Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Marie Exbrayat

Fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan, II

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, n° 2 (1966-1967), exp. n° 16, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A5_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
6e année, 1966/67, n° 16

27 avril 1967

FONCTIONS ANALYTIQUES DANS UN OUVERT CONNEXE DU PLAN, II

par Jean-Marie EXBRAYAT

Les notations et résultats utilisés dans cet exposé sont ceux de l'exposé précédent de ce Séminaire [4].

1. Ensembles dominants, universels, fortement universels.

DÉFINITIONS. -

1° $S \subset G$ est dit dominant, si

$$\sup_S |f(z)| = \sup_G |f(z)| = \|f\|_\infty , \qquad \forall\, f \in B_H(G) .$$

2° $S \subset G$ est dit universel, si

$$\forall\, \mu \in M(G) , \qquad \exists\, \nu \in M(S) \quad \text{telle que} \quad \nu \backsim \mu .$$

3° $S \subset G$ est dit fortement universel, si

$$\forall\, \mu \in M(G) \quad \text{et} \quad \forall\, \varepsilon > 0 , \qquad \exists\, \nu \in M(S) \quad \text{telle que} \quad \nu \backsim \mu \quad \text{et} \quad \|\nu\| \leq (1 + \varepsilon)\, \|\mu\| .$$

THÉORÈME. - Soit $S \subset G$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1° S est fortement universel ;

2° S est universel ;

3° S est dominant.

Il est trivial que 1° $\Rightarrow$ 2° . Pour démontrer que 2° $\Rightarrow$ 3° , raisonnons par l'absurde. $\exists\, \zeta \in G - S$ et $f \in B_H(G)$ tels que

$$f(\zeta) = 1 \qquad \text{et} \qquad |f(z)| \leq r < 1 \quad \text{pour} \quad z \quad \text{dans} \quad S .$$

Soit $\nu \in M(S)$ équivalente à ε_ζ . On a donc

$$1 = (f(\zeta))^n = \int f^n \, d\varepsilon_\zeta = \int f^n \, d\nu ,$$

de sorte que

$$1 \leq r^n \, \|\nu\| , \qquad \text{pour} \quad n \in \underset{\sim}{N} ,$$

ce qui est impossible.

Il reste à prouver :

$$S \text{ dominant} \Rightarrow S \text{ fortement universel.}$$

(a) On peut supposer S dénombrable $(S = \{s_n\})$, car tout sous-ensemble partout dense d'un ensemble dominant est dominant, et tout sur-ensemble d'un ensemble fortement universel est fortement universel. En ce cas, $M(S)$ peut être identifié à ℓ^1.

On considère l'application linéaire

$$T : B_H(G) \longmapsto \ell^\infty : f \longmapsto T(f) : n \longmapsto f(s_n) = T(f)(n) .$$

Puisque S est dominant, T est une isométrie de $H_\infty(G)$ sur $T(H_\infty(G)) = E$ qui est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞.

(b) E <u>est fermé dans</u> ℓ^∞ <u>pour la weak-$\star$ topologie</u> $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$. Ce résultat est, bien entendu, meilleur que : E est fermé dans ℓ^∞ pour la topologie de la norme. Comme ℓ^1 est un Banach séparable, il suffit de prouver ([1]) que E est séquentiellement fermé dans ℓ^∞ pour $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$. De façon générale, une suite $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$-convergente est bornée en norme $\| \ \|_\infty$ (Banach-Steinhaus), et converge ponctuellement. Supposons donc que Tf_n converge $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$ vers g dans ℓ^∞. On a

$$\|Tf_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty \leq M < +\infty .$$

En passant éventuellement à une sous-suite, on voit qu'il existe f dans $B_H(G)$ limite uniforme des f_n sur tout compact, en particulier, limite ponctuelle. Donc (m étant fixé),

$$T(f)(m) = f(s_m) = \lim_n f_n(s_m) = \lim_n T(f_n)(m) = g(m) ,$$

soit

$$T(f) = g .$$

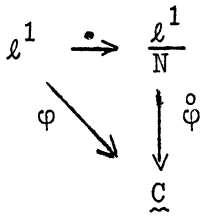
(c) Considérons maintenant N le sous-espace de ℓ^1 orthogonal à E.

