Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean Saint-Raymond

Topologie sur l'ensemble des compacts non vides d'un espace topologique séparé. Exemple de complémentaire analytique non analytique dans un espace polonais

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 21, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A11_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 21, 6 p.

4 juin 1970

TOPOLOGIE SUR L'ENSEMBLE DES COMPACTS NON VIDES D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE SÉPARÉ.

EXEMPLE DE COMPLÉMENTAIRE ANALYTIQUE NON ANALYTIQUE DANS UN ESPACE POLONAIS

par Jean SAINT-RAYMOND

Soit X un espace topologique séparé. Soit KX l'ensemble des compacts non vides de X, que l'on munit de la topologie (séparée) engendrée par les

$$W(\omega_1, \dots, \omega_n) = \{H \mid H \in KX ; H \subset \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i ; (\forall i) \ (H \cap \omega_i \neq \emptyset)\} ,$$

où les ω_i sont ouverts. On montre aisément (cf. [1], chap. I, § 9, ex. 14) que :

(i) $x \longmapsto \{x\}$ est un homéomorphisme de X sur son image, fermée dans KX ;

(ii) Si Y est un sous-espace de X, KY est un sous-espace de KX ;

(iii) $(H_1, H_2) \longmapsto H_1 \cup H_2$ est continue de $(KX) \times (KX)$ dans KX ;

(iv) KX est séparable si, et seulement si, X l'est ;

(v) Si (H_n) est une suite croissante de compacts, et si $H = \overline{\bigcup_n H_n}$ est compact, H est limite de la suite (H_n).

Si la topologie de X est définie par une structure uniforme $\mathcal{U}$, la topologie de KX est définie par la structure uniforme engendrée par les $(W(V))_{V \in \mathcal{U}}$, où $W(V)$ est l'entourage,

$$W(V) = \{(H_1, H_2) \mid H_1 \subset V(H_2) \text{ et } H_2 \subset V(H_1)\}$$

(cf. [1], chap. II, § 2, ex. 6).

Si la structure uniforme de X est définie par une distance, la distance de Hausdorff sur KX définit la structure uniforme correspondante (cf. [2], § 2, ex. 6). On montre aisément que, si X est un espace métrique complet, KX est un espace métrique complet pour la distance de Hausdorff.

Si X est un espace topologique polonais, il découle de ce qui précède que KX est un espace topologique polonais.

1. THÉORÈME. - Si X est un espace uniforme complet, l'espace uniforme KX est complet.

On peut remarquer que X est isomorphe (cf. [1], chap. 2, § 2, ex. 6) à un sous-espace fermé de KX, donc complet, si KX est complet. Le théorème donne donc, en

fait, une condition nécessaire et suffisante pour que KX soit complet.

Démonstration. - Si X est complet, et si $\mathfrak{F}$ est un filtre de Cauchy sur K, nous poserons

$$\Phi(S) = \overline{\bigcup_{H \in S} H}, \qquad \text{où } S \in \mathfrak{F},$$

$$C = \bigcap_{S \in \mathfrak{F}} \Phi(S).$$

C est fermé dans X, donc complet. Pour montrer que C est compact, il suffit de montrer qu'il est précompact. Soit V un entourage de la structure uniforme $\mathcal{U}$ de X. Il existe un entourage symétrique V_1 de $\mathcal{U}$ tel que $V_1^6 \subset V$, et un ensemble S dans $\mathfrak{F}$ petit, d'ordre $W(V_1)$. Soit H un compact appartenant à S ; pour tout compact H' dans S, on a

$$H' \subset V_1(H), \qquad \text{donc} \quad \bigcup_{H' \in S} H' \subset V_1(H).$$

On a donc

$$\Phi(S) \subset \overline{V_1(H)} \subset V_1^2(H).$$

Comme H est précompact, il existe un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans H, tel que

$$H \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_1(x_i).$$

Alors

$$C \subset \Phi(S) \subset V_1^2(H) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_1^3(x_i).$$

Les ensembles $V_1^3(x_i)$ sont petits, d'ordre V_1^6, puisque V_1 est symétrique, donc petits, d'ordre V. C est donc recouvert par un nombre fini d'ensembles petits, d'ordre V, ce qui montre qu'il est précompact, donc compact.

Montrons maintenant que C est non vide, et que $\mathfrak{F}$ converge vers C. Soit V_0 un entourage de $\mathcal{U}$. Nous avons déjà vu que, si $S_0 \in \mathfrak{F}$ est petit, d'ordre $W(V_0)$, et si H appartient à S_0,

$$C \subset \Phi(S_0) \subset V_0^2(H).$$

Pour démontrer que S_0 est inclus dans $W(V_0^2).(C)$, ce qui assurera la convergence de $\mathfrak{F}$ vers C, il reste à démontrer que tout compact H_0 appartenant à S_0 est inclus dans $V_0^2(C)$, ce qui démontrera aussi que C n'est pas vide. Il suffit

donc de montrer, si V_0 est symétrique, que, pour tout point x_0 de H_0, C rencontre $V_0^2(x_0)$.

