Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Bernard Saint-Loup

Fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, n° 2 (1966-1967), exp. n° 15, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A4_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
6e année, 1966/67, n° 15

FONCTIONS ANALYTIQUES DANS UN OUVERT CONNEXE DU PLAN

par Bernard SAINT-LOUP

Introduction.

Cet exposé s'inspire essentiellement d'un article de RUBEL et SHIELDS [2]. Il s'agit d'établir un certain nombre de propriétés concernant l'algèbre des fonctions analytiques dans un ouvert connexe du plan. Dans une première partie, on étudie deux topologies sur cette algèbre, dites α et β. Dans une deuxième partie, on applique les résultats obtenus au balayage des mesures bornées. Dans une troisième partie, on étudie les idéaux de la même algèbre munie de la topologie β.

1. Définitions et notations.

Soient G un ouvert connexe non vide relativement compact du plan, $\overline{G}$ et ∂G son adhérence et sa frontière. On suppose qu'il existe sur G une fonction analytique bornée non constante, de sorte que les fonctions analytiques bornées sur G séparent les points de G.

Soit $B_H(G)$ l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur G. Muni de la norme

$$f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{z\in G} |f(z)| ,$$

cet ensemble est un espace de Banach, noté $H_\infty(G)$.

On note $M(G)$ l'ensemble des mesures boréliennes complexes bornées portées par G. Muni de la norme

$$\mu \longmapsto \|\mu\| = \int d|\mu| ,$$

cet ensemble est un Banach.

$B_H(G)$ et $M(G)$ sont mis en dualité par

$$(f , \mu) \longmapsto \langle f , \mu\rangle = \int f \, d\mu .$$

Notons que, si $\mu \in M(G)$, alors $\|\mu\|$ est la norme de μ en tant que forme linéaire continue sur $H_\infty(G)$.

Introduisons sur $M(G)$ la relation d'équivalence associée à la dualité $\mu \sim \nu$ si, et seulement si, $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu$, pour tout f dans $B_H(G)$.

$$N(G) = \{\mu \ , \ \mu \in M(G) \ \text{ et } \ \mu \sim 0\} \ ,$$

qui est l'ensemble des mesures orthogonales à $B_H(G)$, est un sous-espace vectoriel fermé de $H_\infty(G)$, de sorte que

$$M'(G) = \frac{M(G)}{N(G)} \ ,$$

muni de la norme quotient, est un Banach.

Nous notons enfin $K(G)$ l'espace des fonctions continues positives sur $\overline{G}$, nulles sur ∂G .

Si $\mu_1 \ , \mu_2 \ , \ \cdots \ , \mu_n \in M(G)$, alors il existe $k \in K(G)$ tel que

$$\int \frac{1}{k} \, d|\mu_i| < +\infty \ , \qquad \text{pour } \ 1 < i < n \ .$$

2. Topologies α et β .

DÉFINITION 1. - On appelle topologie α sur $B_H(G)$, la topologie $\sigma(B_H(G) \ , M'(G))$, où $B_H(G)$ et $M'(G)$ sont en dualité par

$$\langle f \ , [\mu] \rangle = \langle f \ , \mu \rangle = \int f \, d\mu \ .$$

On note $\alpha(G)$ l'ensemble $B_H(G)$ muni de la topologie α .

Un système fondamental de α-voisinages de 0 est constitué par les ensembles de la forme :

$$N(\mu_1 \ , \mu_2 \ , \ \cdots \ , \mu_n \ , \varepsilon) = \{f \in B_H(G) : \ \left|\int f \, d\mu_i\right| < \varepsilon \ , \ i = 1 \ , 2 \ , \ \cdots \ , n\} \ .$$

DÉFINITION 2. - On appelle topologie β sur $B_H(G)$, la topologie associée à la famille saturée de semi-normes :

$$f \longmapsto \|f\|_k = \|f.k\|_\infty \ , \qquad \text{pour } \ k \in K(G) \ .$$

On note de même $\beta(G)$ l'ensemble $B_H(G)$ muni de la topologie β .

Un système fondamental de β-voisinages de 0 est constitué par les ensembles

$$E_{k,\varepsilon} = \{f \in B_H(G) : \ \|f\|_k < \varepsilon\} \ , \qquad (k \in K(G) : \ \varepsilon > 0) \ .$$

Notons qu'un filtre α-convergent converge ponctuellement, qu'un filtre β-convergent converge uniformément sur tout compact de G . Les réciproques sont fausses.

THÉORÈME 1.

α est moins fine que β .

β est moins fine que la topologie de la norme $\| \|_\infty$.

