

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

PAUL GÉRARDIN

Décomposition des fonctions de carré sommable sur un espace homogène (cas d'un groupe compact)

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A10, p. A1-A12

http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A11_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE
SUR UN ESPACE HOMOGÈNE
(cas d'un groupe compact)

par Paul GÉRARDIN

1. Énoncé du théorème.

1.1. - Soient E un espace topologique séparé, et G un groupe compact qui opère sur E , c'est-à-dire

- (1) l'application de $G \times E$ dans E qui associe $g.x$ à (g, x) est continue ;
- (2) $g.(h.x) = gh.x$ et $1.x = x$ quels que soient g et $h \in G$ et $x \in E$, où 1 désigne l'élément neutre du groupe .

L'action de G sur E décompose cet espace en orbites : sur chacune, G opère transitivement. Si X est une orbite, (1) montre qu'elle est compacte ; prenons un $x_0 \in X$, et appelons K le sous-groupe, fermé, des $g \in G$ tels que $g.x_0 = x_0$. Si on munit l'espace homogène des classes à gauche de G suivant K de la topologie quotient, on a un espace compact G/K muni d'une application continue bijective sur l'orbite X ; il en résulte un homéomorphisme

- (3) $G/K \cong X$, qui transporte en translations à gauche sur les classes l'action de G sur X : $s.(gK) = sgK$.

Ainsi, lorsqu'un groupe compact G opère sur un espace topologique E , celui-ci est décomposé en orbites compactes, et l'action de G se ramène aux translations sur des espaces homogènes G/K où K est un sous-groupe fermé.

Exemple. - L'espace E est l'espace euclidien à n dimensions, et $G = O(n)$ est le groupe orthogonal. Les orbites sont alors les sphères de centre l'origine.

1.2. - Rappelons la forme suivante du théorème de Haar ([3], chap. II, § 7, 8 et 9) :

Soient G un groupe compact, et X un espace topologique (séparé) sur lequel G opère transitivement (autrement dit, X est un espace homogène). Il existe sur X une mesure (positive) dx telle que, pour toute fonction f continue sur X , on ait

$$(4) \quad \int_X f(s.x) \, dx = \int_X f(x) \, dx, \quad \text{quel que soit } s \in G, \, f \in L(X),$$

et cette mesure est unique à une constante positive près.

En faisant opérer G sur lui-même par translations à gauche, on obtient donc une mesure qu'on normalisera par la condition

$$(5) \quad \int_G ds = 1 : \text{ ce sera la mesure de Haar de } G.$$

Si $t \in G$, la mesure qui associe $\int_G f(st) \, ds$ à $f \in L(G)$ est aussi invariante par l'action de G à gauche : elle s'écrit donc $D(t) \int_G f(s) \, ds$, où D est un homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}_+^*$: son image est un sous-groupe compact de $\mathbb{R}_+^*$: c'est $\{1\}$; ainsi, la mesure de Haar est aussi invariante par les translations à droite. De même, par l'application $s \mapsto s^{-1}$, la mesure de Haar attrape un facteur $c > 0$; en effectuant deux fois cette application, on retombe sur la mesure de Haar : $c^2 = 1$; ainsi la mesure de Haar sur un groupe compact est invariante par $s \mapsto s^{-1}$.

1.3. - Si G est un groupe compact et K un sous-groupe fermé, appelons ds et dk les mesures de Haar correspondantes. On fabrique des fonctions continues sur G/K en posant

$$(6) \quad f'(s) = \int_K f(sk) \, dk, \quad s \in G, \, f \in L(G)$$

(on identifiera constamment une fonction sur G invariante à droite par K à une fonction sur G/K). Il est clair, G étant compact, qu'on obtient ainsi toute fonction continue sur $G/K = X$. On définit alors une mesure sur X , telle que (4), en posant

$$(7) \quad \int_{G/K} f'(s) \, d's = \int_G f(s) \, ds = \int_{G/K} \left(\int_K f(sk) \, dk \right) d's,$$

et elle donne à X la masse 1 en vertu de (5).

