc $\langle \exp(i(uA + vB)) x, y \rangle = 0$.

On en déduit que $\mathcal{E}_A(F_1)$ est invariant par B , pour tout F_1 compact. Comme $\mathcal{R}$ est σ -compact, on en déduit aisément que L est normal.

6. Image numérique d'un opérateur.

On examine maintenant une application b , associée à un opérateur L , qui est une bc -application, mais telle que $b(\mathcal{K}_1)$ ne soit pas, en général, un simplexe.

6.1. Notations : A tout opérateur L de $\mathcal{L}(\mathcal{K})$, on associe l'application b_L de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $b_L(x) = \langle Lx, x \rangle$. Il est immédiat de vérifier que b_L est une b -application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$.

6.2. DÉFINITION : On appelle image numérique de L , et l'on note $W(L)$ l'image de la sphère unité $\mathcal{K}_1$ de $\mathcal{K}$ par b_L :

$$W(L) = b_L(\mathcal{K}_1) .$$

6.3. PROPOSITION : b_L est une bc -application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$.

On remarque tout d'abord que b_L est une fonction affine de L . On en déduit que $W(\alpha L_1 + \beta L_2) = \alpha W(L_1) + \beta W(L_2)$ (α et β complexes).

Soit (x, y) un couple de $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_1$. On peut poser $b(y) = b(x) + r \exp i\varphi$ avec $r > 0$ ($r = 0$ sans intérêt). En changeant L en $\exp(-i\varphi)(L - b_L(x) \frac{1}{\|x\|})$, on est ramené au cas où $b_L(x) = 0$, $b_L(y) = r$. Soit $y' = \exp(i\varphi)y$, et déterminons φ de sorte que $b(\widehat{x + y'})$ appartienne à la droite définie par 0 et $b_L(y)$. Ceci signifie que $\exp i\varphi \langle Ly, x \rangle + \exp(-i\varphi) \langle Lx, y \rangle$ doit être réel. L étant borné peut s'écrire $L = A + iB$, où A et B sont autoadjoints. La condition devient :

$\exp i\varphi \langle Ly, x \rangle + \exp(-i\varphi) \langle Lx, y \rangle = \exp(-i\varphi) \langle L^* x, y \rangle + \exp i\varphi \langle L^* y, x \rangle$,
soit

$$\operatorname{Re} \exp(-i\varphi) \langle Bx, y \rangle = 0 ,$$

condition aisée à satisfaire.

On remarque que le vecteur y' obtenu est de la forme $\exp(i\varphi)y$, donc appartient au sous-espace (complexe) $\{y\}$.

On applique cette remarque, et l'on utilise le théorème 1.5 pour obtenir ([4], [6]) le résultat ci-après.

6.4. THÉORÈME : Soit L un opérateur linéaire borné de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Alors

1° Pour tout sous-espace V de $\mathcal{K}$, $b_L(\mathcal{K}_1 \cap V)$ est convexe. En particulier, l'image numérique $W(L)$ est convexe.

2° $A \subset W(L)$ est une face si, et seulement si, $M(A)$ est un sous-espace de $\mathcal{K}$.

3° Pour tout A de $W(L)$, $M(F(A))$ est le sous-espace de $\mathcal{K}$ engendré par $M(A)$.

6.5. Remarque : Si L est un opérateur non borné de $\mathcal{K}$, défini sur $\mathcal{D}$ et tel que L^* existe et soit défini sur $\mathcal{D}$ ($\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{K}$), b_L n'est plus continue. Toute-

fois, b_L est encore une bc-application de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{C}$, et (Cf. lemme 1.4) bien que b_L ne soit pas continue,

$$b_L(\mathcal{Q} \cap \mathcal{K}_1) \text{ est convexe}$$

(mais non borné).

7. Image numérique et valeurs spectrales.

On "situe" maintenant l'image numérique de L par rapport au spectre de L .

7.1. LEMME : Soit z un point frontière de $\overline{W(L)}$. Alors, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la partie hermitienne de $\exp(i\theta)(L - z1_{\mathcal{K}})$ soit un opérateur positif.

On a vu (proposition 6.3) que $W(\exp(i\theta)(L - z1_{\mathcal{K}})) = \exp(i\theta)\{W(L) - z\}$. On peut donc supposer que $z = 0$. Soit Δ une droite d'appui du convexe $W(L)$; on peut effectuer une rotation dans $\mathcal{C}$ autour de l'origine de sorte que $\exp(i\theta)W(L)$ soit dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z) \geq 0$. Dans ces conditions, $\forall x \in \mathcal{K}$, $\operatorname{Re}\langle L'x, x \rangle \geq 0$ où $L' = \exp(i\theta)(L - z1_{\mathcal{K}})$, soit $\langle (L' + L'^*)x, x \rangle \geq 0$, et le lemme est démontré.

