Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Claire Delaroche

Quelques problèmes concernant la structure des $C^\star$-algèbres

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, n° 2 (1966-1967), exp. n° 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A6_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
6e année, 1966/67, n° 17

18 mai 1967

QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LA STRUCTURE DES C^*-ALGÈBRES

par Claire DELAROCHE

Après avoir rappelé le théorème fondamental de structure des C^*-algèbres commutatives, on se propose d'exposer ici une tentative en vue de déterminer la structure des C^*-algèbres non commutatives. On se limitera ici à une classe plus accessible, mais assez vaste, de C^*-algèbres, et on montrera comment on peut reconstituer cette classe de C^*-algèbres à partir d'une classe de C^*-algèbres beaucoup plus simples.

1. C^*-algèbres.

Le corps de base sera toujours $\underset{\sim}{C}$.

DÉFINITION 1. - On appelle C^*-algèbre une algèbre de Banach A munie d'une involution telle que

$$\begin{cases} \|x\| = \|x^*\| \\ \|xx^*\| = \|x\|^2 \end{cases}$$

pour tout $x \in A$.

EXEMPLES.

1° L'algèbre des fonctions continues complexes, tendant vers 0 à l'infini, sur un espace localement compact, munie de l'involution $f \longmapsto \overline{f}$.

2° L'algèbre $\mathcal{L}(H)$ des endomorphismes continus d'un espace hilbertien H , munie de l'adjonction usuelle.

2. Structure des C^*-algèbres commutatives.

Rappelons certains résultats relatifs aux algèbres de Banach commutatives ([1], chap. I, § 3).

On appelle caractère d'une algèbre de Banach commutative A un morphisme non nul de A dans $\underset{\sim}{C}$. Tout caractère est continu et de norme $\leqslant 1$.

L'ensemble des caractères, muni de la topologie de la convergence simple, est un espace topologique localement compact contenu dans la boule unité du dual de A ,

appelé spectre de A, et noté $\hat{A}$.

Les caractères de A sont en bijection avec les idéaux maximaux réguliers de A par l'application qui, à un caractère, fait correspondre son noyau.

On appelle transformation de Gel'fand le morphisme $x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ de A dans l'algèbre des fonctions continues complexes nulles à l'infini, définies sur $\hat{A}$, tel que $\mathcal{G}_x(\chi) = \chi(x)$ pour tout caractère χ de $\hat{A}$. En général, cette transformation n'est ni injective, ni surjective, mais si A est de plus une C^*-algèbre, on a le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 1. - Soient A une C^*-algèbre commutative, $\hat{A}$ son spectre, B la C^*-algèbre des fonctions continues complexes nulles à l'infini sur $\hat{A}$, alors la transformation de Gel'fand est un isomorphisme de la C^*-algèbre A sur la C^*-algèbre B.

Pour le voir, on démontre d'abord que dans une C^*-algèbre tout caractère χ satisfait à

$$\chi(x^*) = \overline{\chi(x)} \quad \text{pour tout } x \text{ dans } A,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{G}_{x^*} = \overline{\mathcal{G}_x}$.

Il en résulte facilement que l'ensemble des fonctions $(\mathcal{G}_x)_{x \in A}$ satisfait aux hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

On démontre ensuite que la transformation de Gel'fand est une isométrie, d'où il résulte que l'ensemble $(\mathcal{G}_x)_{x \in A}$ est fermé, donc est égal à B tout entier ([1], chap. I, § 6, th. 1).

La structure topologique de $\hat{A}$ donne des renseignements sur la structure de A. Par exemple, les parties fermées de $\hat{A}$ sont en bijection avec les idéaux fermés de A.

3. Spectre d'une C^*-algèbre.

Nous allons généraliser aux C^*-algèbres non commutatives la notion fondamentale de spectre. Le problème est d'associer à une C^*-algèbre un espace topologique qui reflètera assez bien les propriétés de l'algèbre.