1.4. - Notons $H = L^2(X, d's)$. On fait opérer G sur H en posant

$$(8) \quad T(s) f(x) = f(s^{-1}.x), \quad s \in G, \, f \in H, \, x \in X.$$

L'invariance de la mesure $d's$ montre que les $T(s)$ sont des opérateurs unitaires. La condition (2) est réalisée puisqu'on a pris soin de mettre s^{-1} dans (8). Par ailleurs, si f et $g \in H$, et s et $t \in G$, on a (la norme est celle de H)

$$\|T(s)f - T(t)g\| = \|T(t^{-1}s)f - g\| \leq \|T(t^{-1}s)f - f\| + \|f - g\|.$$

(1) sera vérifié si, pour chaque $f \in H$, l'application $s \mapsto T(s)f$ de G dans H est continue ; or ε fixé, on trouve $g \in L(X)$ telle que

$$\|T(s)f - T(s)g\| = \|f - g\| \leq \varepsilon ,$$

la continuité uniforme de g sur G permet alors de trouver un voisinage V de 1 tel que $|g(s^{-1}.x) - g(x)| \leq \varepsilon$ si $s \in V$; comme $\|g\| \leq \|g\|_\infty$, on a donc $\|T(s)g - g\| \leq \varepsilon$ si $s \in V$, d'où

$$\|T(s)f - f\| \leq \|T(s)f - T(s)g\| + \|T(s)g - g\| + \|f - g\| \leq 3\varepsilon , \quad \text{si } s \in V .$$

On dit que T est une représentation unitaire de G dans H .

DÉFINITION. - Soit G un groupe topologique. On dit qu'on a une représentation de G dans un espace de Hilbert H , si on se donne un homomorphisme T de G dans $\mathcal{L}(H)$ continu pour la topologie simple-forte des opérateurs : l'application de G dans H qui associe $T(s)a$ à s est continue pour tout $a \in H$. La représentation est unitaire, si les opérateurs $T(s)$ sont unitaires.

On dit qu'un sous-espace E de H est invariant (par la représentation T), s'il est fermé non nul, et si $f \in E$ implique $T(s)f \in E$ quel que soit $s \in G$. On dit que la représentation est irréductible, ou que l'espace H est irréductible, si H est le seul sous-espace invariant.

On dit qu'un sous-espace C de H est cyclique de générateur $f \in H$, s'il est fermé non nul, et si les vecteurs $T(s)f$ engendrent topologiquement C .

Quand la représentation est unitaire, l'orthogonal d'un sous-espace invariant ($\neq H$) est encore un sous-espace invariant, et un sous-espace fermé ($\neq 0, H$) est invariant si, et seulement si, la projection orthogonale sur ce sous-espace commute à la représentation, c'est-à-dire aux opérateurs $T(s)$.

Un sous-espace cyclique est invariant, mais la réciproque est fausse en général ; cependant, un sous-espace invariant minimal, c'est-à-dire un sous-espace irréductible, est cyclique (raisonner par l'absurde).

Si on a une représentation de G dans H , on cherche si H admet des sous-espaces invariants, si ceux-ci sont irréductibles. Dans le cas qui nous occupe, on a une réponse complète à ces questions.

1.5. - THÉOREME. - Soient G un groupe compact, K un sous-groupe fermé, H l'espace de Hilbert $L^2(X)$, où $X = G/K$, associé à la mesure invariante sur X . Alors :

- (i) H contient des sous-espaces invariants minimaux ;
 (ii) H est somme directe hilbertienne de sous-espaces invariants minimaux :

$$(9) \quad H = \bigoplus_{i \in I} H_i ;$$

- (iii) Les sous-espaces invariants minimaux sont de dimension finie ;
 (iv) Dans (9), chaque H_i intervient avec une multiplicité finie.