7.2. THÉORÈME : Soit $\Sigma(L)$ l'enveloppe convexe fermée du spectre d'un opérateur borné L . Alors $\Sigma(L) \subset \overline{W(L)}$ et le spectre résiduel de L est intérieur à $W(L)$.

Soit z une valeur propre (resp. une valeur propre approchée) de L . Il existe alors un x (resp. une suite x_n) de $\mathcal{K}_1$ tel que $(L - z1_{\mathcal{K}})x = 0$ (resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} (L - z1_{\mathcal{K}})x_n = 0$), donc tel que $b_L(x) = z$ (resp. $b_L(x_n) \rightarrow z$). Donc $z \in W(L)$ (resp. $\overline{W(L)}$).

Si z appartient au spectre résiduel de L , $\overline{\operatorname{Im}(L - z)} \neq \mathcal{K}$, donc si $x \in \operatorname{Im}(L - z)^\perp$, $\langle (L - z)x, x \rangle = 0$, soit $b_L(x) = z$.

Supposons z point frontière de $W(L)$ et valeur spectrale résiduelle. On a vu (lemme 7.1) que l'on peut se ramener au cas où $z = 0$ et $L = A + iB$ avec A positif. Il existe donc x_0 tel que $b_L(x_0) = z$, donc $b_A(x_0) = 0$. Comme A est positif, on a $Ax_0 = 0$. Or $x_0 \in \operatorname{Im} L^\perp$, donc $\forall y \in \mathcal{K}$, $\langle Ly, x_0 \rangle = 0$, soit $\langle (A + iB)y, x_0 \rangle = 0$, donc $\langle By, x_0 \rangle = \langle y, Bx_0 \rangle = 0$, c'est-à-dire que $Bx_0 = 0$, et 0 est valeur propre de L .

Comme tout point extrémal de $\Sigma(L)$ appartient au compact $\operatorname{sp}(L)$ qui est contenu dans $\overline{W(L)}$, le théorème est démontré ($\operatorname{sp}(L) = \text{spectre de } L$).

7.3. DÉFINITION : Un point extrémal z de $\overline{W(L)}$ est un VERTEX de $\overline{W(L)}$ si le cône fermé de sommet z engendré par $\overline{W(L)}$ est saillant.

7.4. THÉORÈME : Tout vertex de $\overline{W(L)}$ appartient au spectre approché de L .

On se ramène au cas où le vertex est 0 , et où $L = A + iB$ avec A positif.

" 0 est un vertex" implique " $\exists M$ réel positif tel que, pour tout x de $\mathcal{K}_1$, donc de $\mathcal{K}$, $|\langle Bx, x \rangle| \leq M\langle Ax, x \rangle$ ".

" $0 \in \overline{W(L)}$ " implique "il existe une suite x_n de $\mathcal{H}_1$ telle que $b_L(x_n) \rightarrow 0$ ".
Comme

$$|\langle B(x_n + \lambda Bx_n), x_n + \lambda Bx_n \rangle| \leq M \langle A(x_n + \lambda Bx_n), x_n + \lambda Bx_n \rangle$$

et que $\langle Bx_n, x_n \rangle$ et Ax_n convergent vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$, on a :

$$(\lambda \text{ réel}) \lim_{n \rightarrow \infty} |2\lambda \|Bx_n\|^2 + \lambda^2 \langle B^3 x_n, x_n \rangle| \leq M \lambda^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \langle ABx_n, Bx_n \rangle$$

(Ces limites existent, en extrayant au besoin une sous-suite, car A et B sont bornés). On a donc

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} \|Bx_n\|^2 + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \langle B^3 x_n, x_n \rangle \leq M \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \langle ABx_n, Bx_n \rangle.$$

Ceci étant vrai pour tout λ , on voit que $\lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} Lx_n = 0$.

7.5. THÉORÈME : Si L est normal, $\overline{W(L)} = \Sigma(L)$ (L borné).

Ce théorème est une conséquence triviale de la théorie spectrale des opérateurs normaux. On donne ici une démonstration indépendante de cette théorie.

