

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

ERIC VAN DER OORD

Opérateurs de Calderón-Zygmund dans $\mathbb{R}^n$. II

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A6, p. A1-A4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A7_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND DANS $\mathbb{R}^n$, II.

par Eric VAN DER OORD

Dans cet exposé, on va étudier brièvement le comportement des opérateurs de classe C_p^∞ sur les fonctions höldériennes.

Voici d'abord un résultat sur les opérateurs de convolution.

THÉOREME 1. - Soient $h \in \overset{\circ}{G}^{-n}$, et $\underline{h}$ l'opérateur de convolution qui lui est associé. Alors, pour $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$, $\alpha = p + \lambda$, $p \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < 1$, $\underline{h}$ applique continûment $H^p \cap C_b^\alpha$ dans $H^p \cap C_b^\alpha$.

Démonstration.

1° Supposons d'abord $p = 0$, et remarquons que si $f \in \mathcal{L}^2 \cap C_b^\lambda$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |Z| \leq R} h(Z) f(X - Z) dZ = \int_{|Z| \leq R} h(Z) [f(X - Z) - f(X)] dZ,$$

car $\int_Z h(Z') d\sigma = 0$ et l'intégrale du second membre est, pour R fixé, uniformément absolument convergente, d'après la majoration :

$$\begin{aligned} \int_{R \leq |Z| \leq r'} |h(Z) [f(X - Z) - f(X)]| dz &\leq \text{cte } \|h\|_{C(\Sigma)} [f]_\lambda \int_R^{r'} \frac{dz}{z^{1-\lambda}} \\ &= \text{cte } \|h\|_{C(\Sigma)} [f]_\lambda \frac{r'^\lambda - R^\lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

2° Toujours dans le cas où $p = 0$, soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $d = |x_1 - x_2|$. Nous voulons majorer l'expression

$$\underline{h}f(x_2) - \underline{h}f(x_1) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow +\infty}} \int_{\varepsilon \leq |Z| \leq \eta} h(Z) [f(x_2 - Z) - f(x_1 - Z)] dZ.$$

Comme h est dans $\mathcal{L}^2$ à l'infini, on voit qu'on peut supposer f à support compact (*). Dans la suite, R sera un nombre positif assez grand pour que $f = 0$ hors de $B(x_1, R) \cap B(x_2, R)$.

(*) Bien entendu, la majoration que l'on va trouver ne dépendra pas du support de f !

Alors, on peut écrire

$$\underline{h}f(X_2) = \int_{B_{2d}(X_1)} h(X_2 - z)[f(Z) - f(X_2)] dz + \int_{B_R(X_2) - B_{2d}(X_1)} h(X_2 - z)[f(Z) - f(X_2)] dz$$

$$\underline{h}f(X_1) = \int_{B_{2d}(X_1)} h(X_1 - z)[f(Z) - f(X_1)] dz + \int_{B_R(X_1) - B_{2d}(X_1)} h(X_1 - z)[f(Z) - f(X_2)] dz$$

où l'on s'est servi du fait que $\int_{\Sigma} h d\sigma = 0$.

$$|\underline{h}f(X_2) - \underline{h}f(X_1)| = I_1 + I_2 + I_3, \text{ avec}$$

$$I_1 = \int_{B_{2d}(X_1)} |h(X_2 - z)[f(Z) - f(X_2)]| dz \leq \text{cte } \|h\|_{C(\Sigma)} [f]_{\lambda} \frac{d^{\lambda} \cdot 3^{\lambda}}{\lambda},$$

puisque $B_{2d}(X_1) \subset B_{3d}(X_2)$.

$$I_2 = \int_{B_{2d}(X_1)} |h(X_1 - z)[f(Z) - f(X_1)]| dz \leq \text{cte } \|h\|_{C(\Sigma)} [f]_{\lambda} \frac{d^{\lambda} \cdot 2^{\lambda}}{\lambda}.$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{B_R(X_1) \cap B_R(X_2) - B_{2d}(X_1)} |h(X_2 - z) - h(X_1 - z)| \cdot |f(Z) - f(X_1)| dz \\ &\leq \text{cte } \|h\|_{C^1(\Sigma)} [f]_{\lambda} \cdot d \cdot \int_{|z| \geq d} \frac{dz}{|z|^{n+1-\lambda}} = \text{cte } \|h\|_{C^1(\Sigma)} [f]_{\lambda} \frac{d^{\lambda}}{1-\lambda}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé une formule des accroissements finis et l'homogénéité de h pour la première parenthèse, et la continuité höldérienne uniforme de f pour la seconde.

En résumé, il existe une constante C , ne dépendant que de n , telle que

$$|\underline{h}f(X_2) - \underline{h}f(X_1)| \leq C \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda} \right] \|h\|_{C^1(\Sigma)} [f]_{\lambda} |x_2 - x_1|^{\lambda},$$

ce qui montre que $\underline{h}$ applique $\mathcal{E}^2 \cap C_b^{\lambda}$ dans $\mathcal{E}^2 \cap C^{\lambda}$, avec

$$[\underline{h}f]_{\lambda} \leq C \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda} \right] \|h\|_{C^1(\Sigma)} [f]_{\lambda}.$$

3° Passons maintenant au cas $p > 0$. On sait que, pour $f \in H^m$, $\underline{h}f \in H^m$ (m entier ≥ 0) et que l'on a l'égalité de distributions :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} (\underline{h}f) = \underline{h} \left(\frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial x^{\alpha}} f \right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| \leq m.$$

On obtient donc le résultat par une application répétée du lemme suivant :