Précisons que la multiplicité de H_i dans (9) est le nombre d'indices $j \in I$ distincts tels qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert

$$(10) \quad U : H_i \longrightarrow H_j , \quad \text{tel que } UT(s) = T(s)U \quad \text{quel que soit } s \in G .$$

Ce théorème est l'analogie complet du cas des fonctions périodiques de carré sommable : $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $H = L^2([0, 1])$ pour la mesure de Lebesgue, où la décomposition est donnée par le théorème de Parseval-Bessel :

$$(11) \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t} , \quad \text{avec convergence au sens } L^2 ;$$

les espaces minimaux sont ainsi de dimension 1 : $H_n = \mathbb{C} e^{2\pi i n t}$.

1.6. - Remarque. - L'espace $L^2(G/K)$ s'identifie à un sous-espace invariant fermé de $L^2(G)$ à l'aide du projecteur (6). Il suffirait donc de démontrer le théorème pour $H = L^2(G)$. Cependant on travaillera sur $L^2(G/K)$ de façon que les techniques des § 2 et 3 puissent se généraliser au cas où G est seulement localement compact : on prendra des mesures bornées pour la proposition 2.1 ; si les opérateurs (16) sont compacts pour les $\varphi \in L(G)$, ou même seulement pour des $\varphi \in L(G)$ qui approchent la mesure de Dirac en 1 , le théorème est encore vrai, sauf (iii) ([1]).

2. Algèbre des opérateurs de convolution.

On se placera dans les notations et hypothèses du théorème.

PROPOSITION 2.1. - Soit $M(G)$ l'algèbre de Banach involutive des mesures sur G . La représentation T se prolonge en un homomorphisme d'algèbres involutives de $M(G)$ dans $\mathcal{L}(H)$ par

$$(12) \quad \langle T(m)f , g \rangle = \int_G \langle T(s)f , g \rangle dm(s) , \quad f \text{ et } g \in H .$$

Les crochets désignent le produit scalaire sur H ; le produit sur $M(G)$ est le produit de convolution défini par

$$(13) \quad \int_G f(s) d(m \star n)(s) = \int_{G \times G} f(st) dm(s) dn(t), \quad f \in L(G), \quad m \text{ et } n \in M(G),$$

et l'involution

$$(14) \quad dm^*(s) = d\bar{m}(s^{-1}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_G f(s) dm^*(s) = \overline{\int_G f(s^{-1}) dm(s)}.$$

Le second membre de (12) définit un opérateur continu $T(m)$ sur H , puisque l'intégration porte sur une fonction continue de s (§ 1.4), et que la forme hermitienne ainsi définie sur H est continue :

$$|\int_G \langle T(s)f, g \rangle dm(s)| \leq \int_G \|f\| \|g\| d|m|(s) = \|f\| \|g\| \|m\|.$$

L'égalité (12) montre que T est linéaire sur $M(G)$, et $\|T(m)\| \leq \|m\|$ par l'inégalité ci-dessus. Montrons que $T(m \star n) = T(m) T(n)$: il vient

$$\begin{aligned} \langle T(m) T(n)f, g \rangle &= \int_G \langle T(s) T(n)f, g \rangle dm(s) = \int_G \langle T(n)f, T(s^{-1})g \rangle dm(s) \\ &= \int_G dm(s) \int_G \langle T(t)f, T(s^{-1})g \rangle dn(t) = \int_G dm(s) \int_G \langle T(st)f, g \rangle dn(t) \\ &= \int_{G \times G} \langle T(st)f, g \rangle dm(s) dn(t) = \int_G \langle T(s)f, g \rangle d(m \star n)(s) = \langle T(m \star n)f, g \rangle, \end{aligned}$$

ceci quels que soient f et g dans H , en utilisant constamment le fait que les opérateurs $T(s)$ sont unitaires. Le même genre de calculs montre que $T(m^*) = T(m)^*$.