Soit $N(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n , \varepsilon)$ un α-voisinage de 0 . Il existe $k \in K(G)$ tel que

$$\int \frac{1}{k} \, d|\mu_i| \leqslant 1 , \qquad \text{pour } i = 1 , 2 , \dots , n .$$

Donc, si $f \in E_{k,\varepsilon}$, on a

$$\left| \int f \, d\mu_i \right| \leqslant \int |kf| \, \frac{1}{k} \, d|\mu_i| < \varepsilon .$$

Donc

$$E_{k,\varepsilon} \subset N(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n , \varepsilon) .$$

Par ailleurs, soit $E_{k,\varepsilon}$ un β-voisinage de 0 ;

$$d = \sup_{z \in G} k(z) + 1 .$$

On a manifestement

$$\{f \in B_H(G) : \ \|f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{d}\} \subset E_{k,\varepsilon} .$$

D'où le théorème.

THÉORÈME 2. - $(\alpha(G))' = (\beta(G))' = M'(G)$.

Par définition de la topologie α , $M'(G)$ est le dual de $\alpha(G)$. Comme β est plus fine que α , il suffit que toute forme linéaire β-continue sur $B_H(G)$ soit α-continue. Donc, soit

$$\ell \in (\beta(G))' .$$

On sait qu'il existe $k \in K(G)$ tel que ℓ soit continue pour $\| \|_k$. Soit

$$A = \{kf , \ \text{pour } f \in B_H(G)\} .$$

A est un sous-espace de $C_0(G)$. Posons encore

$$L(kf) = \ell(f) .$$

L est une forme linéaire bornée sur A , que l'on peut prolonger, d'après le théo-

rème de Hahn-Banach, en une forme linéaire bornée sur $C_0(G)$. D'après le théorème de Riesz, on a alors :

$$\exists\ \mu \in M(G) \qquad \text{telle que} \quad L(kf) = \ell(f) = \int kf\, d\mu = \int f(k\, d\mu)\ ,$$

soit

$$\ell(f) = \int f(k\, d\mu)\ .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

$\alpha(G)$ et $\beta(G)$ ont mêmes convexes fermés.

$\alpha(G)$ et $\beta(G)$ ont mêmes bornés (ce sont les bornés en norme $\|\ \|_\infty$).

La première assertion est triviale.

Rappelons que, dans un e. v. t., une partie S est dite bornée si, pour tout voisinage U de 0 , il existe $\lambda \neq 0$ avec $\lambda S \subset U$. Un ensemble, borné pour une topologie, est borné pour toute topologie moins fine. Il est donc suffisant de prouver que toute partie α-bornée S est bornée en norme. Pour $\mu \in M(G)$ et U de la forme $\{f$, telle que $|\int f\, d\mu| < 1\}$,

$$\exists\ \lambda \neq 0 \ \text{ tel que } \ f \in S \implies |\int f\, d\mu| = |\langle f\ ,\ \mu\rangle| < \frac{1}{\lambda}\ .$$

En considérant les éléments de S comme formes linéaires continues sur $M(G)$, et en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus, on obtient le résultat cherché :

$$(\|f\|_{(M(G))'} \geq \|f\|_\infty)\ .$$

THÉORÈME 3. - Soit $(f_i)_{i\in I}$ un filtre uniformément borné dans $B_H(G)$ $(\|f_i\|_\infty < m < +\infty\ ,\ \forall\ i \in I)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.:

1° f_i β-converge vers 0 ;

2° f_i α-converge vers 0 ;

3° f_i converge ponctuellement vers 0 ;

4° f_i converge vers 0 uniformément sur tout compact.

1° $\Rightarrow$ 2° et 2° $\Rightarrow$ 3° . 3° $\Rightarrow$ 4° est bien connu (la seule valeur d'adhérence possible est 0). Pour 4° $\Rightarrow$ 1° , donnons-nous $k \in K(G)$, $\varepsilon > 0$. On peut supposer de plus $k(z) \leq m$ dans G . Il existe C compact $\subset G$ tel que

$$k(z) < \frac{\varepsilon}{m}\ , \qquad \text{pour } z \in G - C\ .$$

D'après l'hypothèse 4°, il existe un élément du filtre pour lequel on a

$$|f_i(z)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{dans} \quad C \ ,$$

d'où

$$k(z)|f_i(z)| < \varepsilon \quad \text{partout.}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Les topologies α et β ont même trace sur les bornés. Ces traces sont métriques.

COROLLAIRE 2. - Les topologies α et β ont mêmes compacts, à savoir les fermés bornés.

Dans un e. v. t. s., tout compact est fermé borné. Réciproquement, si S est α-borné, ou β-borné, S est une famille normale. De toute suite dans S, on peut donc extraire une sous-suite α-convergente ou β-convergente (théorème 3). D'après le corollaire 1, ceci assure que $\overline{S}$ est compact.

COROLLAIRE 3. - $\alpha(G)$ et $\beta(G)$ ont mêmes suites convergentes, à savoir les suites bornées qui convergent ponctuellement.