Il suffit, étant donné que $\Sigma(L) \subset \overline{W(L)}$ qui est compact convexe, de montrer que tout point extrémal de $\overline{W(L)}$ appartient au spectre de L . On se ramène toujours au cas où 0 est un point extrémal de $\overline{W(L)}$, et $L = A + iB$ avec A positif. Il existe donc une suite x_n de $\mathcal{H}_1$ telle que $Ax_n \rightarrow 0$ et $b_L(x_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

L étant borné, on peut supposer $\|B\| < 1$, de sorte que l'opérateur

$$C = B + i(1 - B^2)^{\frac{1}{2}}$$

existe, est borné, unitaire et commute avec tout opérateur commutant avec B , en particulier avec A , car L est normal. Soit $x_n^\pm = (\frac{1}{\sqrt{2}} \pm C)x_n$. On a

$$b_L(x_n^+) + b_L(x_n^-) = 2b_L(x_n);$$

0 étant extrémal et $\overline{W(L)}$ étant compact, il existe une sous-suite de x_n (notée encore x_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_L(x_n^+) = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{2b_B(x_n) + \langle (C + C^*)Bx_n, x_n \rangle\} = 0,$$

soit $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B^2 x_n, x_n \rangle = 0$. Donc $Lx_n \rightarrow 0$, et le théorème est démontré.

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de l'opérateur U de ℓ^2 défini par $U(e_n) = e_{n+1}$. U est non normal, mais $\overline{W(U)} = \Sigma(U) =$ disque unité. Pour des réciproques de 7.5, voir [5], [7] et [10].

On achève ce paragraphe en donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point extrémal de $\overline{W(L)}$ appartienne au spectre de L [9]. On démontre auparavant deux lemmes.

7.6. LEMME : Soit ω une fonction de type positif sur un groupe produit $G_1 \times G_2$. Soit e_1 (resp. e_2) l'élément neutre de G_1 (resp. G_2). Alors, $\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, on a

$$\begin{aligned}
& |\omega(g_1, g_2) \omega(e_1, e_2) - \omega(e_1, g_2) \omega(g_1, e_2)|^2 \\
& \leq (|\omega(e_1, e_2)|^2 - |\omega(g_1, e_2)|^2)(|\omega(e_1, e_2)|^2 - |\omega(g_2, g_1)|^2) .
\end{aligned}$$

Soient

$$\alpha = \omega(e_1, e_2), \quad \beta = \omega(g_1, e_2), \quad \gamma = \omega(e_1, g_2) \quad \text{et} \quad z = \omega(g_1, g_2) .$$

ω de type positif sur $G_1 \times G_2$ implique que la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & z \\ \bar{\beta} & \alpha & \gamma \\ \bar{z} & \bar{\gamma} & \alpha \end{bmatrix}$$

est positive. Son déterminant est donc positif, donc

$$\alpha^3 + (\beta\gamma\bar{z} + \bar{\beta}\bar{\gamma}z) - \alpha(|z|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2) \geq 0 ,$$

soit

$$|\alpha z - \beta\gamma|^2 \leq (\alpha^2 - |\beta|^2)(\alpha^2 - |\gamma|^2)$$

ce qui est la relation cherchée.

7.7. COROLLAIRE : Soit ω une fonction de type positif sur $G_1 \times G_2$ où G_1 est topologique abélien, telle que $g \rightarrow \omega(g, e_2)$ soit un caractère continu de G_1 . Alors

$$\omega(g_1, g_2) = \frac{\omega(e_1, g_2) \omega(g_1, e_2)}{\omega(e_1, e_2)} \quad (\omega \neq 0) .$$

Il suffit de remarquer que tout caractère continu de G_1 est de module constant (égal à 1) et d'utiliser le lemme 7.6.

7.8. LEMME : Soit φ_n une suite de fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{C}$, entières et de type exponentiel uniformément borné, telles que φ_n converge vers zéro pour la convergence compacte dans $\mathbb{R}^p$. Alors, toutes les dérivées partielles à l'origine convergent vers zéro.

D'après les hypothèses faites, la transformée de Fourier $\hat{\varphi}_n$ de φ_n converge vers zéro au sens des distributions à support compact ; il en va donc de même de la suite $x_1^1 \dots x_p^p \hat{\varphi}_n$, et l'on a le résultat par le théorème de Paley-Wiener appliqué aux distributions.

