

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

NESSIM SIBONY

Problème de Bernstein pour les fonctions différentiables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 12, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A3_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME DE BERNSTEIN POUR LES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

par Nessim SIBONY

On étudie le problème de Bernstein pour des fonctions de classe C^n sur \mathbb{R} , et pour des espaces de distributions sur \mathbb{R} .

1. Position du problème et notations.

On dit qu'une fonction h , s. c. s. positive sur \mathbb{R} , est un poids, si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^p h(x) < \infty, \quad \text{pour tout entier } p.$$

Soit $\mathcal{H} = (h_0, \dots, h_n)$ un système de $(n+1)$ poids sur \mathbb{R} vérifiant la condition $h_0 \geq h_1 \geq \dots \geq h_n$; $C_{\mathcal{H}}^n(\mathbb{R})$ désignera l'espace vectoriel des fonctions de classe C^n sur \mathbb{R} telles que $h_i(x) |f^{(i)}(x)|$ tende vers zéro à l'infini, pour tout entier $i \leq n$.

On pose

$$N(f) = \sup_{i \leq n} \sup_x h_i(x) |f^{(i)}(x)|;$$

N est une semi-norme, mais on se placera dans le cas où c'est une norme sur $C_{\mathcal{H}}^n(\mathbb{R})$.

De même, $\mathcal{K} = (k_0, \dots, k_n)$ étant un système de $(n+1)$ fonctions mesurables sur \mathbb{R} et localement bornées telles que $\int |x|^r k_i(x) dx < \infty$, pour tout entier r et pour tout $i \leq n$, $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$ désignera l'espace des distributions sur \mathbb{R} dont la dérivée d'ordre i , $i \leq n$, est dans $L^p(k_i dx)$; on suppose, de plus, que $k_0 \geq k_1 \geq \dots \geq k_n$.

Pour f appartenant à $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$, on note

$$\|f\| = \sup_{i \leq n} \left(\int |f^{(i)}(x)| k_i(x) dx \right)^{1/p}.$$

Le problème est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur le système \mathcal{H} (resp. le système \mathcal{K}) pour que l'espace vectoriel des polynômes soit dense dans $C_{\mathcal{H}}^n(\mathbb{R})$ (resp. $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$). On dira alors que le système \mathcal{H} (resp. le système \mathcal{K}) est fondamental.

On notera \mathcal{H}_1 le système $((1+|x|)h_i)_{i \leq n}$, et \mathcal{K}_1 le système $((1+|x|)^p k_i)_{i \leq n}$;

N_1 (resp. $\|\cdot\|_1$) désignera la norme associée.

$C_c^n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions de classe C^n à support compact, et $C_0^n(\mathbb{R})$ celui des fonctions de classe C^n tendant vers zéro à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre inférieur à n .

On notera $\mathbb{C}[x]$ l'espace des polynômes à une variable à coefficients dans \mathbb{C} .

2. PROPOSITION 1. - $C_c^n(\mathbb{R})$ est partout dense dans $C_{\mathcal{K}}^n(\mathbb{R})$ et dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$.

Démonstration.

(a) Densité dans $C_{\mathcal{K}}^n(\mathbb{R})$. K étant un compact de \mathbb{R} , et $\delta > 0$, il existe une fonction C^∞ , $\alpha \geq 0$ sur \mathbb{R} , telle que $\alpha = 1$ dans un voisinage de K , et $\alpha(x) = 0$ si $d(x, K) \geq \delta$, et de plus $|\alpha^{(i)}(x)| \leq \frac{M}{\delta^i}$ pour $i \leq n$, où M est une constante ne dépendant que de n .