LEMME 1. - Si f et $g \in C(\mathbb{R})$ et si $f' = g$ au sens des distributions, alors $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' = g$ au sens usuel.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\underline{h}f \in C_b^\alpha$ et que $\underline{h}$ est continu pour la norme $\|\cdot\|_{H^m} + \|\cdot\|_\alpha$ sur $H^m \cap C_b^\alpha$. Cela vient du lemme suivant :

LEMME 2 - Soit $f \in \mathcal{L}^2$ telle que $[f]_\lambda < +\infty$, alors $\|f\|_\infty^{1+\frac{n}{2\lambda}} \leq \text{cte} \|f\|_2 [f]_\lambda^{\frac{n}{2\lambda}}$.
L'inégalité reste vraie pour $\lambda = 1$, en remplaçant $[f]_\lambda$ par

$$|f|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\overrightarrow{\text{grad}} f(x)|.$$

En effet, si $|f(x)| > 0$, on a, $|f(x+u)| \geq |f(x)| - |u|^\lambda [f]_\lambda \geq \frac{1}{2} |f(x)|$ dès que $|u| \leq (\frac{|f(x)|}{2[f]_\lambda})^{1/\lambda}$, ce qui donne

$$\|f\|_2 \geq \text{cte} |f(x)| \left(\frac{|f(x)|}{2[f]_\lambda}\right)^{\frac{n}{2\lambda}},$$

d'où

$$|f(x)|^{1+\frac{n}{2\lambda}} \leq \text{cte} \|f\|_2 [f]_\lambda^{\frac{n}{2\lambda}},$$

donc :

$$\|f\|_\infty \leq \text{cte} \|f\|_2^{\frac{2\lambda}{n+2\lambda}} [f]_\lambda^{\frac{n}{n+2\lambda}},$$

et d'après une inégalité de Hölder

$$\|f\|_\infty \leq \text{cte} (\|f\|_2 + [f]_\lambda),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE 1. - L'application bilinéaire :

$$\overset{0-n}{G}_{C^1(\Sigma)} \times H^p \cap C_b^\alpha \rightarrow H^p \cap C_b^\alpha, \quad \alpha = p + \lambda, \quad 0 < \lambda < 1, \quad p \in \mathbb{N},$$

$$(h, f) \mapsto \underline{h}f$$

est continue lorsqu'on munit $H^p \cap C_b^\alpha$ de la norme $\|\cdot\|_{H^p} + \|\cdot\|_\alpha$.

En effet, cela résulte des majorations :

$$\|\underline{h}f\|_2 \leq \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} \cdot \|f\|_2 \rightarrow \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} \leq \text{cte} \|h\|_{C^1(\Sigma)} [\underline{h}f]_\lambda \leq \text{cte} \|h\|_{C^1(\Sigma)} [f]_\lambda$$

et des lemmes 1 et 2.

Passons maintenant au résultat principal de cet exposé.

PROPOSITION 1. - Soit $H \in CZ_0^\beta$, $\beta = [\beta] + \mu$, $0 \leq \mu < 1$.

Si $\mu = 0$, H applique continûment $H^{[\beta]}$ dans $H^{[\beta]}$.

Si $\mu > 0$, H applique continûment $H^{[\beta]} \cap C_b^\beta$ dans $H^{[\beta]} \cap C_b^\beta$.

Les résultats pour $\mu = 0$ ont été déjà établis dans l'exposé précédent. De plus, on sait que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leq [\beta]$, il existe des $H_\alpha^\gamma \in CZ_0^{\beta-|\alpha|}$, $|\gamma| \leq |\alpha|$, tels que, pour tout $f \in H^{[\beta]}$, on ait $D^\alpha(Hf) = \sum_\gamma H_\alpha^\gamma (D^\gamma f)$ au sens des distributions.

Le lemme 1 permet donc de ramener le cas $\mu > 0$, $[\beta]$ quelconque, au cas $\mu > 0$, $[\beta] = 0$.

Ensuite, le lemme 2 montre qu'il suffit de prouver que, pour chaque $H \in CZ_0^\mu$, $0 < \mu < 1$, il existe une constante A_H telle que

$$[Hf]_\mu \leq A_H [f]_\mu, \quad \text{pour } f \in \mathcal{E}^2 \cap C^\mu.$$

Soit $\underline{H}f(X) = a(X) f(X) + (\underline{h}f)(X)$, $h \in G_\mu^{-n}$, $a \in C^\mu$. On voit qu'on peut supposer $a = 0$.

Considérons alors la fonction de deux variables

$$\tilde{h}f(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|Z| \geq \varepsilon} h(t, Z) f(x - Z) dZ = (\underline{h}(t, \cdot) f)(x).$$

Le théorème 1 montre que $\tilde{h}f$ est de classe C_b^μ en x . Or

$$G_\beta^{-n} = C_b^\beta(\mathbb{R}^n, \frac{G_\beta^{-n}}{C^\infty(\Sigma)}) \subset C_b^\beta(\mathbb{R}^n, \frac{G_\beta^{-n}}{C^1(\Sigma)}).$$

Le corollaire 1 montre alors que $\tilde{h}f$ est aussi de classe C_b^μ en t . De plus, $[\tilde{h}f(t, \cdot)]_\mu$ est une fonction bornée de t , et $[\tilde{h}f(\cdot, x)]_\mu$ est une fonction bornée de x . La proposition résulte du fait que

$$\underline{h}f(X) = \tilde{h}f(X, X).$$

COROLLAIRE 2. - Si $H \in CZ_\infty^0$, H applique continûment $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} H^p$ dans lui-même.
En particulier, H applique $\mathcal{S}$ dans C^∞ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.
- [2] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbolicas. - Buenos Aires, Facultad de Ciencias exactas y naturales de la Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).
- [3] HÖRMANDER (Lars). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.