Toute suite bornée convergeant ponctuellement est α-convergente et β-convergente. Toute suite β-convergente est α-convergente. Toute suite α-convergente converge pontuellement (mesures ponctuelles) et est bornée (corollaire du théorème 2).

PROPOSITION. - Ni α, ni β, ne satisfont au premier axiome de dénombrabilité ($\alpha(G)$ et $\beta(G)$ ne sont pas des espaces métriques).

La démonstration est due à R. C. BUCK.

Soit $f \in B_H(G)$, $\|f\|_\infty = 1$, f non constante. La suite f^n converge vers 0 dans $\alpha(G)$ et $\beta(G)$. Considérons l'ensemble

$$S = \{f^n + nf^m \ ; \ m, n = 1, 2, 3, \ldots\} \ .$$

$0 \in \overline{S}$: En effet, soient U voisinage de 0 et V voisinage de 0, tels que

$$V + V \subset U \ .$$

Prenons n tel que $f^n \in V$; prenons alors m tel que $nf^m \in V$. on a

$$f^n + nf^m \in U \ ,$$

donc $0 \in \overline{S}$.

Supposons maintenant qu'une sous-suite $(s_k)_{k\geqslant 1}$, $s_k = f^{n_k} + n_k f^{m_k}$, de S , converge vers 0 . Les s_k sont uniformément bornés. On a donc

$$|\|f^{n_k}\|_\infty - n_k\|f^{m_k}\|_\infty| \leq A < +\infty ;$$

les n_k sont donc bornés, et en passant à une sous-suite, on peut donc supposer n_k constant $= n$, soit

$$s_k = f^n + nf^{m_k} .$$

Si $m_k \to +\infty$ avec k , alors $s_k \to f^n \neq 0$, ce qui est impossible.

Si m_k est borné, m_k prend une infinité de fois une valeur m , donc

$$f^n + nf^m = 0 ,$$

ce qui entraîne f constante ; d'où l'impossibilité.

PROPOSITION. - $\alpha(G)$ et $\beta(G)$ ne sont ni tonnelés, ni bornologiques.

La boule unité fermée U de $H_\infty(G)$ est un tonneau pour $\alpha(G)$ et $\beta(G)$. Cependant, cet ensemble n'est, ni un α-voisinage de 0 , ni un β-voisinage de 0 . En effet, si $f \in B_H(G)$, $\|f\|_\infty = 1$, f non constante, la suite $2f^n$ α-converge et β-converge vers 0 . Pourtant, $\forall\, n$, $2f^n \notin U$. D'où la proposition.

Ceci complète la liste des propriétés communes à $\alpha(G)$ et $\beta(G)$. Toutefois, $\alpha \neq \beta$.

PROPOSITION. - Les topologies α et β sont distinctes.

Soient C un compact de G , d'intérieur non vide, et $k \in K(G)$, positif sur C. Soit

$$E = E_{k,1} = \{f \in B_H(G) \text{ telle que } \|f\|_k < 1\} .$$

Les $f \in E$ sont uniformément bornées sur C . Mais aucun α-voisinage de 0 ne possède cette propriété. En effet, étant donné un ensemble fini de mesures $\{\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n\}$, il existe $f \neq 0$ dans $B_H(G)$ orthogonale aux μ_i , $i = 1 , 2 , \dots , n$ (dimension de $B_H(G)$ infinie). Si m est un entier quelconque, $mf \in N(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n , \varepsilon)$. Pourtant les mf ne sont pas uniformément bornées sur C , car f ne peut être nulle en tout point de C qui a un intérieur non vide.

PROPOSITION. - L'espace $\beta(G)$ est topologiquement complet alors que $\alpha(G)$ ne l'est pas.

$\alpha(G)$ n'est pas complet, car il est le dual d'un espace de Banach de dimension infinie muni de la topologie weak star.

$\beta(G)$ est complet. Soit (F_γ) un filtre de Cauchy dans $\beta(G)$. Pour tout k de $K(G)$, $(F_\gamma\, k)$ est un filtre de Cauchy pour la convergence uniforme et, par suite, est uniformément convergent. Il en résulte que (F_γ) est uniformément convergent sur tout compact de G . La limite F est analytique et de plus elle est bornée car, pour tout k de $K(G)$, on a

$$\sup(|F(z)\ k(z)| : z \in G) < +\infty .$$

PROPOSITION. - $\beta(G)$ est une algèbre topologique.

En effet, si $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ β-convergent vers 0 , et si $k \in K(G)$, alors

$$|f_i\ g_i\ k| = |f_i \sqrt{k}|\ |g_i \sqrt{k}| ,$$

et donc $(f_i\ g_i)_{i\in I}$ β-converge vers 0 . On conclut de façon classique.