Soient $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, et $f \in C_{\mathcal{K}}^n(\mathbb{R})$; posons

$$K_i = \{x \mid h_i(x) |f^{(i)}(x)| \geq \varepsilon \frac{\delta^{2n}}{M}\} \quad \text{et} \quad K = \bigcup_{i=0}^n K_i,$$

K est compact, $\alpha f \in C_c^n(\mathbb{R})$, de plus

$$\begin{aligned} h_i(x) |f^{(i)}(x) - (\alpha f)^{(i)}(x)| &\leq h_i(x) |f^{(i)}(x) - \alpha f^{(i)}(x)| + C h_i(x) \sum_{j=1}^i |\alpha^{(j)} f^{(i-j)}(x)| \\ &\leq h_i(x) |f^{(i)}(x) - \alpha f^{(i)}(x)| + C \sum_{j=1}^i h_{i-j} |\alpha^{(j)} f^{(i-j)}(x)|. \end{aligned}$$

On a utilisé l'hypothèse $h_i \leq h_{i-j}$. Sur K , $h_i |f^{(i)} - \alpha f^{(i)}|$ est nul, et à l'extérieur de K , il est inférieur à ε/M ; de même, $h_{i-j} |\alpha^{(j)} f^{(i-j)}|$ est nul dans un voisinage de K , et à l'extérieur de K , il est inférieur à $\frac{M}{\delta^j} \varepsilon \frac{\delta^{2n}}{M} \leq \varepsilon$.

D'où il résulte que

$$h_i(x) |f^{(i)}(x) - (\alpha f)^{(i)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} + Cn\varepsilon,$$

ε étant arbitraire, ceci achève la démonstration.

(b) Densité dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$. Les distributions à support compact telles que $f^{(i)} \in L^p(K_i)$ sont denses dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$; en effet, soit ϕ appartenant à $C_c^\infty(\mathbb{R})$, ϕ nulle hors de $(-2, +2)$, et valant 1 sur $(-1, +1)$, et soit ϕ_r telle que $\phi_r(x) = \phi\left(\frac{x}{r}\right)$. On a

$$\begin{aligned} & \left(\int |(\Phi_r f)^i - f^i|^p k_i dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left(\int |\Phi_r f^i - f^i|^p k_i dx \right)^{1/p} + C \sum_{j=1}^i \frac{1}{r^j} \left(\int |\Phi^j(\frac{x}{r}) f^{(i-j)}(x)|^p k_{i-j}(x) dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

car $k_{i-j} \geq k_i$; il suffit de faire tendre r vers l'infini dans l'inégalité précédente. Il reste à approcher f à support compact K avec f dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$ par des fonctions de $C_c^n(\mathbb{R})$.

Posons

$$(J_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int \Phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y) dy,$$

$J_\varepsilon f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $J_\varepsilon f$ est à support dans $H = \{x \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}$; de plus,

$$(J_\varepsilon f)^{(i)}(x) = J_\varepsilon [f^{(i)}(x)],$$

ceci pour $i \leq n$, donc

$$\begin{aligned} \int |(J_\varepsilon f)^i - f^i|^p k_i(x) dx &= \int_H |J_\varepsilon f^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)|^p k_i(x) dx \\ &\leq C \int_H |J_\varepsilon f^{(i)}(x) - f^{(i)}(x)|^p dx \end{aligned}$$

qui tend vers zéro avec ε .

On a utilisé le fait que k_i est bornée sur tout compact.

PROPOSITION 2. - L'espace vectoriel V engendré par les $(x-z)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$, $\text{Im } z \neq 0$, est partout dense dans $C_0^n(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{i \leq n} \sup_x |f^{(i)}(x)|$.

Démonstration. - L'adhérence de V contient l'algèbre engendrée par V ; en effet, les éléments de la forme $(x-z_1)^{-1} \dots (x-z_n)^{-1}$, où les z_i sont tous différents, sont dans V ; il suffit, en effet, de décomposer la fraction en éléments simples ; quant aux éléments de la forme $(x-z)^{-2}$, par exemple, on peut les approcher par $(x-z_1)^{-1} (x-z_2)^{-1}$, où $z_1 \neq z_2$, et z_1 et z_2 assez voisins de z .

Or l'algèbre A engendrée par V est auto-adjointe, sépare les points, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $f \in A$ avec $f'(x) \neq 0$, d'où la densité dans $C_0^n(\mathbb{R})$, ceci d'après un théorème de Reid (voir [6]).

COROLLAIRE 3. - L'espace vectoriel V , engendré par $(x-z)^{-1}$ avec $\text{Im } z \neq 0$, est partout dense dans $C_{\mathcal{K}}^n(\mathbb{R})$ (resp. dans $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$).