DÉFINITION 2. - Soient A une C^*-algèbre, H un espace hilbertien. On appelle représentation de A dans H tout morphisme de l'algèbre involutive A dans l'algèbre involutive $\mathcal{L}(H)$, et on appelle dimension de la représentation la dimension de H.

DÉFINITION 3. - Soit Π une représentation de A dans H. On dit que Π est topologiquement irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels fermés de H stables par $\Pi(A)$ sont 0 et H.

DÉFINITION 4. - On dit que deux représentations Π et Π' de A dans H et H' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme U de l'espace hilbertien H sur H' qui transforme $\Pi(x)$ en $\Pi'(x)$ pour tout $x \in A$.

EXEMPLE. - Les caractères d'une C^*-algèbre commutative sont des représentations irréductibles de dimension 1, et on démontre que toute représentation irréductible d'une telle C^*-algèbre est un caractère.

Dans le cas général, on peut donc penser à définir le spectre à l'aide de l'ensemble $\hat{A}$ des classes d'équivalence des représentations irréductibles de A, ou à l'aide de l'ensemble $\mathrm{Prim}(A)$ de leurs noyaux. Ces noyaux sont des idéaux bilatères fermés appelés idéaux primitifs. On a rappelé que, dans le cas où A est commutative, ces deux ensembles sont canoniquement en bijection, mais en général on a seulement la surjection $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$. Pour toute partie T de $\mathrm{Prim}(A)$, soit $I(T)$ l'idéal bilatère intersection des éléments de T, et $\overline{T}$ l'ensemble des idéaux primitifs contenant $I(T)$. L'application $T \longmapsto \overline{T}$ satisfait aux axiomes de la fermeture, et définit une topologie sur $\mathrm{Prim}(A)$ dite topologie de Jacobson ([2], § 3).

DÉFINITION 5. - On appelle spectre primitif de A l'ensemble $\mathrm{Prim}(A)$ muni de la topologie de Jacobson, et spectre de A l'ensemble $\hat{A}$ muni de la topologie image réciproque par l'application canonique $\hat{A} \to \mathrm{Prim}(A)$.

Ces espaces topologiques sont localement quasi-compacts mais non séparés en général.

EXEMPLE. - Considérons l'ensemble A des suites $a = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ de matrices à 2 lignes et 2 colonnes qui tendent vers une matrice diagonale lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ an = \begin{pmatrix} a_1^1(n) & a_1^2(n) \\ a_2^1(n) & a_2^2(n) \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \alpha(a) & 0 \\ 0 & \beta(a) \end{pmatrix} .$$

Pour les opérations évidentes et la norme $\|a\| = \sup_n \|a_n\|$, c'est une C^*-algèbre.

Pour tout $a \in A$, posons :

$$\rho_n(a) = a_n \ ,$$

$$\alpha(a) = \lim_{n\to\infty} a_1^1(n) \ ,$$

$$\beta(a) = \lim_{n\to\infty} a_2^2(n) \ .$$

Ce sont des représentations irréductibles de A de dim 1 et 2 , et on vérifie qu'il n'y en a pas d'autres

$$\hat{A} = \{\rho_1 \ , \ \rho_2 \ , \ \dots \ , \ \rho_n \ , \ \dots \ , \ \alpha \ , \ \beta\} \ .$$

Ici, les classes d'équivalence de représentations irréductibles de A sont en bijection avec leurs noyaux.

Par ailleurs, pour toute représentation irréductible Π de A et pour tout $x \in A$, $\Pi(x)$ est un opérateur compact. Les C^*-algèbres qui possèdent cette dernière propriété forment une classe de C^*-algèbres plus accessibles appelées C^*-algèbres liminaires. Les plus simples d'entre elles sont les C^*-algèbres commutatives.