1° N <u>est fermé dans</u> ℓ^1 (la topologie de la norme $\| \ \|_1$ est plus fine que la topologie faible $\sigma(\ell^1 , \ell^\infty)$).

2° <u>On a</u> $E \subset N^\perp$, <u>et comme</u> E <u>est weak-$\star$ fermé</u>, $E = N^\perp$.

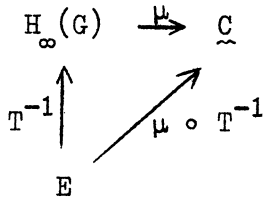
3° E s'identifie au dual de l'espace de Banach $\frac{\ell^1}{N}$.

En effet, si $\varphi \in E$, φ est une forme linéaire continue sur ℓ^1 , qui se factorise à travers $\frac{\ell^1}{N}$, en une forme linéaire continue $\overset{\circ}{\varphi}$ sur $\frac{\ell^1}{N}$,



$\varphi \longmapsto \overset{\circ}{\varphi}$ est la bijection cherchée entre E et $(\frac{\ell^1}{N})'$. Mieux, cette bijection est une isométrie. Par suite, tout élément de $\frac{\ell^1}{N}$, qui s'identifie, par l'injection canonique, à un élément de $((\frac{\ell^1}{N})')'$, donc de E' , définit une forme linéaire continue sur E , et nous avons donc l'égalité des normes dans $\frac{\ell^1}{N}$ et dans E' .

(d) Choisissons $\mu \in M(G)$: $\mu \in (H_\infty(G))'$, et donc $\mu \circ T^{-1}$ est un élément



de E' , avec :

$$\|\mu\|_{(H_\infty(G))'} = \|\mu \circ T^{-1}\|_{E'} .$$

En fait, nous voulons prouver que $\mu \circ T^{-1}$ est non seulement dans E' , mais encore dans $\frac{\ell^1}{N}$. Pour cela, il suffit de prouver que $\mu \circ T^{-1}$ est weak-$\star$ continue

$$(\sigma(\ell^\infty , \ell^1)\Big|_{(\frac{\ell^1}{N})'} = \sigma((\tfrac{\ell^1}{N})' , \tfrac{\ell^1}{N})) ,$$

ou encore que

$$E_\mu = \{Tf \in E \text{ tel que } \int f \, d\mu = 0\}$$

est un sous-espace weak-$\star$ fermé de E , ou enfin que E_μ est séquentiellement fermé pour $\sigma(\ell^\infty , \ell^1)$.

Soit donc, dans E_μ , une suite Tf_n weak-$\star$ convergente vers $g = Tf$. Comme dans (b), $\|Tf_n\|_\infty \leq M < +\infty$, et l'on peut toujours supposer que f_n tend vers

$f_0 \in B_H(G)$ uniformément sur tout compact, en particulier ponctuellement. Si donc $m \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$f(s_m) = T(f)(m) = \lim_n T(f_n)(m) = \lim_n f_n(s_m) = f_0(s_m) ,$$

soit

$$f = f_0 \quad \text{sur} \quad S , \qquad \text{ou} \quad f - f_0 = 0 \quad \text{sur} \quad S .$$

Comme S est dominant,

$$f - f_0 = 0 \quad \text{partout}, \qquad \text{ou} \quad f = f_0 .$$

Mais f_n tend vers f_0 au sens de $\alpha(G)$, et $\mu \in (\alpha(G))'$. Donc,

$$\int f_n \, d\mu = 0 \rightarrow \int f_0 \, d\mu .$$

Il s'ensuit que

$$\int f_0 \, d\mu = 0 , \qquad \text{ou} \quad \int f \, d\mu = 0 , \qquad \text{ou} \quad Tf \in E_\mu .$$

C. Q. F. D.

Par suite, en négligeant l'injection de $\frac{\ell^1}{N}$ dans son bidual, nous pouvons identifier $\mu \circ T^{-1}$ à un élément σ de $\frac{\ell^1}{N}$ et, d'après les remarques faites,

$$\|\mu\|_{(H_\infty(G))'} = \|\mu \circ T^{-1}\|_{E'} = \|\sigma\|_{\frac{\ell^1}{N}} .$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists \, \nu \in \ell^1(M(S)) \qquad \text{telle que} \quad \begin{cases} \|\nu\| \leq (1 + \varepsilon) \, \|\mu\|_{(H_\infty(G))'} \\ \nu \in \sigma \end{cases}$$

