Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Fulbert Mignot

Espaces analytiques banachiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, n° 1 (1966-1967), exp. n° 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_1_A4_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1966-1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
6e année, 1966/67, n° 4

1 décembre 1966

ESPACES ANALYTIQUES BANACHIQUES

par Fulbert MIGNOT

(d'après la thèse d'Adrien DOUADY [3])

Un espace analytique de dimension finie est un espace annelé $(X , \mathcal{O}_X)$ (où X est un espace topologique, et $\mathcal{O}_X$ un faisceau d'anneaux sur $\mathcal{O}_X$), localement isomorphe à un modèle $(Y , \mathcal{O}_Y)$, où Y désigne l'ensemble des zéros d'une famille $(f_1 , \dots , f_n)$ de fonctions analytiques définies sur un ouvert U $(U \subset \underset{\sim}{C}^p)$, et où $\mathcal{O}_Y$ est le faisceau d'anneaux défini sur Y , dont la fibre $\mathcal{O}_{Y,f}$ est égale à $\mathcal{O}_{U,y}/\mathcal{J}_y$ (avec $\mathcal{O}_{U,y}$ anneau des germes de fonctions analytiques en y , et $\mathcal{J}_y$ idéal de $\mathcal{O}_{U,y}$ engendré par les germes en y des fonctions $f_1 , \dots , f_n$).

Si $\mathcal{O}_X$ est réduit ($\mathcal{O}_{X,x}$ ne possède pas d'éléments nilpotents), une fonction analytique sur X est une section du faisceau $\mathcal{O}_X$. Cette notion coïncide avec la définition habituelle dans le cas où X est un ouvert de $\underset{\sim}{C}^p$. On a immédiatement la notion de fonction analytique à valeurs dans un $\underset{\sim}{C}^q$, et la donnée de $\mathcal{O}_X$ détermine ces fonctions par passage aux composantes. Il n'en est pas de même dans le cas des espaces de Banach, ce qui nécessite de considérer les faisceaux des fonctions analytiques à valeurs dans un Banach quelconque.

1. Modèles d'espaces analytiques. Définitions.

(a) Fonctions analytiques.

1° E , F désignent des Banach sur $\underset{\sim}{C}$, U un ouvert de E , $f : U \to F$. f est analytique en $x \in U$, s'il existe une boule $B(x , r)$ contenue dans U , telle que, sur B ,

$$f(y) = \sum_0^\infty f_n(y) ,$$

les f_n étant des fonctions polynomiales de degré n en $(y - x)$, et si, $\tilde{f}_n$ désigne la fonction multilinéaire associée à f_n ,

$$\sum_0^\infty \|\tilde{f}_n\| < +\infty .$$

2° f est analytique sur U , si elle est analytique en tout point x $(x \in U)$.

3° Les propositions suivantes sont équivalentes :

f est analytique sur U ;

f est $\underset{\sim}{C}$-différentiable sur U ;

f est continue, et, pour tout ν $(\nu \in F')$, $(\nu \circ f)$ est analytique [3].

4° Définition d'un modèle.

Notations. - E , F , G désignent des Banach complexes, U un ouvert de E , $f : U \longmapsto F$ une application analytique, $X = f^{-1}(0)$.

A tout ouvert V $(V \subset U)$, on associe $\mathcal{H}(V , G)$, espace vectoriel des fonctions analytiques définies sur V , à valeurs dans G . La donnée des $\{\mathcal{H}(V , G)\}_{V \subset U}$ définit un faisceau noté $\mathcal{H}(G)$.

Soit $\pi(f , G)$ le faisceau sur U défini par

$$V \subset U , \quad \pi(f , G) = \{g : V \to G , \ \exists \lambda \in \mathcal{H}(V , \mathcal{L}(F , G)) , \ g(x) = \lambda(x).f(x)\} .$$

Remarque. - Si $E = \underset{\sim}{C}^p$, $F = \underset{\sim}{C}^n$, $G = \underset{\sim}{C}$. Alors $f = (f_1 , \ldots , f_n)$, et

$$\pi(f , \underset{\sim}{C})(V) = \{g : V \to \underset{\sim}{C} , \ g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \, f_i(x)\} .$$

$\pi(f , \underset{\sim}{C})$ est donc le faisceau d'idéaux associé aux fonctions $f_1 , \ldots , f_n$.