Soit S appartenant à $\mathfrak{F}$, et soit H un compact appartenant à $S \cap S_0$. Comme $(H , H_0) \in W(V_0)$, on a $x_0 \in V_0(H) \subset V_0(\Phi(S))$. Donc $V_0(x_0) \cap \Phi(S)$ n'est pas vide. Comme $\Phi(S \cap S')$ est inclus dans $\Phi(S) \cap \Phi(S')$, la famille des

$$(V_0(x_0) \cap \Phi(S))_{S \in \mathfrak{F}}$$

forme une base de filtre sur X. Soit $\mathfrak{G}$ un ultrafiltre plus fin que cette base de filtre.

On va démontrer que $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy ; puisque X est complet, $\mathfrak{G}$ possèdera une limite x_1, qui appartiendra à

$$\Big[\bigcap_{S \in \mathfrak{F}} \overline{(V_0(x_0) \cap \Phi(S))}\Big] \subset \Big[\overline{V_0(x_0)} \cap \Big(\bigcap_{S \in \mathfrak{F}} \Phi(S)\Big)\Big] \subset [V_0^2(x_0) \cap C] .$$

Ceci montrera que $V_0^2(x_0)$ rencontre C, et achèvera la démonstration.

Il suffit pour cela de démontrer que, pour tout entourage symétrique V de $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{G}$ contient une partie de X petite, d'ordre V^6. Soient alors S_1 une partie appartenant à $\mathfrak{F}$ petite, d'ordre V, et H_1 un compact appartenant à S_1. Comme H_1 est précompact, il existe un ensemble fini $\{y_1 , \dots , y_n\}$ dans H_1, tel que

$$H_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i) .$$

On a alors

$$V_0(x_0) \cap \Phi(S_1) \subset \Phi(S_1) \subset V^2(H_1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V^3(y_i) .$$

Comme $\mathfrak{G}$ est un ultrafiltre plus fin que $(V_0(x_0) \cap \Phi(S))_{S \in \mathfrak{F}}$, $\mathfrak{G}$ contient l'un des $V^3(y_i)$, qui est petit d'ordre V^6. Ceci montre que $\mathfrak{G}$ est un filtre de Cauchy, et achève la démonstration.

2. - X peut être paracompact, sans que KX soit paracompact, ni même normal.

Soit Y l'espace topologique obtenu en munissant la droite réelle $\underset{\sim}{R}$ de la topologie engendrée par les intervalles $]a , b]$. On démontre (cf. [2], § 5, ex. 16) que Y est paracompact, et que $Y \times Y$ n'est, ni paracompact, ni même normal.

Soit alors X l'espace produit de Y par l'espace discret $\{0 , 1\}$ qui est compact. X est donc paracompact. Posons

$$f(y , y') = \{(y , 0) ; (y' , 1)\} .$$

On vérifie immédiatement que f est un homéomorphisme de $Y \times Y$ sur un sous-espace fermé de KX. Si ce dernier était normal, il en serait de même de $Y \times Y$, d'où la contradiction.

3. - X peut être lusinien sans que KX soit lusinien, ni même souslinien. Plus précisément, le sous-espace $K\underset{\sim}{Q}$ de l'espace polonais $K\underset{\sim}{R}$ est le complémentaire d'une partie souslinienne, et n'est pas souslinien.

(a) $K\underset{\sim}{Q}$ est le complémentaire d'une partie souslinienne. - Soit G le sous-espace de $\underset{\sim}{R}$ formé des nombres irrationnels ; G est polonais. Soit F le sous-espace de $G \times (K\underset{\sim}{R})$ formé des couples (λ , H) tels que $\lambda \in H$. Comme $\underset{\sim}{R}$ est polonais, il en est de même de $K\underset{\sim}{R}$, donc aussi de $G \times (K\underset{\sim}{R})$. L'application $g : (\lambda , H) \longmapsto \{\lambda\} \cup H$ est continue de $G \times (K\underset{\sim}{R})$ dans $K\underset{\sim}{R}$, et F, ensemble des couples (λ , H) tels que $g(\lambda , H) = H$, est fermé dans $G \times K\underset{\sim}{R}$, donc polonais. Sa projection sur $K\underset{\sim}{R}$ est l'ensemble des compacts de $\underset{\sim}{R}$ qui rencontrent G, donc le complémentaire dans $K\underset{\sim}{R}$ de $K\underset{\sim}{Q}$, et c'est une partie souslinienne.