($\nu \in \sigma$ signifie :

$$\int f \, d\mu = \langle \mu , f \rangle = \langle \mu \circ T^{-1} , Tf \rangle = \langle \sigma , Tf \rangle = \int \mathbf{f} \, d\nu , \qquad \text{pour} \quad f \in B_H(G) ,$$

ou $\nu \sim \mu$). De plus

$$\|\mu\|_{(H_\infty(G))'} = \sup_{\substack{f \in B_H(G) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} \left| \int f \, d\mu \right| ,$$

et comme $H_\infty(G)$ est le dual de $M'(G)$, cette dernière expression est égale à $\|[\mu]\|$, et donc majorée par $\|\mu\|$. Ceci complète la démonstration.

Remarque. - Soient toujours G un ouvert connexe relativement compact non vide de $\underset{\sim}{C}$, et $B(G)$ l'algèbre des fonctions continues bornées sur G. Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $B(G)$. Etablissons la dualité :

$$\langle f , \mu \rangle = \int f \, d\mu \qquad \text{entre } \mathcal{A} \text{ et } M(G) ,$$

et sur $M(G)$ la relation d'équivalence :

$$\mu \sim_{\mathcal{A}} \nu \quad \text{si} \quad f \in \mathcal{A} \Rightarrow \int f \, d\mu = \int f \, d\nu .$$

Définissons enfin :

$S \subset G$ $\mathcal{A}$-dominant par :

$$\forall f \in \mathcal{A} , \qquad \|f\|_\infty = \sup_S |f| .$$

$S \subset G$ $\mathcal{A}$-universel par :

$$\forall \mu \in M(G) , \qquad \exists \nu , \quad \nu \in M(S) \quad \text{et} \quad \nu \sim_{\mathcal{A}} \mu .$$

$S \subset G$ $\mathcal{A}$-fortement universel par :

$$\forall \mu \in M(G) , \ \forall \varepsilon > 0 , \qquad \exists \nu , \quad \nu \in M(S) , \ \nu \sim_{\mathcal{A}} \mu \quad \text{et} \quad \|\nu\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|\mu\| .$$

Si tout borné de $\mathcal{A}$ est séquentiellement relativement compact pour $\sigma(\mathcal{A} , M(G))$, on peut alors adapter la démonstration et démontrer le théorème :

$$S \ \mathcal{A}\text{-dominant} \Rightarrow S \ \mathcal{A}\text{-fortement universel.}$$

PROPOSITION.

1° Il existe un sous-ensemble de G, dominant, dénombrable, sans point d'accumulation dans G.

2° Soit $S \subset G$ dominant. Alors S contient un ensemble dominant dénombrable sans point d'accumulation dans G.

1° On peut écrire G sous la forme $\bigcup_{n \geqslant 0} F_n$, où les F_n sont ouverts relativement compacts,

$$F_0 = \emptyset , \qquad F_n \subset \overline{F}_n \subset F_{n+1} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 ;$$

on pose

$$C_n = \overline{F}_n - F_{n-1}$$

Si $f \in B_H(G)$, la suite

$$M_n = \sup_{C_n} |f| = \sup_{F_n} |f| \quad \text{croît vers} \quad \|f\|_\infty , \qquad \text{lorsque} \quad n \to +\infty .$$

Soient U la boule unité de $H_\infty(G)$, ε_n une suite $\downarrow$ vers 0 . Les fonctions de U sont uniformément équicontinues :

$\forall\, n$, $\exists\, \delta_n > 0$ tel que $z , w \in C_n$ et $|z - w| < \delta_n \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon_n$

ceci pour toute f dans U . Pour tout n , choisissons un ensemble fini $E_n \subset C_n$ tel que tout point de C_n soit à une distance de $E_n < \frac{\delta_n}{2}$. On a

$$M_n \leqslant \sup_{E_n} |f| + \varepsilon_n , \qquad \text{si} \quad f \in U .$$

Donc

$$S = \bigcup_n E_n$$

est un ensemble convenable.