3. Balayage.

DÉFINITIONS. NOTATIONS. - Soient λ la mesure de Lebesque du plan, et $L^1(G)$ le sous-espace de $M(G)$ des mesures absolument continues par rapport à λ .

THÉORÈME. - $\forall\ \mu \in M(G)$, $\exists\ \nu \in L^1(G)$ telle que :

$$\nu \sim \mu \qquad \text{et} \qquad \|\nu\| \leq \|\mu\| .$$

La théorie du potentiel a fourni l'idée de la démonstration.

On balaye d'abord les mesures ponctuelles.

Soient $w \in G$, ε_w la mesure ponctuelle de w , $d = \text{distance}(w , \partial G)$, $d' = \inf(1 , d)$, $a = \frac{d'}{3}$, $b = \frac{2d'}{3}$, E un ensemble borélien $\subset G$ de fonction caractéristique χ_E . Définissons ν_w par

$$\nu_w(E) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - w| = t} \chi_E(\zeta)\ \frac{d\zeta}{\zeta - w}\right) dt$$

(cf. formule de Cauchy pour un couronne), on a bien

$$f(w) = \int f\, d\nu_w , \qquad \text{pour } f \in B_H(G) ,$$

de sorte que

$$\nu_w \sim \varepsilon_w \ .$$

Il est clair de plus que

$$\|\nu_w\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \nu_w \in L^1(G) \ .$$

Si maintenant $\mu \in M(G)$, définissons sa balayée par intégration . On pose

$$\nu(E) = \int \nu_w(E)\, d\mu(w) = \int \left(\int \chi_E(z)\, d\nu_w(z)\right) d\mu(w) \ , \qquad \text{pour } E \text{ borélien.}$$

Donc,

$$\int f(z)\, d\nu(z) = \int \left(\int f(z)\, d\nu_w(z)\right) d\mu(w) = \int f(w)\, d\mu(w) \ , \qquad \text{pour } f \in B_H(G) \ ,$$

de sorte que

$$\nu \sim \mu \ .$$

Si $\varphi \in C_0(\overline{G})$, un calcul simple montre que

$$\left|\int \varphi\, d\nu\right| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|\mu\| \ ,$$

et donc

$$\|\nu\| \leq \|\mu\| \ .$$

De plus, si $E \subset G$ et $\lambda(E) = 0$, on a

$$\nu_w(E) = 0 \ , \qquad \forall\ w \in G \ ,$$

et donc

$$\nu(E) = 0 \ ,$$

ce qui démontre le théorème.

Posons

$$N_\lambda(G) = \{\mu \in L^1(G) \ , \ \mu \sim 0\} \ ,$$

$N_\lambda(G)$ est un sous-espace fermé de $L^1(G)$. On a la proposition suivante :

PROPOSITION. - $\dfrac{L^1(G)}{N_\lambda(G)}$ est isomorphe isométriquement à $M'(G)$ par l'application canonique. Donc $M'(G)$ est un Banach séparable.

THÉORÈME. - $H_\infty(G)$ est le dual topologique du Banach $M'(G)$.

La démonstration est due à une remarque de G. CHOQUET. Le dual topologique de $M'(G)$ est contenu dans $L^\infty(G)$, et contient $H_\infty(G)$. Montrons donc que, si f appartient au dual de $M'(G)$, alors f est analytique dans G . Soit D un disque fermé de rayon non nul inclus dans G , de frontière C . Soit $w \in \overset{\circ}{D}$. On a

$$\varepsilon_w \backsim \frac{1}{2i\pi} \chi_C(z) \frac{dz}{z - w} .$$

Donc

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\, dz}{z - w} ,$$

ce qui prouve que f est analytique dans $\overset{\circ}{D}$, donc en définitive dans G .

COROLLAIRE 1. - La topologie α sur $B_H(G)$ est donc la weak-* topologie de $H_\infty(G)$ comme dual de $M'(G)$.

COROLLAIRE 2. - Un sous-espace vectoriel de $\alpha(G)$ est fermé si, et seulement si, il est séquentiellement fermé.

COROLLAIRE 3. - Un sous-espace vectoriel de $\beta(G)$ est fermé si, et seulement si, il est séquentiellement fermé.

COROLLAIRE 4. - $\alpha(G)$ et $\beta(G)$ aussi sont séparables.

Le corollaire 2 provient du fait que $M'(G)$ est un Banach séparable ([1], chapitre 8, théorème 5). Le corollaire 3 provient du fait que α et β ont mêmes convexes fermés et mêmes suites convergentes. Le corollaire 4 provient encore de [1] (chapitre 8, théorème 4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (Stefan). - Théorie des opérations linéaires. - Warszawa, Seminar. Matem. Univ. Warsz., 1932 (Monografje Matematyczne, 1).

[2] RUBEL (L. A.) and SHIELDS (A. L.). - The space of bounded analytic functions on a region, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 235-277.