(b) $K\underset{\sim}{Q}$ n'est pas souslinien. - En vertu du théorème de séparation des ensembles sousliniens, et de ce qui précède, si $K\underset{\sim}{Q}$ était souslinien, il serait borélien dans $K\underset{\sim}{R}$. Or on sait qu'il existe dans $\underset{\sim}{J} = \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ une partie Z souslinienne et non borélienne (par exemple, la trace sur la diagonale de $\underset{\sim}{J} \times \underset{\sim}{J}$ d'un ensemble analytique universel dans $\underset{\sim}{J} \times \underset{\sim}{J}$). On va construire une application borélienne f de $\underset{\sim}{J}$ dans $K\underset{\sim}{R}$, telle que $f^{-1}(K\underset{\sim}{Q}) = \underset{\sim}{J} \setminus Z$. Si $K\underset{\sim}{Q}$ était borélien dans $K\underset{\sim}{R}$, il en serait de même de $f^{-1}(K\underset{\sim}{Q})$, ainsi que de son complémentaire Z, ce qui établirait une contradiction.

Soit $\mathbb{S}$ l'ensemble des suites finies d'entiers $\geqslant 1$. Si s et s' appartiennent à $\mathbb{S}$, nous poserons $s \prec s'$ si s est une section commençante de s'. Nous poserons de même $s \prec \sigma$, si la suite finie s est une section commençante de la suite infinie σ. Nous considérerons dans toute la suite l'ensemble $\underset{\sim}{N}$ comme privé de 0.

Soit j l'application de $\underset{\sim}{J} \cup \mathbb{S}$ dans $\underset{\sim}{R}$ qui, à une suite finie ou infinie d'entiers $\geqslant 1$, associe le nombre réel compris entre 0 et 1 qui admet cette suite comme suite des quotients incomplets de son développement en fraction continue. On a

$$j(\mathbb{S}) = \underset{\sim}{Q} \cap]0 , 1] ,$$

$$j(\underset{\sim}{J}) = G \cap]0 , 1[.$$

La topologie de $\underset{\sim}{J}$ admet une base formée d'ouverts fermés. Z est donc le noyau d'un système déterminant régulier d'ouverts fermés $(F_s)_{s\in\mathbb{S}}$,

$$Z = \bigcup_{\sigma\in\underset{\sim}{J}} \left(\bigcap_{s<\sigma} F_s \right) .$$

Nous désignerons par $f_s(x)$ la fonction de $\underset{\sim}{J}$ dans $K\underset{\sim}{R}$, qui vaut $\{0\}$ si $x \notin F_s$, et $\{0 , j(s)\}$ si $x \in F_s$. Comme F_s est ouvert et fermé, f_s est continue. Posons

$$f(x) = \overline{\bigcup_{s\in\mathbb{S}} f_s(x)} \subset (0 , 1) .$$

Donc $f(x)$ appartient à $K\underset{\sim}{R}$. En vertu des propriétés (iii) et (iv) rappelées plus haut, et du fait que $\mathbb{S}$ est dénombrable, la fonction f est de première classe de Baire, donc borélienne. Il reste à montrer que $f^{-1}(K\underset{\sim}{Q}) = \underset{\sim}{J} \setminus Z$.

Soit z dans Z ; il existe donc σ dans $\underset{\sim}{J}$, tel que $z \in \bigcap_{s<\sigma} F_s$. Alors, pour tout $s < \sigma$, $f_s(z) = \{0 , j(s)\}$. La convergence des réduites $j(s)$ vers $j(\sigma)$, et la définition de f , entraînent que $j(\sigma) \in f(z)$, et donc que $f(z) \notin K\underset{\sim}{Q}$.

Inversement, si $f(z) \notin K\underset{\sim}{Q}$, il existe un nombre irrationnel λ dans $f(z)$, λ appartient à $]0 , 1[$, et il existe une suite infinie $\sigma \in J$ telle que $\lambda = j(\sigma)$. Soit s_0 une suite finie, section commençante de σ . L'ensemble V des nombres réels x tels que $j^{-1}(x) \succ s_0$ est un voisinage de $j(\sigma) = \lambda$, donc rencontre $\bigcup_{s\in\mathbb{S}} f_s(z)$. Il existe donc $s \succ s_0$ tel que $j(s) \in f_s(z)$; alors $z \in F_s \subset F_{s_0}$, puisque le système déterminant est régulier.

On a donc

$$z \in \bigcap_{s_0<\sigma} F_{s_0} \subset Z .$$

Ceci achève la démonstration.

La méthode de (b) est inspirée de [3], où S. MAZURKIEWICZ démontre, également à l'aide d'une partie analytique non borélienne auxiliaire, que, dans l'espace des fonctions numériques continues sur $(0 , 1)$ muni de la norme uniforme, l'ensemble des fonctions différentiables est une partie non souslinienne, dont le complémentaire est souslinien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 1-2. 3e édition. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1142 ; Bourbaki, 11).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chap. 9. 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[3] MAZURKIEWICZ (Stefan). - Über die Menge der differenzierbaren Funktionen, Fund. math., Warszawa, t. 27, 1936, p. 244-249.

(Texte reçu le 18 juin 1970)

Jean SAINT-RAYMOND
Ass. Fac. Sc. Paris
18 rue de Moscou
75 - PARIS 08