2° Il se démontre comme le 1°.

PROPOSITION. - Soit $S = \{z_n\}$ un ensemble dénombrable $\subset G$, sans point d'accumulation dans G . Alors

$$S \text{ dominant} \iff \exists\, \mu , \ \mu \in M(S) , \ \mu \neq 0 , \ \mu \backsim 0 .$$

1° Si S est dominant, S est fortement universel. Si S ne portait aucune mesure $\nu \neq 0$ et $\backsim 0$, on aurait $\|\mu\| = \|[\mu]\|$ pour toute $\mu \in M(S)$, ce qui est impossible.

2° Soit $\mu \in M(S)$, $\mu \backsim 0$, $\mu \neq 0$, $\exists\, (a_n) \in \ell^1(\underset{\sim}{N})$, suite $\neq 0$, telle que

$$\sum a_n f(z_n) = \int f \, d\mu = 0 , \qquad \text{pour} \quad f \in B_H(G) .$$

Considérons la fonction

$$A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z_n - z} = \int \frac{d\mu(t)}{t - z} \qquad (z \in G - S) .$$

A est analytique dans $G - S$, et a un pôle simple en tout z_n tel que $a_n \neq 0$;
$A \not\equiv 0$;
Les zéros de A sont isolés.

$$t \longmapsto \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

est, en tant que fonction de t, dans $B_H(G)$. Donc

$$\int \frac{f(t) - f(z)}{t - z}\, d\mu(t) = 0 ,$$

d'où

$$A(z)\, f(z) = \int \frac{f(t)}{t - z}\, d\mu(t) \qquad (z \notin S) . \tag{1}$$

Supposons maintenant S non dominant. $\exists\, f \in B_H(G)$ et $z_0 \notin S$ tels que

$$f(z_0) = 1 , \qquad |f(z_n)| \leq r < 1 \quad \text{pour} \quad n \geq 1 .$$

On peut supposer de plus $A(z_0) \neq 0$ (sinon on remplace z_0 par z_0', très voisin de z_0, et on renormalise f). Appliquons (1) à f^n. Il vient :

$$A(z_0)(f(z_0))^n = A(z_0) = \int \frac{[f(t)]^n}{t - z}\, d\mu(t) ,$$

et l'on aboutit à une contradiction en faisant tendre n vers $+\infty$.

2. Ensembles de fausses singularités et balayage.

NOTATIONS.

G' ouvert connexe $\neq \emptyset$ de $\mathbb{C}$.

E compact $\subset G'$, non vide

$G = G' - E$.

Si $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$E_\varepsilon = \{z \in G \text{ tel que } d(z , E) > \varepsilon\} .$$

DEFINITIONS.

1° E est un <u>ensemble de fausses singularités</u> (pour $B_H(G)$), si

$$\forall\, f \in B_H(G) , \qquad \exists \text{ un prolongement de } f : F \in B_H(G') .$$

2° $\mu \in M(G)$ est <u>holomorphiquement libre par rapport à</u> E, si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ assez petit}, \qquad \exists\, \nu , \quad \nu \text{ portée par } E_\varepsilon , \quad \nu \backsim \mu .$$

PROPOSITION. - "<u>Toute</u> $\mu \in M(G)$ <u>est holomorphiquement libre par rapport à</u> E " <u>équivaut à</u> " $\forall\, \varepsilon$ <u>assez petit</u> $(\varepsilon > 0)$, E_ε <u>est un ensemble dominant (pour</u> G)".

Seul est à démontrer le fait que la première proposition entraîne la seconde. La démonstration (par l'absurde) est laissée aux soins du lecteur.

THÉORÈME. - " E ensemble de fausses singularités" équivaut à " $\forall\ \mu \in M(G)$, μ est holomorphiquement libre par rapport à E ".

1° Si E est un ensemble de fausses singularités, soit ε tel que $0 < \varepsilon < d(E, \partial G')$. Alors E_ε est dominant pour G . Soient, en effet, $f \in B_H(G)$, et F un prolongement analytique borné de f à G' . On a

$$\sup_{G'} |F| = \sup_{G} |f| = \sup_{E_\varepsilon} |f| ,$$

et la conclusion.