Les idéaux primitifs de A sont maximaux, donc tous les points de $\hat{A}$ sont fermés. Chaque point ρ_n est ouvert, car si un idéal primitif contient

$$\bigcap_{P\neq n} \operatorname{Ker} \rho_p \cap \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta \ ,$$

il est nécessairement distinct de $\operatorname{Ker} \rho_n$. Les ensembles $\{\rho_n \ , \ \rho_{n+1} \ , \ \dots \ , \ \alpha\}$ forment un système fondamental de voisinages de α dans $\hat{A}$. En effet, ces ensembles sont ouverts (car ils sont de complémentaire fini, donc fermé).

D'autre part, si V est un voisinage de α dans $\hat{A}$, on ne peut avoir $\rho_n \notin V$ pour des n arbitrairement grands n_1 , n_2 , ... , car

$$\operatorname{Ker} \alpha \supset \bigcap_i \operatorname{Ker} \rho_{n_i} \ ,$$

donc α est adhérent à $\{\rho_{n_1} \ , \ \rho_{n_2} \ , \ \dots\}$.

De même les ensembles $\{\rho_n \ , \ \rho_{n+1} \ , \ \dots \ , \ \beta\}$ forment un système fondamental de voisinages de β . $\hat{A}$ est quasi compact, et les points α et β ne sont pas séparés.

L'analogue de la transformation de Gel'fand est la transformation $x \longmapsto \mathcal{G}_x$ telle que, pour tout J dans $\operatorname{Prim}(A)$:

$$\mathcal{G}_x(J) = x (\operatorname{mod} J) \in A/J \ .$$

$\mathcal{S}_x$ est ici une fonction définie sur $\mathrm{Prim}(A)$ telle que $\mathcal{S}_x(J) \in A/J$ pour tout $J \in \mathrm{Prim}(A)$.

On ne peut plus parler de continuité pour de telles fonctions.

4. Champ continu de C^*-algèbres.

Soient T un espace topologique, et $(A(t))_{t\in T}$ une famille de C^*-algèbres. On appelle champ de vecteurs tout élément de $\prod_{t\in T} A(t)$.

DÉFINITION 6. - *Soit T un espace topologique. Un champ continu de C^*-algèbres sur T est une famille $(A(t))_{t\in T}$ de C^*-algèbres munie d'un ensemble Γ de champs de vecteurs tel que*

(i) *Γ est une sous-algèbre involutive de $\prod_{t\in T} A(t)$;*

(ii) *Pour tout $t \in T$, l'ensemble des $x(t)$, où $x \in \Gamma$, est partout dense dans $A(t)$;*

(iii) *Pour tout $x \in \Gamma$, la fonction $t \longmapsto \|x(t)\|$ est continue ;*

(iv) *Soit $x \in \prod_{t\in T} A(t)$ un champ de vecteurs : Si, pour tout $x' \in \Gamma$, la fonction $t \longmapsto \|x(t) - x'(t)\|$ est continue, alors $x \in \Gamma$.*

Un tel champ sera noté $\mathcal{A} = ((A(t))_{t\in T} , \Gamma)$.

EXEMPLE. - Si $A(t) = A$ est indépendant de $t \in T$, soit Γ l'ensemble des applications continues de T dans A . Alors $\mathcal{A} = (A(t)_{t\in T} , \Gamma)$ est un champ continu de C^*-algèbres.

5. Structure des C^*-algèbres liminaires à spectre séparé.

En général, si $x \in A$, $\mathcal{S}_x$ $(\in \prod_{J\in \mathrm{Prim}(A)} A/J)$ n'appartient pas à un champ continu de C^*-algèbres.

Reprenant l'exemple du § 3, soit $a = (a_1 , \dots , a_n , \dots)$ avec $a_n = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\|a(\mathrm{mod}\ \mathrm{Ker}\ \rho_n)\| = 1 , \quad \|a(\mathrm{mod}\ \mathrm{Ker}\ \alpha)\| = 0 \quad \text{et} \quad \|a(\mathrm{mod}\ \mathrm{Ker}\ \beta)\| = 1 .$$

Donc le champ de vecteurs $\mathrm{Ker}\ \Pi \longmapsto a(\mathrm{mod}\ \mathrm{Ker}\ \Pi)$, pour $\mathrm{Ker}\ \Pi \in \mathrm{Prim}(A)$, ne satisfait pas à la condition (iii) de la définition 6.