Soit $\Phi(G)$ le faisceau associé au préfaisceau quotient $\mathcal{H}(G)/\pi(f , G)$. Le support de ce faisceau est X :

Soient $x_0 \notin X$, $g \in \mathcal{H}_{x_0}$ (fibre de $\mathcal{H}$ en x_0), $f(x_0) \neq 0$. Soit ν appartenant à F' , $\nu(f(x_0)) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que, sur $V(x_0)$,

$$g(x) = \frac{g(x)}{\nu(f(x))} \, \nu(f(x)) \in \pi(f , G)(V(x_0)) .$$

On désignera encore par $\Phi(G)$ la restriction du faisceau à X .

Etant donnés deux Banach G et G' , et une application analytique $h : G \to G'$, on définit, grâce au lemme suivant, un morphisme de $\Phi(G)$ dans $\Phi(G')$.

LEMME 1. - Soient Ω un ouvert de $U \times F$ contenant un point $(x_0 , 0)$ $(x_0 \in X)$, et η une application analytique de Ω dans un Banach G' , nulle sur $(U \times 0) \cap \Omega$. Il existe alors un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans U , tel que $(x , f(x)) \in \Omega$ pour tout $x \in U_0$, et que la fonction $g \in \mathcal{H}(U_0 , G')$, définie par $g(x) = \eta(x , f(x))$ appartienne à $\pi(f/U_0 , G')$.

De plus, si Ω est de la forme $U' \times F$ (U' ouvert de U), alors $U_0 = U'$.

Démonstration. - Soit U_0 l'ouvert de U , défini par

$$U_0 = \{x \ , \ \forall\ t \in]0 \ , \ 1[\ , \ (x \ , \ tf(x)) \in \Omega\}$$

($x_0 \in U_0$ car $f(x_0) \neq 0$). Si $\Omega = U' \times F$, $U_0 = U'$.

Soit $\lambda(x) = \int_0^1 \eta_2'(x \ , \ tf(x))\ dt$ (η_2' dérivée partielle de η par rapport à la seconde variable). Alors, pour tout $x_0 \in U_0$,

$$g(x) = \eta(x \ , \ f(x)) = \lambda(x)\ f(x) \ .$$

C. Q. F. D.

(b) Construction d'un morphisme de $\Phi(G)$ dans $\Phi(G')$, associé à h analytique, $G \to G'$.

Soit $U' \subset U$,

$$h_{U'} : \mathcal{H}(U' \ , \ G) \to \mathcal{H}(U' \ , \ G') \ ,$$
$$\gamma \longmapsto (h \circ \gamma) \ .$$

Si γ et γ' sont deux éléments de $\mathcal{H}(U' \ , \ G)$, représentant un même élément de $\Phi(U' \ , \ G)$,

$$\gamma' = \gamma + \lambda\ f/U' \ , \qquad \lambda \in \mathcal{H}(f \ , \ G)(U') \ .$$

Pour $(x \ , \ y) \in U' \times F$, la fonction $\eta(x \ , \ y)$,

$$\eta(x \ , \ y) = h_{U'}(\gamma(x) + \lambda(x)\ y) - h_{U'}(\gamma(x)) \ ,$$

est analytique sur $U' \times F$, nulle sur $U' \times (0)$; d'après le lemme 1 :

$$h_{U'}(\gamma') = h_{U'}(\gamma) + g \ , \qquad g \in \mathcal{H}(f/U' \ , \ G') \ ,$$

donc $h_{U'}(\gamma')$ et $h_{U'}(\gamma)$ définissent le même élément par passage au quotient dans $\Phi(G')(U')$. Ceci permet de considérer le morphisme de faisceau :

$$\Phi(h) = h_* : \ \Phi(G) \to \Phi(G') \ .$$

(c) Définition des faisceaux $\Phi(W)$. - Soit W un ouvert de G . L'ensemble des sections du faisceau $\Phi(G)$, dont la fonction ensembliste sous-jacente est à valeurs dans W , constitue un sous-faisceau (d'ensembles) de $\Phi(G)$, noté $\Phi(W)$.

Si $h : W \to W'$ est analytique, on peut définir un morphisme de faisceau $h_* : \Phi(W) \to \Phi(W')$.