Si on appelle ε_s la mesure de Dirac en $s \in G$, (12) donne $T(\varepsilon_s) = T(s)$. Si les mesures m et n sont de densité les fonctions f et $g \in L^1(G)$ par rapport à la mesure de Haar, alors $m \star n$ a pour densité la fonction continue

$$(15) \quad f \star g(s) = \int_G f(st^{-1}) g(t) dt = \int_G f(t) g(s^{-1}t) dt \quad \text{par rapport à } ds.$$

PROPOSITION 2.2. - Soit $\varphi \in L(G)$ une fonction continue sur G . Soit $T(\varphi)$ l'opérateur défini par (12) où $dm(s) = \varphi(s) ds$:

$$(16) \quad T(\varphi) f(x) = \int_G f(s^{-1}x) \varphi(s) ds, \quad f \in H, \quad x \in X, \quad \varphi \in L(G).$$

Alors ces opérateurs sont compacts.

En identifiant les fonctions sur $X = G/K$ à des fonctions sur G qui sont invariantes à droite par K , (16) s'écrit aussi $T(\varphi)f = \varphi \star f$ (ces opérateurs $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$, sont fréquemment appelés opérateurs de convolution). Pour montrer que $T(\varphi)$ est compact, on va montrer qu'il est donné par un noyau intégral de Hilbert-Schmidt : on a, en effet,

$$\varphi \star f(s) = \int_G f(t) \varphi(st^{-1}) dt = \int_{G/K} \left(\int_K \varphi(s(tk)^{-1}) dk \right) f(t) d't ,$$

d'après (15) et (7) ; ceci montre que $T(\varphi)$ est donné par un noyau

$$(17) \quad T(\varphi) f(x) = \int_{G/K} K_{\varphi}(x, y) f(y) d'y , \quad \text{où } K_{\varphi}(x, y) = \int_K \varphi(xky^{-1}) dk$$

est une fonction continue sur $G/K \times G/K$: $K_{\varphi}(xk, xh) = K_{\varphi}(x, y)$, si $k, h \in K$, et la fonction φ étant continue sur G . G/K étant compact, ce noyau est de carré sommable sur $X \times X$: il définit donc un opérateur de Hilbert-Schmidt, et ceux-ci sont compacts.

PROPOSITION 2.3. - L'application qui, à une mesure positive m sur G , $m \in M^+(G)$, associe l'opérateur continu $T(m)$ sur H défini par (12), est continue de $M^+(G)$ muni de la topologie vague dans $\mathcal{L}(H)$ muni de la topologie simple-forte des opérateurs.

La topologie de la convergence uniforme sur $L(X)$ étant plus fine que celle induite par $H = L^2(X)$, puisque X est compact, il suffit de prouver que, pour toute fonction $f \in L(X)$, l'application qui associe à $m \in M^+(G)$ la fonction continue sur X définie par

$$(18) \quad T(m) f(x) = \int_G f(s^{-1}x) dm(s)$$

(c'est bien la fonction $T(m)f$ définie par (12), puisqu'on intègre alors des fonctions continues sur des compacts), est continue pour la topologie vague des mesures positives et la topologie de la convergence uniforme sur $L(X)$.

La continuité uniforme de l'application $(s, x) \mapsto f(s^{-1}x)$ sur $G \times X$ permet de trouver n points $x_1, \dots, x_n$ de X tels que, pour tout $x \in X$, il existe un i pour lequel $|f(s^{-1}x) - f(s^{-1}x_i)| \leq \varepsilon$ quel que soit $s \in G$, et donc, par (18), $|T(m)f(x) - T(m)f(x_i)| \leq \varepsilon m(1)$ si $m \in M^+(G)$; prenons alors m' , autre mesure positive sur G : avec le même x , on a

$$\begin{aligned} & |T(m')f(x) - T(m)f(x)| \\ & \leq |T(m')f(x) - T(m')f(x_i)| + |T(m')f(x_i) - T(m)f(x_i)| + |T(m)f(x_i) - T(m)f(x)| \\ & \leq |T(m')f(x_i) - T(m)f(x_i)| + \varepsilon m(1) + \varepsilon m'(1) . \end{aligned}$$