2° Si E n'est pas un ensemble de fausses singularités, prenons f fonction analytique bornée non constante sur $\complement E$. On a

$$\sup_{G} |f| = \sup_{\complement E} |f| \qquad \text{et} \qquad \sup_{E_\varepsilon} |f| < \sup_{\complement E} |f| .$$

Donc E_ε n'est pas dominant, pour tout ε assez petit.

THÉORÈME. - Soit D le disque unité (ouvert). Si $f \in B_H(D)$, on note $f(e^{i\theta})$ les limites radiales de f qui existent presque partout sur le cercle unité.

Posons

$$N^1 = \{h \in L^1(-\pi\ ;\ \pi) \qquad \text{telle que} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, h(\theta)\, d\theta = 0 , \quad \forall\ f \in B_H(D)\} .$$

$M'(D)$ est isométrique à $\dfrac{L^1(-\pi\ ;\ \pi)}{N^1}$.

Ce résultat améliore, dans le cas du disque, le résultat général :

$$M'(G) \approx \frac{L^1(G)}{N_\lambda(G)} .$$

Donnons l'essentiel de la démonstration :

(a) Soit $h \in L^1(-\pi\ ;\ \pi)$. On considère l'application

$$f \longmapsto L(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\, h(\theta)\, d\theta ,$$

qui est une forme linéaire sur $B_H(D)$. Montrons que L est α-continue, ou encore que

$$L^{-1}(0) = \{f \in B_H(D) \quad \text{telle que} \quad L(f) = 0\}$$

est séquentiellement α-fermé. Supposons donc que f_n α-converge vers f avec $L(f_n) = 0$ pour tout n. Les f_n peuvent être supposées uniformément bornées par 1. Elles convergent ponctuellement vers f. Les $f_n(e^{i\theta})$ peuvent, par ailleurs, être considérées comme éléments de la boule unité du dual de $\frac{L^1(-\pi\ ;\ \pi)}{N'^1}$. On peut en extraire une sous-suite, notée encore (f_n), convergeant faiblement vers F, i. e. telle que

$$\int f_n(e^{i\theta})\, H(\theta)\, d\theta \to \int F(e^{i\theta})\, H(\theta)\, d\theta \qquad \text{pour tout } H \in L^1(-\pi\ ;\ \pi) .$$

Soit alors

$$z_0 \in D \qquad \text{et} \qquad H_{z_0}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - z_0} .$$

La formule de Cauchy entraîne

$$F(z_0) = \lim f_n(z_0) = f(z_0) .$$

Donc $F = f$; par suite

$$L(F) = L(f) = 0 .$$

On peut trouver

$$\mu \in M(D) = (\alpha(D))' \qquad \text{telle que} \qquad L(f) = \langle \mu\ ,\ f \rangle\ ,\ \forall\ f \in B_H(D) .$$

(b) Réciproquement : Soient $\mu \in M(D)$, et L l'application :

$$f \longmapsto L(f) = \int f\, d\mu \qquad (f \in B_H(D)) .$$

On prouve de même que si $f_n \to f$ pour la topologie $*$-faible de $H_\infty(D)$, et si $L(f_n) = 0$, $\forall\ n$, alors $L(f) = 0$, ce qui permet de conclure.

3. Etude des idéaux de $\beta(D)$.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas $G = D$ (disque unité ouvert). Certains problèmes concernant les idéaux de $B_H(D)$ ont une solution simple, lorsqu'on munit $B_H(D)$ de la topologie β, et peuvent ainsi se généraliser, éventuellement, à $B_H(G)$, pour G quelconque. En effet, β est assez faible pour avoir

$$M'(G) = (\alpha(G))'$$

pour dual, et pourtant assez forte.

Rappelons maintenant un certain nombre de définitions et propriétés ([2]) :

Si $f \in B_H(D)$, les valeurs radiales bornées de f existent presque partout sur le cercle, et sont notées $f(e^{i\theta})$.

Toute fonction analytique bornée dans D admet une représentation unique comme produit d'une fonction intérieure et d'une fonction extérieure.