Soient $\alpha \in \Phi_{x_0}(W)$ (fibre de $\Phi(W)$ en x_0), et γ un représentant de α, $\gamma \in \mathcal{H}(U' , G)$ (U' voisinage de x_0) ; deux représentants γ et γ' $(\gamma \in \mathcal{H}(U'', G))$ sont tels que

$$(\gamma - \gamma') \in \mathcal{R}(f , G)(\tilde{U}) , \qquad \tilde{U} \subset U' \cap U'' ,$$

$$\gamma - \gamma' = \lambda . f .$$

Soit $\eta(x , y) = h(\gamma'(x) + \lambda(x)\, y) - h(\gamma'(x))$. η est défini sur un ouvert Ω, $(x_0\ 0) \in \Omega \subset \tilde{U} \times F$; de plus, η s'annule sur $\Omega \cap \tilde{U} \times (0)$. D'après le lemme 1, il existe un voisinage $\tilde{U}_0$ de x_0 tel que $\eta(x , f(x))$ appartienne à $\mathcal{R}(f , G')(\tilde{U}_0)$. Il en résulte que $(h \circ \gamma)$ et $(h \circ \gamma')$ définissent le même germe de $\Phi_{x_0}(W')$.

(d) Définition du foncteur Φ . - Soit Φ le foncteur défini sur la catégorie des ouverts d'espaces de Banach (flèches : les applications analytiques) , à valeurs dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X , qui :

- à tout ouvert W associe $\Phi(W)$;

- à $h : W \to W'$ associe le morphisme, défini précédemment, de $\Phi(W)$ dans $\Phi(W')$ (noté $\Phi(h)$).

Le triplet (U , f , Φ) constitue un modèle.

(e) Définition des espaces $\mathcal{K}$-fonctés. - Soit $\mathcal{K}$ une catégorie.

1° Un espace $\mathcal{K}$-foncté sera un couple (X , Φ) où :

X est un espace topologique,

Φ est un foncteur de la catégorie $\mathcal{K}$ dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X .

2° Un morphisme de (X , Φ) dans (Y , Ψ) est un couple (f_0 , f_1) , où f_0 est une application continue de X dans Y , et f_1 un morphisme du foncteur $f_0^* \Psi$ dans Φ (f_0^* : foncteur image réciproque par f_0).

Remarque 1. - Comme les foncteurs f_0^* et f_{0*} sont adjoints, il revient au même de se donner f_1 ou un morphisme de Ψ dans $f_{0*} \Phi$.

Remarque 2. - Si (X , Φ) est un espace $\mathcal{K}$-foncté, et si $Y \subset X$, $j : Y \to X$ (j désignant l'injection canonique), $(Y , j^* \Phi)$ est alors un espace $\mathcal{K}$-foncté. On dira que cette structure est induite sur Y par Φ .

Remarque 3. - Les modèles $\mu(U , f , \Phi)$ constituent des exemples d'espaces $\mathcal{K}$-fonctés ($\mathcal{K}$: catégorie des ouverts d'espaces de Banach avec les applications analytiques).

Remarque 4. - Un modèle $\mu(U , f , \Phi)$ est dit lisse si $f = 0$. Le foncteur Φ , à tout ouvert W , associe $\mathcal{K}(W)$, ensemble des fonctions analytiques définies dans U à valeurs dans W .

Un espace analytique banachique (e. a. b.) est lisse, s'il est localement isomorphe à un modèle lisse : cette notion se confond avec celle de variété analytique banachique.

(f) Définition des espaces analytiques banachiques. - Soit $\mathcal{K}$ la même catégorie que dans les remarques précédentes.

Un espace analytique banachique est un espace $\mathcal{K}$-fonctédont tout point admet un voisinage ouvert isomorphe à un modèle.

Tout e. a. b. a un espace annelé sous-jacent : $\Phi(\underset{\sim}{C})$. Dans le cas où E n'est pas de dimension finie, cet espace annelé ne détermine pas nécessairement la structure d'e. a. b., sauf si l'e. a. b. est lisse.