Mais on démontre ([4], th. 4.1) le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Pour toute C^*-algèbre A, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Prim}(A)$ est séparé ;

(ii) Pour tout $a \in A$, la fonction $J \longmapsto \|a(\mathrm{mod}\ J)\|$ est continue sur $\mathrm{Prim}\ A$.

On va se restreindre à partir de maintenant aux C^*-algèbres à spectre primitif séparé. On vérifie alors sans peine que le champ de C^*-algèbres, $(A/J)_{J \in \mathrm{Prim}(A)}$, muni de l'ensemble θ de champs de vecteurs défini par : $x' \in \theta$ si, et seulement si, pour tout $x \in A$, la fonction

$$J \longmapsto \|x'(J) - x(\mathrm{mod}\ J)\|$$

est continue, est un champ continu de C^*-algèbres.

Réciproquement, à un champ continu de C^*-algèbres, $((A(t)_{t \in T}, \theta)$, sur un espace localement compact T, on peut faire correspondre canoniquement la C^*-algèbre A' des $x \in \theta$ tels que $\|x(t)\|$ tende vers 0 à l'infini sur T, avec pour opérations, les opérations évidentes, et pour norme, la norme

$$\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\| \ .$$

Donc, à une C^*-algèbre A à spectre primitif séparé, on peut associer un champ continu de C^*-algèbres sur l'espace localement compact $\mathrm{Prim}\ A$, et à ce champ continu de C^*-algèbres, on peut associer une C^*-algèbre A'.

En général, la C^*-algèbre A' n'est pas isomorphe à la C^*-algèbre A ([2], § 10). Mais si A est de plus liminaire, on a le théorème suivant ([2], § 10, th. 10.5.4) qui généralise le théorème d'isomorphisme de Gel'fand.

THÉORÈME 3. - Soit A une C^*-algèbre liminaire à spectre séparé. Soit

$$\mathfrak{A} = ((A/J)_{J \in \mathrm{Prim}A}, \theta)$$

le champ continu de C^*-algèbres défini par A. Soit A' la C^*-algèbre définie par $\mathfrak{A}$. Pour tout $x \in A$, soit s_x l'élément de θ défini par x

$$(s_x(J) = x(\mathrm{mod}\ J) \text{ pour tout } J \in \mathrm{Prim}\ A) \ .$$

Alors $s_x \in A'$, et $x \longmapsto s_x$ est un isomorphisme de A sur A'.

REMARQUES

1° Les C^*-algèbres A/J ont une structure très simple. En effet, si Π_J est une représentation irréductible de noyau J, A/J est isomorphe à la C^*-algèbre

$\Pi_J(A)$, qui est la C^*-algèbre des opérateurs compacts de l'espace de la représentation, car A est liminaire ([2], § 4, Cor. 4.1.10).

2° Dans le théorème 3, il n'est pas nécessaire de préciser de quel spectre il s'agit, car $\mathrm{Prim}(A)$ et $\hat{A}$ sont homéomorphes lorsque A est liminaire ([2], § 4, Cor. 4.1.10).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Elément de Mathématique : Théories spectrales. Chap. 1 et 2 : Algèbres normées ; Groupes localement compacts commutatifs. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind., 1332 ; Bourbaki, 32).

[2] DIXMIER (Jacques). - Les C^*-algèbres et leurs représentations. - Paris, Gautier-Villars, 1964 (Cahiers scientifiques, 29).

[3] FELL (J. M. G.). - The structure of algebras of operator fields, Acta Math., Uppsala, t. 106, 1961, p. 233-280.

[4] KAPLANSKY (Irving). - The structure of certain operator algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 233-280.