On définit alors un voisinage V de $m \in M^+(G)$ par ε et les fonctions 1 et $s \mapsto f(s^{-1}x_i)$ sur G (en nombre $n+1$) par les inégalités

$$|m'(1) - m(1)| \leq \varepsilon , \quad |T(m')f(x_i) - T(m)f(x_i)| \leq \varepsilon , \quad \text{si } 1 \leq i \leq n ;$$

pour $m' \in V$, on a alors $|T(m') f(x) - T(m) f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon m(1) + \varepsilon(m(1) + \varepsilon)$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 2.4.

(a) Les opérateurs $T(s)$, $s \in G$, sont limites simple-forte d'opérateurs de la forme $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$.

(b) Les opérateurs $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$, sont limites simple-forte de combinaisons linéaires d'opérateurs de la forme $T(s)$, $s \in G$.

Le (a) résulte de la proposition précédente, puisque la mesure de Dirac en $a \in G$ (mesure positive) est limite vague de mesures $dm(s) = \varphi(s) ds$ où φ est positive continue sur G , et que $T(\varepsilon_a) = T(a)$.

Pour la topologie vague de $M(G)$, on sait que les combinaisons linéaires des mesures de Dirac aux différents points de G forment un sous-espace dense. En décomposant $\varphi \in L(G)$ en combinaisons linéaires de fonctions positives, on voit que (b) résulte encore de la proposition 2.3.

Remarque. - On peut démontrer la proposition 2.4 sans faire appel à la précédente, qui utilisait explicitement dans sa démonstration la nature de l'espace $H = L^2(X)$.

COROLLAIRES.

(a) Les sous-espaces invariants de H sont les sous-espaces fermés non nuls stables par les opérateurs $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$.

(b) Pour qu'un opérateur continu A sur H commute à la représentation :

$$(19) \quad AT(s) = T(s)A, \quad \text{quel que soit } s \in G,$$

il faut et il suffit qu'il commute aux opérateurs $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$.

C'est immédiat à partir de la proposition précédente.

PROPOSITION 2.5. - Pour toute fonction non nulle $f \in H$, il existe un opérateur A sur H qui est hermitien, compact, non nul sur f , et qui commute à la représentation.

En raison de la proposition 2.2, on cherche A sous la forme $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$. Cet opérateur est déjà compact ; il sera hermitien si $\varphi^* = \varphi$ (où $\varphi^*(s) = \overline{\varphi(s^{-1})}$), d'après la proposition 2.1, et commutera à la représentation si $\varepsilon_s \star \varphi = \varphi \star \varepsilon_s$, soit si $\varphi(s^{-1}ts) = \varphi(t)$ quels que soient s et $t \in G$. Par la proposition 2.3, il suffit de prouver que ε_1 , la mesure de Dirac en 1 élément neutre de G , est limite vague de mesures de la forme $\varphi(s) ds$, où les fonctions $\varphi \in L(G)$ sont

positives, symétriques et invariantes par automorphismes intérieurs ; on sait déjà trouver des $\varphi \in L(G)$ positives qui convergent vaguement vers ε_1 : on les rend symétriques en posant $\varphi'(t) = (\varphi(t) + \varphi(t^{-1}))/2$, fonctions qui convergent encore vaguement vers ε_1 . Pour rendre ces fonctions invariantes par automorphismes intérieurs, on posera