2. Contre-exemple (dû à A. DOUADY).

Soit (c_0) l'espace de Banach des suites tendant vers 0 à l'infini,

$$\ell^1 = (c_0)' , \qquad \ell^\infty = (\ell^1)' , \qquad (\ell^\infty)' .$$

Considérons c_0 comme modèle lisse d'une part, et d'autre part comme e. a. b. associé à $p : \ell^\infty \to \ell^\infty/c_0$, on le note $\underset{\sim}{c}_0$,

$$\underset{\sim}{c}_0 = \mu(\ell^\infty , p , \ell^\infty/c_0) .$$

$$\Phi(c_0 , \underset{\sim}{C}) = \Phi(\underset{\sim}{c}_0 , \underset{\sim}{C}) . \tag{1}$$

En effet, $(c_0)'$ est facteur direct dans $(\ell^\infty)'$, et par récurrence, il est immédiat que $\mathfrak{L}((\ell^\infty)^n , \underset{\sim}{C})$ admet $\mathfrak{L}((c_0)^n \underset{\sim}{C})$ comme facteur direct. Ceci permet d'identifier les deux espaces annelés.

$$\Phi(c_0 , \underset{\sim}{c}_0) \neq \Phi(\underset{\sim}{c}_0 , c_0) . \tag{2}$$

En effet, $\mathrm{Id}_{c_0} \in \Phi(c_0 , c_0)$ et $\mathrm{Id}_{c_0} \notin \Phi(\underset{\sim}{c}_0 , c_0)$, sinon l'identité de c_0 se prolongerait localement en une application φ-analytique définie sur un ouvert de ℓ^∞ . Pour $x \in c_0$, $\varphi'(x) \in \mathfrak{L}(\ell^\infty , c_0)$ et $\varphi'(x) \circ \varphi'(x) = \varphi'(x)$. $\varphi'(x)$ serait un projecteur de ℓ^∞ sur c_0 , ce qui ne peut être car (c_0) n'est pas facteur direct dans ℓ^∞ .

PROPOSITION 1. - A toute section de $\Phi(W)(U)$, on peut asscier une fonction continue de U dans W (U ouvert de X), appelée application ensembliste sous-jacente.

Il suffit de démontrer le lemme suivant :

LEMME 2. - Soient (X , Φ) et (Y , Ψ) deux modèles d'e. a. b., et (f_0 , f_1) un morphisme : $(X , \Phi) \to (Y , \Psi)$. Si s appartient à $(f_0^* \Psi)(W)(U)$ (U ouvert de X), et si $\varepsilon(s)$ désigne la fonction ensembliste sous-jacente, alors

$$\varepsilon(s) = \varepsilon(f_1(W)\ s) .$$

En effet, soient $x \in U$, et $\varepsilon_x(s)$ la valeur de $\varepsilon(s)$ en x . Pour tout W' voisinage de $\varepsilon_x(s)$, $\varepsilon_x(f_1(W)\ s)$ appartient à W' , avec i : W' -> W ,

$$\begin{array}{ccccc} (f_0^* \Psi)(W') & \xrightarrow{f_1(W')} & \Phi(W') & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathfrak{F}(W') \\ \downarrow{\scriptstyle (f_0^* \Psi)(i)} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(i)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}(i)} \\ (f_0^* \Psi)(W) & \xrightarrow{f_1(W)} & \Phi(W) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathfrak{F}(W) \end{array}$$

($\mathfrak{F}(W)$ faisceau des fonctions continues dans X à valeurs dans W).

$\varepsilon_x(s) \in W'$, il existe $s' \in (f_0^* \Psi)(W')$ tel que

$$(f_0^* \Psi)(i)s' = s \qquad \text{(en prenant U assez petit)} ,$$

$$\Phi(i)\ f_1(W')s' = f_1(W)s .$$

$$\varepsilon(f_1(W)s) = \varepsilon(\Phi(i)\ f_1(W')s') = \mathfrak{F}(i)\ \varepsilon(f_1(W')s') ,$$

$\varepsilon(f_1(W')s')$ prend ses valeurs dans W' , donc $\varepsilon(f_1(W)s)$ aussi.

C. Q. F. D.

Une section de $\Phi(W)(U)$ étant donnée, il suffit de considérer un recouvrement de U par des X_i , tel que (X_i , Φ_i) soit isomorphe à un modèle. L'isomorphisme permet de construire une fonction ensembliste sous-jacente à s/X_i , et le lemme 2 montre que cette fonction ne dépend pas des X_i choisis.