Démonstration. - Cela résulte des propositions 1 et 2, et du fait que les h_i sont bornés et les k_i intégrables.

THÉORÈME 4. - Le système \mathcal{H}_1 (resp. \mathcal{K}_1) est fondamental, si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im } z \neq 0$, on a

$$\sup_{\substack{N(p) \leq 1 \\ p \in \mathbb{C}[x]}} |p(z)| = +\infty \quad (\text{resp.} \quad \sup_{\substack{\|p\| \leq 1 \\ p \in \mathbb{C}[x]}} |p(z)| = +\infty) .$$

Démonstration. - Supposons que $(x - z_0)^{-1}$ appartienne à l'adhérence de $\mathbb{C}[x]$ dans $\mathbb{C}_{\mathcal{H}_1}^n(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit P un polynôme tel que

$$(1) \quad (1 + |x|) h_i(x) |(x - z_0)^{-(i+1)} (-1)^i i! - P^{(i)}(x)| \leq \varepsilon .$$

Posons

$$K = \sup_{0 \leq i \leq n} \sup_x \frac{|x - z_0|^{i+1}}{(1 + |x|)^{i+1}} \quad \text{et} \quad Q(x) = (x - z_0) P(x) - 1 .$$

On a $|\frac{Q}{\varepsilon K}(z_0)| = \frac{1}{\varepsilon K}$; or, d'après (1), $h_0(x) |Q(x)| \leq \varepsilon K$. On va montrer que $N(Q/\varepsilon K) \leq M$. Pour $i \leq n$, soit

$$Q_i(x) = P^{(i)}(x) (x - z_0)^{i+1} + (-1)^{i+1} i! .$$

On a

$$(x - z_0)^i Q^{(i)}(x) = Q_i(x) + i Q_{i-1}(x) ,$$

donc

$$h_i(x) |Q^{(i)}(x)| \leq \frac{h_i(x)}{|x - z_0|^i} |Q_i(x)| + i \frac{h_{i-1}(x)}{|x - z_0|^i} |Q_{i-1}(x)| .$$

Or, d'après (1),

$$\frac{h_i(x)}{|x - z_0|^i} |Q_i(x)| \leq \varepsilon K \quad \text{et} \quad \frac{h_{i-1}(x)}{|x - z_0|^i} |Q_{i-1}(x)| \leq \frac{\varepsilon K}{\beta} ,$$

où $\beta = \text{Im } z_0 > 0$, donc

$$h_i \left| \frac{Q_i(x)}{\varepsilon K} \right| \leq \left(1 + \frac{i}{\beta} \right) .$$

Comme ε est arbitraire, l'assertion est vérifiée.

Montrons que la condition est suffisante. Soit P un polynôme tel que

$$h_i(x) |P^{(i)}(x)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |P(z_0)| \geq N .$$

Posons

$$Q(x) = \frac{P(x) - P(z_0)}{(z_0 - x) P(z_0)} .$$

Notons $C(z_0) = \sup_x \frac{1 + |x|}{|x - z_0|}$; on a

$$(1 + |x|) h_0(x) |Q(x) + (x - z_0)^{-1}| = \frac{(1 + |x|)}{|x - z_0|} h_0(x) \left| \frac{P(x)}{P(z_0)} \right| \leq \frac{1}{N} C(z_0) .$$

On a

$$P^i(x) = -P(z_0) [Q^i(x)(x - z_0) + iQ^{i-1}(x)] ,$$

et, par hypothèse, $h_i(x) |P^i(x)| \leq 1$, d'où

$$(2) \quad (1 + |x|) h_i(x) |Q^i(x) + \frac{iQ^{(i-1)}(x)}{(x - z_0)}| \leq \frac{C(z_0)}{N} .$$