Les fonctions intérieures f sont caractérisées par le fait que $g \longrightarrow f \times g$ est une isométrie de $H_\infty(D)$, ou encore que

$$|f(e^{i\theta})| = 1 \quad \text{presque partout.}$$

Une fonction intérieure f admet une représentation du type $f = B \times S$, où B est un produit de Blaschke :

$$B(z) = z^p \prod_n \left(\frac{-\overline{z}_n(z - z_n)}{|z_n|(1 - z\overline{z}_n)}\right) ,$$

et S est une fonction singulière :

$$S(z) = \exp\left[-\int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, d\mu(\theta)\right] ,$$

avec μ mesure positive, singulière par rapport à la mesure de Lebesque.

Une fonction extérieure Ω est une fonction du type :

$$\Omega(z) = \exp\left[-\int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, h(\theta)\, d\theta\right] , \qquad \text{où } h \in L^1(-\pi\ ;\ \pi) .$$

Nous notons (f) l'idéal principal $f.B_H(D)$. R. C. BUCK avait pensé que l'on avait :

" (f) dense dans $\beta(D)$ " $\Longleftrightarrow$ " f sans zéros".

En fait, on a le résultat :

" (f) dense dans $\beta(D)$ " $\Longleftrightarrow$ " f sans facteur intérieur".

En d'autres termes, les unités topologiques de $\beta(D)$ sont les fonctions extérieures.

THÉORÈME 1. - " (f) dense dans $\beta(D)$ " $\Longleftrightarrow$ " f est une fonction extérieure".

(a) Supposons f extérieure : On peut toujours supposer $\|f\|_\infty = 1$. A-t-on $1 \in (\overline{f})$?

Ecrivons

$$f(z) = \exp\left[\int \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} h(\theta)\, d\theta\right] ,$$

où $h(\theta) = \log|f(e^{i\theta})|$ est une fonction intégrale $\leqslant 0$.

Posons

$$h_n(\theta) = \sup(-n\ ;\ h(\theta)) , \qquad (n \in \underset{\sim}{N}) ,$$

$$g_n(\theta) = h(\theta) - h_n(\theta) .$$

$$F_n(z) = \exp\left[-\int \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} h_n(\theta)\, d\theta\right] .$$

On a

$$f(z).F_n(z) = \exp\left[\int \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} g_n(\theta)\, d\theta\right] \in (f) .$$

Un calcul simple prouve que $|F_n(z)| \leqslant 1$, donc que $\|f.F_n\|_\infty \leqslant 1$. D'autre part, $g_n \to 0$ dans L^1 , donc $f.F_n \to 1$ ponctuellement. Par suite, $f.F_n$ β-converge vers 1 .

C. Q. F. D.

(b) Supposons que f admette un facteur intérieur non trivial φ . Alors

$$(f) \subset (\varphi) \neq \beta(D) ,$$

et, d'après le théorème qui suit,

$$(\overline{\varphi}) = (\varphi) .$$

On a donc le théorème.

THÉORÈME 2. - φ <u>intérieure</u> $\Rightarrow$ $(\varphi) = (\overline{\varphi})$.

(φ) est un sous-espace vectoriel. Il suffit donc de prouver que φ est séquentiellement fermé. Si donc $\varphi.f_n \to g$ dans $\beta(D)$, les φf_n sont uniformément bornés, comme $\|\varphi.f_n\|_\infty = \|f_n\|_\infty$, il en est de même pour les f_n . Extrayons une sous-suite f_n uniformément convergente sur tout compact vers f . Alors f_n β-converge vers f , et $\varphi.f_n$ β-converge vers $\varphi.f$. Donc

$$g = \varphi.f \qquad \text{ou} \qquad g \in (\varphi) .$$

THÉORÈME 3.

$$\left\{\begin{array}{l} f \in \beta(D) \\ \varphi \ \underline{\text{facteur intérieur de}}\ f \end{array}\right\} \Rightarrow (\varphi) = (\overline{f}) .$$

Remarquons que $(f) \subset (\varphi)$, donc $(\overline{f}) \subset (\varphi)$, d'après le théorème précédent. Par ailleurs, soit g le facteur extérieur de f : $f = \varphi g$. D'après la démonstration du théorème 1, $\exists\, g_n \in H_\infty(D)$ tel que $g.g_n$ β-converge vers 1 . Donc, si

$$\varphi.h \in (\varphi) ,$$

φh est limite pour β de la suite

$$\varphi g g_n\, h \in (\varphi g) = (f) .$$

THÉORÈME 4. - $f \in \beta(D)$, g <u>facteur extérieur de</u> f (φ <u>facteur intérieur de</u> f). <u>Alors</u>,

" $(f) = (\overline{f})$ " $\Longleftrightarrow$ " g <u>inversible dans</u> $B_H(D)$ ".