PROPOSITION 2. - Soient (X , Φ) un e. a. b., et X' un ouvert d'espace de Banach. L'ensemble des morphismes de (X , Φ) dans le modèle lisse $(X' , \mathcal{H}_{X'})$ s'identifie à $\Phi(X , X') = H^0(X , \Phi(X'))$.

(α) Morphisme défini par une section. - Soient $s \in \Phi(X , X')$, et $g = \tilde{s}$: $X \to X'$ l'application continue sous-jacente. Soit V' un ouvert de X' ; $i_{V'} : V' \to X'$,

$$\Phi(i_{V'}) : \Phi(g^{-1}(V') , V') \to \Phi(g^{-1}(V') , X') ;$$

il existe $s_{V'}$ unique tel que

$$\Phi(i_{V'})s_{V'} = s/g^{-1}(V') . \tag{3}$$

Soit W ouvert d'un Banach,

$$\mathcal{H}(V' , W) \to \Phi(g^{-1}(V') , W) = (g_* \Phi)(V' , W)$$
$$h \longmapsto \Phi(h)s_{V'} .$$

Cette application définit un morphisme f_1 du foncteur $\mathcal{H}$ dans $g_* \Phi$.

A la section s , on associe le morphisme (g , f_1) . Cette application est injective.

(β) Section définie par un morphisme. - Il s'agit de montrer que tout morphisme détermine une section à laquelle il est associé par la construction précédente ;

$$(X , \Phi) \xrightarrow{(f_0 , f_1)} (X' , \mathcal{H}) ,$$

$$V' \subset X' , \qquad \mathcal{H}(V' , W) \xrightarrow{f_1(V' , W)} \Phi(f_0^{-1}(V') , W) .$$

En prenant $W = V'$, $id_{V'} \in \mathcal{H}(V' , V')$,

$$s_{V'} = f_1(V' , V') (id_{V'}) \in \Phi(f_0^{-1}(V') , V') .$$

Si $V' = X'$,

$$s_{X'} = f_1(X' , X') (id_{X'}) \in \Phi(X , X') .$$

Il suffit de montrer que $s_{X'}$ admet f_0 comme fonction sous-jacente, et que f_1 coïncide avec le morphisme associé à $s_{X'}$ par la méthode du (α). Soient les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(V' , V') & \xrightarrow{f_1(V' , V')} & \Phi(f_0^{-1}(V') , V') \\
\mathcal{H}(i)\downarrow & & \downarrow\Phi(i) \\
\mathcal{H}(V' , X') & \xrightarrow{f_1(V' , X')} & \Phi(f_0^{-1}(V') , X') \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{H}(X' , X') & \xrightarrow{f_1(X' , X')} & \Phi(X , X') ,
\end{array}$$

On obtient

$$\Phi(i_{V'\to X'})s_{V'} = s/f_0^{-1}(V') .$$

Ceci montre que les $s_{V'}$, définis ici, coïncident avec les $s_{V'}$, définis dans (α) $s_{V'} \in \Phi(f_0^{-1}(V') , V')$. La fonction $\tilde{s}$ associée à s est telle que $\tilde{s}(f_0^{-1}(V')) \subset V'$, donc $\tilde{s} = f_0$. D'autre part, le diagramme suivant montre que $f_1(V' , W)h = \Phi(h)s_{V'}$, donc que le morphisme associé à s coïncide avec f_1 ,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(V' , V') & \xrightarrow{f_1(V' , V')} & \Phi(f_0^{-1}(V') , V') \\
\mathcal{H}(h)\downarrow & & \downarrow\Phi(h) \\
\mathcal{H}(V' , W) & \xrightarrow{f_1(V' , W)} & \Phi(f_0^{-1}(V') , W)
\end{array}$$

COROLLAIRE 1. - Tout morphisme (f_0 , f_1) d'un modèle lisse $(W , \mathcal{H}_W)$, dans un modèle lisse $(W' , \mathcal{H}_{W'})$, est entièrement déterminé par l'application f_0 qui est donc analytique : f_1 est l'injection canonique de $f_0^* \mathcal{H}_{W'}$ dans $\mathcal{H}_W$, et la section associée au morphisme est f_0 (considéré comme élément de $\Phi(W , W')$.