Raisonnons par récurrence, et supposons que

$$(1 + |x|) h_{i-1}(x) |Q^{(i-1)}(x) + (-1)^i (i-1)! (x - z_0)^{-i}| \leq \frac{K_{i-1}}{N} ,$$

où K_{i-1} est une constante ne dépendant que de z_0 ; on a alors

$$\begin{aligned} & (1 + |x|) h_i(x) |Q^i(x) + (-1)^{i+1} i! (x - z_0)^{-(i+1)}| \\ & \leq (1 + |x|) h_i(x) |Q^i(x) + \frac{iQ^{(i-1)}(x)}{(x - z_0)}| \\ & \quad + (1 + |x|) h_i(x) \left| -\frac{iQ^{i-1}(x)}{(x - z_0)} + (-1)^{i+1} i! (x - z_0)^{-(i+1)} \right| \\ & \leq \frac{C(z_0)}{N} + \frac{(1 + |x|)}{|x - z_0|} h_{i-1}(x) i |Q^{(i-1)}(x) + (-1)^i (i-1)! (x - z_0)^{-i}| \\ & \leq \frac{C(z_0)}{N} + \frac{i}{\beta} \frac{K_{i-1}}{N} . \end{aligned}$$

La majoration du premier terme résulte de (2) ; celle du second résulte de l'hypothèse de récurrence ; $\beta = \text{Im } z_0$; or N est arbitrairement grand, donc $(x - z_0)^{-1}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{C}[x]$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}_1}^n(\mathbb{R})$.

Nous n'écrivons pas la démonstration pour $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$, car elle résulte d'approximations du même type.

THÉORÈME 5. - Le système \mathcal{K}_1 (resp. \mathcal{K}_1) est fondamental, si, et seulement si,

$$(3) \int_{\mathbb{R}} \sup_{\substack{N(p) \leq 1 \\ p \in \mathcal{C}[x]}} \frac{\log |p(x)|}{1+x^2} dx = +\infty \quad (\text{resp. même condition avec } \|p\| \leq 1) .$$

Pour la démonstration, nous utilisons les lemmes suivants.

LEMME 6. - Soit B la boule unité de $C_{\mathcal{K}}^n(\mathbb{R})$ (resp. $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$) ; soit \mathcal{B}_s l'ensemble des fonctions g telles que $g = (x-z)^{-1} f$ avec $f \in B$ et $\text{Im } z > s > 0$. Alors \mathcal{B}_s est borné dans $C_{\mathcal{K}_1}^n(\mathbb{R})$ (resp. $W_{\mathcal{K}_1}^{n,p}$).

Démonstration.

(a) Dans $C_{\mathcal{K}_1}^n(\mathbb{R})$,

$$(1 + |x|) h_i(x) |((x-z)^{-1} f(x))^i| \leq C \sum_{p=0}^i \frac{(1+|x|)}{|x-z|} h_{i-p}(x) |f^{(i-p)}(x)| (x-z)^{-p} \leq M(s) .$$

(b) Dans $W_{\mathcal{K}_1}^{n,p}$,

$$(1 + |x|) k_i^{1/p}(x) |((x-z)^{-1} f(x))^i| \leq C \sum_{q=0}^i k_{i-q}^{1/p}(x) |f^{(i-q)}(x)| .$$

Puis on regarde les normes L^p de chaque membre de l'inégalité précédente.

Dans la suite, π désigne, soit la norme de $C_{\mathcal{K}}^n(\mathbb{R})$, soit celle de $W_{\mathcal{K}}^{n,p}$.

LEMME 7. - Soit

$$\delta(z) = \inf_{p \in \mathcal{C}[x]} \pi[(x-z)p(x) - 1], \quad \text{Im } z \neq 0 .$$

Alors $|p(z)| \delta(z) \leq 1$, pour tout polynôme p tel que $\pi(p) \leq 1$.

Démonstration. - Soit I l'idéal de $\mathcal{C}[x]$ engendré par $(x-z)$, et soit φ_z une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}[x]$ muni de la norme π , nulle sur I , et telle que $|\varphi_z(1)| = \delta(z)$ et $\|\varphi_z\| = 1$.