$$(20) \quad \varphi''(t) = \int_G \varphi'(s^{-1}ts) ds ;$$

$\varphi'' \in L(G)$, est positive, symétrique et invariante par automorphismes intérieurs (invariance de la mesure de Haar). Il reste à prouver que ces fonctions convergent encore vaguement vers ε_1 . Or, si $g \in L(G)$, on a

$$\int_G g(t) \left(\int_G \varphi''(s^{-1}ts) ds \right) dt = \int_G \left(\int_G g(t^{-1}st) dt \right) \varphi''(s) ds \quad (\text{invariance de la mesure}),$$

puisque l'on intègre des fonctions continues sur des compacts. Il suffit ainsi de montrer que la fonction de s , $\int_G g(t^{-1}st) dt$, est continue en 1 ; or le groupe G étant compact, l'application qui, à $(s, t) \in G \times G$, associe $t^{-1}st$, est uniformément continue : pour tout voisinage V de 1, il y a un voisinage W de 1 tel que, si $s \in W$, on a $t^{-1}st \in V$ pour tout $t \in G$, et donc

$$\left| \int_G (g(t^{-1}st) - g(1)) dt \right| \leq \varepsilon$$

si V est bien choisi. C'est la continuité cherchée ; puisque G est de masse 1, la démonstration est achevée : on prendra $A = T(\varphi'')$, où φ'' est assez voisin de ε_1 .

PROPOSITION 2.6. - Soient C un sous-espace cyclique de H , et C' un sous-espace invariant de H contenu dans C . Alors C' est cyclique, et la projection orthogonale sur C' d'un générateur de C est un générateur de C' .

Le sous-espace C' étant invariant, le projecteur orthogonal P de C sur C' commute aux opérateurs $T(s)$: $PT(s)f = T(s)Pf$, en particulier pour un générateur f de C ; les $T(s)f$ engendrant topologiquement C , cette égalité montre que Pf est un générateur de C' qui est ainsi cyclique.

3. Démonstration du théorème.

PROPOSITION 3.1. - Tout sous-espace invariant E de H contient un sous-espace invariant minimal (conclusion (i) du théorème).

En composant les opérateurs $T(s)$ et $T(\varphi)$ avec l'injection de E dans H , on

voit que les propositions du § 2 restent vraies si on remplace partout H par le sous-espace invariant E . En particulier, la proposition 2.4 fournit un opérateur hermitien compact non nul sur E , $T(\varphi)$. Il y a donc ([2], § 9.3) au moins un $\lambda \neq 0$ tel que l'espace $E_\lambda = \text{Ker}(T(\varphi) - \lambda I)$ soit non nul et de dimension finie. La proposition 2.6 montre que E_λ est stable par tout opérateur de E qui commute à la représentation. Prenons alors un vecteur non nul $f \in E$, et formons le sous-espace cyclique de E qu'il engendre, $C(f)$. On a vu (proposition 2.7) que les sous-espaces invariants de E contenus dans $C(f)$ sont cycliques de générateur la projection orthogonale de f sur ce sous-espace ; mais cette projection commute à la représentation, donc laisse E_λ stable : les générateurs des sous-espaces invariants contenus dans $C(f)$ sont dans E_λ , espace de dimension finie. On en déduit que toute chaîne décroissante de sous-espaces invariants de $C(f)$ est stationnaire : $C(f)$, donc E , contient donc des sous-espaces invariants minimaux. On peut même dire que $C(f)$ est somme directe finie de sous-espaces invariants minimaux : en effet, si C est un sous-espace invariant minimal de $C(f)$, son orthogonal dans $C(f)$ est cyclique de générateur dans l'orthogonal de $C \cap E$ dans $C(f) \cap E$; la dimension de E étant finie, on épuise $C(f) \cap E$ en un nombre fini de telles opérations.

PROPOSITION 3.2. - L'espace H est somme directe hilbertienne de sous-espaces invariants minimaux (9) (conclusion (ii) du théorème).