COROLLAIRE 2. - $(X , \Phi) \xrightarrow{(f_0 , f_1)} (X' , \Phi') \xrightarrow{(g_0 , g_1)} (W , \mathcal{H})$ ($(W , \mathcal{H})$ modèle lisse). Si (g_0 , g_1) est représenté par $s' \in \Phi'(X' , W)$, le composé $g \circ f$ est représenté par $f_1(W)s' \in \Phi(X , W)$,

$$f_1(W) : \Phi'(W) \to (f_{0*} \Phi)(W) .$$

COROLLAIRE 3. - Soit le modèle $(X , \Phi) = \mu(U , F , f)$, et soit i_0 l'injection canonique : $X \to U$. Pour tout ouvert W , on a un morphisme $i_1(W)$: $i_0^* \mathcal{H}(U , W) \to \Phi(W)$, donc un morphisme :

$$(X , \Phi) \xrightarrow{(i_0 \; i_1)} (U , \mathcal{H}) ,$$

déterminé par la section $\sigma \in \Phi(X_0 , U)$,

$$\sigma = i_1(U)\ (Id_U) .$$

Remarque. - Soit G un espace de Banach. Un morphisme

$$(f_0 , f_1) : (X , \Phi) \to (G , \mathcal{K})$$

sera dit nul, si la section $s \in \Phi(X , G)$, représentant le morphisme, est nulle (faisceau d'e. v.). f_0 envoie alors X sur 0 .

PROPOSITION 3. - Soient E , F deux espaces de Banach, U un ouvert de E , et f un morphisme du modèle lisse $(U , \mathcal{K}_U)$ dans le modèle lisse $(F , \mathcal{K}_F)$ (f_0 application analytique associée). Pour tout e. a. b. (X , Φ) , l'ensemble des morphismes $g = (g_0 , g_1)$ de (X , Φ) dans le modèle $(X_0 , \Phi) = \mu(U , F , f_0)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes $u = (u_0 , u_1)$ de (X , Φ) dans le modèle lisse $(U , \mathcal{K}_U)$, tels que $f \circ u = 0$.

LEMME 3. - Soient G , G' , G'' trois espaces de Banach, W un ouvert de G , et des applications analytiques $\varphi \in \mathcal{K}(W , G')$ et $\nu \in \mathcal{K}(W , \mathcal{L}(G' , G''))$ qui définissent $\varphi' = \nu.\varphi \in \mathcal{K}(W , G'')$. Si (X , Φ) est un e. a. b., et si $s \in \Phi(Y , W)$ (Y ouvert de X) vérifie $\Phi(\varphi)(s) = 0$, alors $\Phi(\varphi')(s) = 0$.

La propriété étant de caractère local, on se ramène au cas où (X , Φ) est un modèle $\mu(U , F , f)$. La démonstration se fait alors sans difficulté.

Démonstration de la proposition 3. - $(f \circ u = 0)$ est équivalent à :

$$\forall\ h \in \mathcal{H}(f_0/U' , G)\ (U' \text{ ouvert de } U), \quad u_1(U' , G)(h) = 0 .$$

En effet, d'après le corollaire 2 , $f \circ u = 0$ est équivalent à :

$$u_1(U , F)f_0 = 0 .$$

Soit le carré commutatif $(h \in \mathcal{K}_U(U' , G)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_U(U' , U') & \xrightarrow{u_1(U' , U')} & \Phi(u_0^{-1}(U') , U') \\ \Big\downarrow \mathcal{K}_U(h) & & \Big\downarrow \Phi(h) \\ \mathcal{K}_U(U' , G) & \xrightarrow{u_1(U' , G)} & \Phi(u_0^{-1}(U') , G) \end{array}$$

On applique ceci à $Id_{U'}$:

$$\Phi(h)\ u_1(U' , U')\ (Id_{U'}) = u_1(U' , G)\ \mathcal{H}_U(h)\ (Id_{U'}) ,$$

si $s = u_1(U' , U')\ (Id_{U'})$,

$$\Phi(h)s = u_1(U' , G)(h) .$$

D'autre part, $u_1(U' , F)\ (f_0/U') = 0$, donc

$$\Phi(f/U')(s) = 0 .$$

Or,

$$\forall\ h \in \mathcal{N}(f_0/U' , G)\quad h = \lambda f_0/U' \quad (\lambda \in \mathcal{H}(U' , \mathcal{L}(F , G))) .$$

Il suffit d'appliquer le lemme 3, avec $Y = u_0^{-1}(U')$ et $W = U'$, pour obtenir $\Phi(h)(s) = 0$, donc $u_1(U' , G)(h) = 0$.