L'existence d'une telle forme linéaire résulte du théorème de Hahn-Banach. Soit $p \in \mathcal{C}[x]$ avec $\pi(p) \leq 1$, $p(x) = p(z) + (x-z)q(x)$, donc $\varphi_z(p) = p(z)\varphi_z(1)$, et par suite

$$|p(z)| \delta(z) = |\varphi_z(p)| \leq 1 .$$

Soient B_s l'enveloppe convexe fermée de \mathcal{B}_s , π_s la jauge de B_s , et $\rho_s(z)$ la distance pour π_s de $(x-z)^{-1}$ à $\mathcal{C}[x]$ lorsque $\text{Im } z > s > 0$. Il est clair

que B_s absorbe les polynômes, et qu'on peut supposer $\rho_s(z) \leq 1$.

LEMME 8. - Avec les notations précédentes, $\rho_s(z) \leq \delta(z)$ si $\text{Im } z > s$.

Démonstration. - Soit $\varepsilon > 0$; il existe $f \in B$ et un polynôme p tel que $(x - z)p(x) - 1 = [\delta(z) + \varepsilon]f(x)$, d'où

$$p(x) - (x - z)^{-1} = [\delta(z) + \varepsilon]f(x)(x - z)^{-1}.$$

Par suite, $\rho_s(z) \leq \delta(z) + \varepsilon$; ε étant arbitraire, on a

$$\rho_s(z) \leq \delta(z).$$

LEMME 9. - Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes sur \mathbb{C} majorés en valeur absolue sur un demi-plan P par une fonction e^f , où f est surharmonique positive dans P ; alors la famille $(p_i)_{i \in I}$ admet une majoration du même type sur tout demi-plan translaté de P .

Pour la démonstration, voir [3] et [5].

Démonstration du théorème 5. - La condition (3) est suffisante. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im } z_0 > s$, tel que $\rho_s(z_0) \neq 0$. D'après le théorème de Hahn-Banach,

$$\log \rho_s(z) = \sup_{\varphi} \log |\varphi[(x - z)^{-1}]|,$$

le sup étant pris sur les formes linéaires φ continues pour π_s telles que $|\varphi| \leq 1$. Or l'application $z \rightarrow \log |\varphi[(x - z)^{-1}]|$ est sousharmonique, car l'application $z \rightarrow (x \rightarrow (x - z)^{-1})$ est analytique de $\text{Im } z > 0$ dans $\mathbb{C}_0^n(\mathbb{R})$, et par suite dans $W_{\mathbb{C}}^{n,p}$ ou $C_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{R})$. Par suite, $\log \rho_s(z)$ est une fonction surharmonique positive dans $\text{Im } z > s$.

D'après les lemmes 7 et 8, on a $\rho_s(z)|p(z)| \leq 1$ dès que $\pi(p) \leq 1$. Par suite, $|p(z)| \leq e^{-\log \rho_s(z)}$ dès que $\pi(p) \leq 1$, et ceci dans $\text{Im } z > s$. D'après le lemme 9, il existe une fonction harmonique ψ positive, telle que $|p(z)| \leq e^{\psi(z)}$ dans $\text{Im } z > -s$, pour tout p vérifiant $\pi(p) \leq 1$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{\pi(p) \leq 1} \frac{\log |p(x)|}{1 + x^2} dx \leq \int \frac{\psi(x)}{1 + x^2} dx \leq \pi\psi(i) < \infty.$$

Donc, si $\int_{\mathbb{R}} \sup_{\pi(p) \leq 1} \frac{\log |p(x)|}{1 + x^2} dx = \infty$, alors $\rho_s(z) = 0$ dans $\text{Im } z > s$, i. e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{C}[x]$ et $f_i \in B$ avec

$$(x - z)^{-1} - p(x) = \varepsilon \sum_{i=1}^q \lambda_i f_i(x - z_i)^{-1}, \quad \text{Im } z_i > s, \quad \sum |\lambda_i| \leq 1.$$

Donc $\pi_1[(x - z)^{-1} - p(x)] \leq \varepsilon$, d'après le lemme 6.

La condition (3) est nécessaire, car sinon on aurait

$$\log|p(i)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|p(x)|}{1+x^2} dx \leq M < \infty \quad \text{dès que } \pi(p) \leq 1,$$

ce qui contredit le théorème 4.