7.9. THÉORÈME : A toute suite x_n de $\mathcal{K}_1$ on associe la suite ω_n de fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^2$, définies par $\omega_n(u, v) = \langle \exp(i(uA + vB)) x_n, x_n \rangle$. Soit z un point extrémal de $\overline{W(L)}$; alors z appartient au spectre de L si, et seulement si, il existe une suite x_n de $\mathcal{K}_1$ telle que $b_L(x_n)$ converge vers z et ω_n converge uniformément sur tout compact vers une fonction ω de type positif sur $\mathbb{R}^2$, lorsque n tend vers l'infini. Dans ces conditions, ω est un caractère de $\mathbb{R}^2$.

On se ramène au cas où $z = 0$ et $L = A + iB$ avec A positif.

Condition nécessaire : On sait (théorème 7.2) que 0 est une valeur propre ou une valeur propre approchée. Il existe donc une suite x_n telle que $Lx_n \rightarrow 0$. Comme A est positif et que $b_L(x_n) \rightarrow 0$, $Ax_n \rightarrow 0$, donc $Bx_n \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Bx_n = 0.$$

Or L est borné et

$$|\langle \exp(i(uA + vB)) x_n, x_n \rangle - 1| \leq \exp(|u|||A|| + |v|||B||) \{ |u|||Ax_n|| + |v|||Bx_n|| \},$$

donc ω_n converge uniformément vers 1 sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

Condition suffisante : On a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_L(x_n) = 0$ et $\omega_n \rightarrow \omega \gg 0$ sur $\mathbb{R}^2$. A étant positif, on a $Ax_n \rightarrow 0$, donc $\omega_n(u, 0) \rightarrow 1$ uniformément sur tout compact. ω est donc une fonction continue de type positif sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\omega(u, 0) = 1$. Il en résulte que $\omega(u, v) = \omega(u, 0) \omega(0, v)$, car $\omega(0, 0) = 1$ (lemme 7.6). On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\omega_n(u, v) - \omega_n(u, 0) \omega_n(0, v)] = 0$$

pour la convergence compacte. Les fonctions considérées étant uniformément bornées par 1, on a

$$\omega(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \exp(ivB) x_n, x_n \rangle$$

et par le lemme 7.8, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p, q, p+q=k} \langle B^p A B^q x_n, x_n \rangle = 0.$$

On peut supposer $\|B\| < 1$ si bien que l'opérateur $C = B + i(1 - B^2)^{\frac{1}{2}}$ existe, est borné et unitaire. La série définissant C étant convergente et A étant borné, la série définissant $\langle C^* A C x_n, x_n \rangle$ converge uniformément en n . Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle C^* A C x_n, x_n \rangle = 0.$$

Soit $x_n^\pm = (1 \pm C)x_n$. On a

$$b_L(x_n^+) + b_L(x_n^-) = b_L(x_n) + b_L(Cx_n).$$

0 est extrémal, $\overline{W(L)}$ compact, et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_L(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_L(Cx_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} b_L(x_n^+) = 0$ (en extrayant au besoin une sous-suite). On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B(C + C^*) x_n, x_n \rangle = 0,$$

soit $Bx_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Donc 0 appartient au spectre approché de L .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BACHMAN (G.) and NARICI (L.). - Functional analysis. - New York, Academic Press, 1966 (Academic Press Textsbooks in Mathematics).
- [2] CHOQUET (G.). - Lectures on analysis. Vol. 2. - New York, W. A. Benjamin, 1969 (Mathematics Lecture Note Series).

- [3] DIXMIER (J.). - Les C^* -algèbres et leur représentations. - Paris, Gauthier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).
- [4] DONOGHUE (W. F.). - On the numerical range of a bounded operator, Mich. math. J., t. 4, 1957, p. 261-263.
- [5] DONOGHUE (W. F.). - On a problem of Nieminen. - Paris, Presses universitaires de France, 1963 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 16, p. 31-33).
- [6] EMBRY (M. R.). - The numerical range of an operator, Pacific J. Math., t. 32, 1970, p. 647-650.
- [7] MENG (C. H.). - A condition that a normal operator have a closed numerical range, Proc. Amer. math. Soc., t. 8, 1957, p. 85-88.
- [8] NAJMARK (M. A.). - Normed rings. - Groningen, P. Noordhoff, 1959.
- [9] PIQUET (C.). - Sur l'image numérique d'un opérateur linéaire borné d'un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 1105-1108.
- [10] STAMPFLI (J. G.). - Minimal range theorems for operators with thin spectra, Pacific J. Math., t. 23, 1967, p. 601-612.

Claude PIQUET
11 allée de Trévis
92330 SCEAUX