(a) Si g est inversible dans $B_H(D)$, on a

$$(f) = (\varphi) = (\overline{\varphi}) = (\overline{f}) .$$

(b) Si g n'est pas inversible dans $B_H(D)$, alors

$$\varphi \notin (f) \qquad \text{et} \qquad \varphi \in (\overline{f}) ,$$

donc

$$(f) \neq (\overline{f}) .$$

THÉORÈME 5. - <u>Tout idéal fermé dans</u> $\beta(D)$ <u>est un idéal principal (engendré par une fonction intérieure</u>).

Soit I un idéal β-fermé de $B_H(D)$. Si $f \in I$, de facteur intérieur φ , alors $\varphi \in I$, d'après le théorème 3. Il suffit donc de prouver que I contient une fonction intérieure φ_0 qui divise (dans $B_H(D)$) toutes les fonctions intérieures de I .

Soit J la fermeture de I dans $H_2(D)$. J est un sous-espace fermé de H_2 , invariant par multiplication par z . D'arpès BEURLING [2], il existe φ_0 intérieure telle que $J = \varphi_0 H_2$. Par suite, φ_0 divise, dans $B_H(D)$, toutes les fonctions intérieures de I . Il reste à prouver que $\varphi_0 \in I$. Or $\varphi_0 \in J$, donc

$$\exists\, f_n \in I \to \varphi_0 \quad \text{dans} \quad H_2 .$$

Ecrivons $f_n = \varphi_n g_n$ (φ_n intérieure, g_n extérieure). On peut toujours supposer φ_n β-convergente ($\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$) vers φ . Comme $f_n \in I$, $\varphi_n \in I$, donc

$$\varphi \in I .$$

Par ailleurs, $\|g_n\|_2 = \|f_n\|_2$. On peut encore supposer que g_n converge faiblement vers g dans H_2 . En particulier, $g_n(z) \to g(z)$, $\forall\, z \in D$, car l'évaluation ponctuelle est, d'après CAUCHY, une forme linéaire continue sur H_2 . Ceci entraîne

$$\varphi_0 = \varphi . g \qquad \text{(le voir en chaque point).}$$

D'après le lemme suivant (avec $g_0 = 1$), il en résulte que φ est intérieure , donc

$$g \in H_\infty(D) , \qquad \text{et} \qquad \varphi_0 \in I . H_\infty(D) = I .$$

C. Q. F. D.

LEMME. - Soit $f_n = \varphi_n g_n$ (φ_n intérieure, g_n extérieure) H_2-convergente vers $f_0 = \varphi_0 g_0$ (φ_0 intérieure, g_0 extérieure). $f_0 \neq 0$, f_n et f_0 dans H_2 .

Supposons que φ_n β-converge vers φ , et g_n converge faiblement dans H_2 vers g .

Alors, φ est intérieure, et $g_n \to g$ dans H_2 (g n'est pas forcément extérieure).

On a

$$|\varphi(z)| \leq 1 \quad \text{dans} \quad D ,$$

donc

$$|\varphi(e^{i\theta})| \leq 1 \quad \text{presque partout.}$$

Pour montrer que φ est intérieure, raisonnons par l'absurde. Supposons que l'on ait $|\varphi(e^{i\theta})| < 1$ sur un ensemble de mesure > 0 . Alors,

$$\forall\, h \in H_2 , \quad h \neq 0 , \qquad \|\varphi h\|_2 < \|h\|_2 .$$

On a : g_n converge faiblement vers g . Donc,

$$\|g\|_2 \leq \underline{\lim}\|g_n\|_2 = \underline{\lim}\|f_n\|_2 = \lim\|f_n\|_2 = \|\varphi_0 g_0\|_2 = \|g_0\|_2 = \|\varphi g\|_2 \leq \|g\|_2 ,$$

car

$$\varphi(z)\, g(z) = f_0(z) = \varphi_0(z)\, g_0(z) .$$

D'où

$$\|\varphi g\|_2 = \|g\|_2 ,$$

et la contradiction. Par suite, φ est bien intérieure, et comme $\|g\|_2 = \lim\|g_n\|_2$, g_n tend dans H_2 métrique vers g .