Soit $(F_j)_{j \in J}$ une famille de sous-espaces de H qui sont invariants minimaux et deux à deux orthogonaux. Appelons N la famille de toutes ces familles ; ordonné par inclusion, N est un ensemble inductif : soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille maximale. Le sous-espace $E = \bigoplus_{i \in I} H_i$ (somme directe hilbertienne) est invariant dans H ; s'il en était distinct, son orthogonal serait un sous-espace invariant et contiendrait (proposition 3.1) un sous-espace invariant minimal qu'on aurait dû adjoindre à $(H_i)_{i \in I}$.

PROPOSITION 3.3. - Les sous-espaces invariants minimaux de H sont de dimension finie (conclusion (iii) du théorème).

Soit E un sous-espace invariant minimal de H . Si $f \in E$ est non nul, on peut trouver un opérateur compact A , hermitien, commutant à la représentation, et non nul sur f . Sa restriction à E possède donc au moins une valeur propre λ non nulle, et $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$ est un sous-espace non nul et de dimension finie de E ; comme A commute aux opérateurs $T(s)$, ce sous-espace est invariant, et contenu dans E minimal, il lui est égal. Ainsi E est de dimension finie.

PROPOSITION 3.4. - La multiplicité d'un sous-espace invariant minimal dans la décomposition (9) est finie (conclusion (iv) du théorème).

Si U est un opérateur continu de H_i dans H_j qui commute à la représentation, on le prolonge en un opérateur continu sur H en l'annulant sur l'orthogonal de H_i : ce nouvel opérateur, U , commute toujours aux $T(s)$. Soit $A = T(\varphi)$ un opérateur hermitien compact non nul sur H_i (proposition 2.4). On a vu, dans la démonstration précédente, que $H_i = \text{Ker}(A - \lambda I)$ pour un $\lambda \neq 0$. Donc, si $f \in H_i$, on a $AUf = UAf = Uf$, puisque U commutant aux $T(s)$ commute aussi aux $T(\varphi)$ (corollaire (b) de la proposition 2.4). Ainsi, si $f \neq 0$ et $U \neq 0$, Uf est vecteur propre dans H_j , orthogonal à H_i si $i \neq j$, correspondant à la même valeur propre de $A = T(\varphi)$. Or les multiplicités de ces valeurs propres sont finies, d'où le nombre fini d'indices j distincts possibles.

Le théorème est ainsi entièrement démontré.

4. Applications du théorème.

4.1. - Le théorème recouvre le cas des groupes finis (ils sont compacts pour la topologie discrète) où sa preuve est immédiate, l'espace H étant de dimension finie.

4.2. - Si K est réduit à l'élément neutre de G , on obtient la décomposition de $L^2(G)$ en sous-espaces invariants minimaux pour l'action de G à gauche : $T(s) f(x) = f(s^{-1} x)$. Si $G = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, on a la décomposition en coefficients de Fourier.

4.3. - Le groupe compact G est isomorphe, comme espace homogène sous $G \times G$, au quotient $(G \times G)/G$ par l'application qui, à $(s, t) \in G \times G$, associe $st^{-1} \in G$. Le théorème donne alors la décomposition de $L^2(G)$ en sous-espaces bi-invariants minimaux : l'opération du groupe $G \times G$ est en effet donnée par

$$T(s, t) f(x) = f(s^{-1} xt), \quad \text{si } f \in L^2(G).$$

Si L est la représentation de 4.2,

$$L(s) f(x) = f(s^{-1} x),$$

et si $R(s) f(x) = f(xs)$, on passe de l'une à l'autre par l'automorphisme $f(x) \mapsto f(x^{-1})$ de $L^2(G)$, et

$$T(s, t) = L(s) R(t) = R(t) L(s).$$

Appelons L_i les sous-espaces invariants minimaux d'une décomposition de $L^2(G)$ par L , et R_i ceux de la décomposition correspondante pour R ; on démontre alors (théorème de Burnside) que les sous-espaces bi-invariants $L_i \otimes R_i$ de $L^2(G)$ sont minimaux pour T , et en donnent une décomposition en somme directe hilbertienne.