PROPOSITION 10. - Supposons que la topologie définie par π soit plus fine que la topologie de la convergence compacte ; alors

$$\sup_{\substack{\pi(p) \leq 1 \\ p \in \mathcal{C}[\mathbb{R}]}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log|p(x)|}{1+x^2} dx = +\infty$$

est nécessaire pour que π soit fondamentale.

La démonstration est la même que dans [1].

COROLLAIRE 11. - Si la topologie définie par π est plus fine que celle de la convergence compacte, et si le système \mathcal{K} (resp. \mathcal{K}) est fondamental, il en est de même du système $((1 + |x|)^r h_i)_{i \leq n}$ (resp. $((1 + |x|)^r k_i)_{i \leq n}$), où r est un entier quelconque.

Démonstration. - \mathcal{K} étant fondamental, d'après la proposition 10,

$$\sup_{\pi(p) \leq 1} \int \frac{\log|p(x)|}{1+x^2} dx = +\infty, \quad \text{donc} \quad \int \sup_{\pi(p) \leq 1} \frac{\log|p(x)|}{1+x^2} dx = +\infty.$$

Le théorème 5 permet d'en déduire que \mathcal{K}_1 est fondamental, etc.

Remarque. - Considérons l'espace $\mathcal{C}_p^n(\mathbb{R})$ des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} à croissance polynomiale, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre n . On se donne $(n+1)$ poids $(h_0, \dots, h_n) = \mathcal{K}$, mais on ne suppose plus $h_0 \geq h_1 \geq \dots \geq h_n$, et on se pose le problème de la densité, dans cet espace, de $\mathcal{C}[\mathbb{R}]$ pour la norme $\|f\| = \sup_{i \leq n} \sup_x h_i(x) |f^{(i)}(x)|$. On va supposer que les fonctions (h_i) ne s'annulent pas, et que, pour $1 \leq i \leq n$, h_i est une fonction paire décroissante dans \mathbb{R}^+ . Sous ces hypothèses, on peut montrer que le système \mathcal{K} est fondamental, si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(\alpha) \sup_{\substack{\|p\| \leq 1 \\ p \in \mathcal{C}[x]}} |p(z)| = +\infty ;$$

$$(\beta) \int \sup_{\|p\| \leq 1} \frac{\log |p(x)|}{1+x^2} dx = +\infty .$$

La démonstration consiste à montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que " % fondamental " équivaut à dire que le système

$$\left(\sup_{0 < i < n} \frac{h_i(x)}{(1+|x|)^i}, \sup_{1 < i < n} \frac{h_i(x)}{(1+|x|)^i}, \dots, h_n(x) \right)$$

est fondamental. Puis à utiliser les théorèmes 4 et 5, et le corollaire 11.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FERRIER (J.-P.). - Ensembles spectraux et approximation polynomiale pondérée, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 6e année, 1966/67, n° 14, 36 p.
- [2] FERRIER (J.-P.). - Approximation de fonctions analytiques avec croissance, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 9e année, 1969/70, n° 1, 7 p.
- [3] FERRIER (J.-P.). - Approximation polynomiale dans une bande ou dans un angle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 183-184.
- [4] MERGELJAN (S. N.). - Weighted approximation by polynomials, Amer. math. Soc., Translations, Series 2, t. 10, 1958, p. 59-106 ; [en Russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 11, 1956, p. 107-152.
- [5] MERGELJAN (S. N.). - Uniform approximations to functions of a complex variable, Series and approximation, p. 294-391. - Providence, American mathematical Society, 1962 (Amer. math. Soc., Translations, Series 1, Vol. 3).
- [6] NACHBIN (L.). - Résultats récents et problèmes de nature algébrique en théorie de l'approximation, Proceedings of the international congress of mathematicians [1962. Stockholm], p. 379-384. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.
- [7] REID (G. A.). - A theorem of Stone-Weierstrass type, Camb. phil. Soc., t. 62, 1966, p. 649-666.
- [8] SIBONY (N.). - Problème de Bernstein pour les fonctions continument différentiables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 1683-1685.

(Texte reçu le 23 septembre 1970)

Nessim SIBONY
20 rue de la Glacière
75 - PARIS 13