Note. - On peut rapprocher le théorème 5 du suivant, relatif à $\mathcal{H}(\underset{\sim}{C})$.

$\mathfrak{I}$ de type fini $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{I}$ principal $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{I}$ fermé dans $\mathcal{H}(\underset{\sim}{C})$.

Ici, on a par contre le résultat suivant :

THÉORÈME 6. - Il existe, dans $\beta(D)$, un idéal de type fini non fermé.

On veut donc construire un idéal de type fini qui ne soit pas principal.

Soient (z_n) et (w_n) deux suites de D sans point commun telles que

$$\sum (1 - |z_n|) < +\infty \qquad \text{et} \qquad |z_n - w_n| \downarrow 0 \quad \text{très vite.}$$

Soient B_1 le produit de Blaschke associé aux z_n , B_2 le produit de Blaschke associé aux w_n , $\mathfrak{I}$ l'idéal $\mathfrak{I}(B_1 ; B_2)$.

Supposons $\mathfrak{I} = (f)$. Alors f est sans zéros, car B_1 et B_2 sont sans zéros communs. Comme $\frac{1}{f}$ est alors une fonction analytique de caractéristique bornée (du type $g = \frac{f_1}{f_2}$ où f_1 et $f_2 \in B_H(D)$, ce qui signifie encore

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|g(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant m < +\infty , \qquad \forall\, r < 1 \quad [(2)]),$$

on a, pour un certain $C > 0$,

$$|f(z)| \geqslant \exp\left[\frac{-C}{1 - |z|}\right] \quad \text{dans} \quad D .$$

D'autre part,

$$f = g_1 B_1 + g_2 B_2 \qquad (g_1 , g_2 \in B_H(D)) .$$

Donc,

$$|f(z_n)| = |B_2(z_n)||g_2(z_n)| \geqslant \exp\left[\frac{-C}{1 - |z_n|}\right] ,$$

ce qui est impossible, car $|g_2(z_n)|$ est borné et $|B_2(z_n)|$ tend vers 0 très vite.

THÉORÈME 7. - Il existe dans $\beta(D)$ un idéal maximal non fermé.

Si un idéal maximal est fermé, il est principal, engendré par une fonction intérieure φ . Alors, nécessairement, φ a un seul facteur de Blaschke. [Sinon, $\varphi = B.S = b_1.b_2\ S$, et $\psi = b_1\ S$ est intérieure avec $(\varphi) \subset (\psi)$, $(\varphi) \neq (\psi)$, et $(\psi) \neq B_H(D)$. D'où la contradiction.] D'autre part, si φ n'avait pas de zéro (φ singulière), alors $\exists\ \psi = \sqrt{\varphi}$ qui est intérieure et telle que $(\varphi) \subset (\psi)$, $(\varphi) \neq (\psi)$, d'où la contradiction.

En définitive, si I maximal est fermé, les fonctions de I ont un zéro en commun. Prenons donc

$$I' = \{f \in B_H(D) \quad \text{telle que} \quad f(x) \to 0\ , \quad \text{lorsque } x \text{ réel tend vers } 1^-\}\ ,$$

et

$$J \text{ maximal} \supset I'\ .$$

J ne peut être fermé, car les fonctions de I sont sans zéro commun.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Semin. Matem. Univ. Warsz., 1932 (Monografje Matematyczne, 1).

[2] HOFFMAN (Kenneth). - Banach spaces of analytic functions. - Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962 (Prentice-Hall Series in modern Analysis).

[3] RUBEL (L. A.) and SHIELDS (A. L.). - The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 235-277.

[4] SAINT-LOUP (Bernard). - Fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 6e année, 1966/67, n° 15, 9 p.