4.4. - Prenons pour K le centre de G (ce sont les éléments de G qui commutent à tout élément). Le théorème donne la décomposition de l'espace $L^2(G/K)$ qui s'identifie à la décomposition de 4.2 pour le groupe G/K .

4.5. - Si K est le sous-groupe fermé de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$, x et $y \in G$, on obtient la décomposition des fonctions de $L^2(G)$ qui vérifient $f(yxy^{-1}) = f(x)$ si $x, y \in G$ (fonctions centrales). Si on appelle $X_i(s)$ la trace de la restriction à l'espace L_i de l'opérateur $L(s)$ (notation du 4.3), on démontre que ces fonctions X_i forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales de carré sommable.

4.6. - Soit U une représentation du groupe compact G dans un espace de Hilbert H . Elle devient unitaire si on met sur H le nouveau produit scalaire

$$\langle a, b \rangle' = \int_G \langle U(s)a, U(s)b \rangle ds.$$

Posons alors

$$m_{a,b}(s) = \langle a, U(s)b \rangle'.$$

Pour chaque b fixé dans H , on vérifie que $a \mapsto m_{a,b}$ est une application linéaire continue, non nulle si $b \neq 0$, de H dans $L(G)$, donc dans $L^2(G)$. Comme $m_{a,b}(t^{-1}s) = m_{U(t)a,b}$, cette application transporte U en translations à gauche. Si la représentation U est irréductible, tout vecteur non nul $b \in H$ est générateur, et l'application est alors injective sur un sous-espace irréductible de $L^2(G)$: il en résulte que toute représentation irréductible d'un groupe compact est de dimension finie, et se plonge dans $L^2(G)$.

4.7. - Lorsque G est le groupe $SO(n)$ des rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et K le sous-groupe des rotations autour d'un axe (K s'identifie à $SO(n-1)$), alors G/K est la sphère-unité S_{n-1} , et la décomposition (9) est la décomposition de $L^2(S_{n-1})$ en les espaces d'harmoniques sphériques homogènes, avec multiplicités 1 si $n > 2$, et multiplicités 2 si $n = 2$.

4.8. - La représentation T de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ définie par $T(s)f(x) = f(x-s)$ n'admet pas de sous-espace invariant fermé minimal: tout sous-espace invariant

contient strictement un sous-espace invariant (transporter la situation à l'aide de la transformation de Fourier).

Pour avancer plus loin, il faut étudier de plus près les "caractères" X_i de 4.5, leur trouver une équation fonctionnelle, puis les "coefficients" $m_{a,b}$ pour la représentation L de G dans $L^2(G)$ (le théorème de Stone-Weierstrass montre que leurs combinaisons linéaires approchent uniformément toute fonction continue sur G : c'est le théorème de Peter-Weyl).

Ensuite, on cherche à donner une caractérisation commode sur le couple (G, K) pour que les multiplicités de la décomposition (9) soient toutes égales à 1 (c'est le cas de 4.7 si $n > 2$) : c'est la théorie des fonctions sphériques, qui généralise les énoncés de l'appendice de l'exposé A.2.

Enfin, on peut étudier les représentations d'un groupe localement compact, en les restreignant à des sous-groupes compacts. C'est ce qu'on fait pour les groupes semi-simples complexes, ou réels à centre fini, ou p -adiques, qui possèdent des sous-groupes compacts maximaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GODEMENT (R.). - Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 1965/66, Chap. 1-3 (non publié).
 - [2] RIESZ (F.) et NAGY (B. Sz.-). - Leçons d'analyse fonctionnelle. 3e éd. - Budapest, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.
 - [3] WEIL (A.). - L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. 2e éd. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1145 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 4).
-