La réciproque est évidente : il suffit de prendre $h = f_0$.

Soit $(i_0 , i_1) = i$ le morphisme canonique

$$(X_0 , \Phi_0) \to (U , \mathcal{H}_U) .$$

$f \circ i = 0$, car $f_0 \in \mathcal{N}(f_0 , F)$; donc, si u se factorise à travers i , $f \circ u = 0$.

Réciproquement, si $f \circ u = 0$, $u_1(U' , G)$ se factorise à travers $i_1(U' , G)$ (car $u_1(U' , G)\ j(G) = 0$).

$$0 \to \mathcal{N}(f_0/U' , G) \xrightarrow{j(G)} \mathcal{H}(U' , G) \xrightarrow{i_1(U' , G)} (i_{0*}\ \Phi_0)(U' , G) \to 0$$

$$u_1(U' , G) \searrow \qquad \swarrow \tilde{g}_1(U' , G)$$

$$(u_{0*}\ \Phi)(U' , G)$$

$$u_1(U' , G) = \tilde{g}_1(U' , G)\ i_1(U' , G) .$$

D'autre part, $f \circ u = 0$ entraîne $f_0 \circ u_0 = 0$, donc

$$u_0 = i_0 \circ g_0 , \qquad g_0 : X \to X_0 .$$

On peut donc écrire $\tilde{g}_1(U' , G) = i'_{0*}\ g_1(U' , G)$, et obtenir un morphisme

$$g_1(U' , G) : \Phi_0(U' , G) \to (g_{0*}\ \Phi)(U' , G) .$$

Pour un ouvert W de G , le faisceau $\Phi(W)$ étant l'image dans $\Phi(G)$ du sous-faisceau $\mathcal{K}(W)$ de $\mathcal{K}(G)$ par $i_1(G)$, il en résulte que $u_1(U' , W)$ se factorise aussi à travers $i_1(U' , W)$. Les morphismes $g_1(U' , W)$ caractérisent un morphisme unique $(g_0 , g_1) = g$ vérifiant $u = i \circ g$.

COROLLAIRE 4. - Tout modèle $\mu(U , F , f)$ est un noyau de la double flèche $U \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} F$ dans la catégorie des e. a. b.

3. Propriétés générales de la catégorie des espaces analytiques banachiques.

(a) Sous-espaces analytiques banachiques.

Un sous-espace analytique banachique de (X , Φ) est un e. a. b. (X' , Φ') , tel qu'il existe un morphisme $j = (j_0 , j_1) : (X' , \Phi') \to (X , \Phi)$ tel que j_0 soit l'injection canonique d'un sous-espace X' de X dans X , et que, pour tout espace de Banach G , le morphisme

$$j_1(G) : (j_0)^* \Phi(G) \to \Phi'(G)$$

fasse de $\Phi'(G)$ un quotient de $(j_0)^* \Phi(G)$ (j est alors un monomorphisme).

(b) Produits finis.

Cas des modèles lisses. - Soient deux modèles lisses U' et U" , (X , Φ) un e. a. b. quelconque :

$$\mathrm{Mor}(X , U' \times U") = \Phi(X , U' \times U") = \Phi(X , U') \times \Phi(X , U") .$$

Ceci montre que $U' \times U"$ est le produit des modèles lisses.

Cas de deux modèles $\mu(U' , f' , F')$ et $\mu(U" , f" , F")$. - Leur produit est $\mu(U' \times U" , f' \times f" , F' \times F")$. En effet,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mor}(X , \mu(U' \times U" , f' \times f") , F' \times F") \\
&\qquad = \{\varphi , \ \varphi \in \mathrm{Mor}(X , U' \times U") , \ (f' \times f")\varphi = 0\} \qquad \text{(prop. 3)} \\
&\qquad = \{(\varphi_1 , \varphi_2) \in \mathrm{Mor}(X , U') \times \mathrm{Mor}(X , U") , \ f' \circ \varphi_1 = f"\varphi_2 = 0\} \\
&\qquad = \mathrm{Mor}(X , \mu(U' , f' , F')) \times \mathrm{Mor}(X , \mu(U" , f" , F")) .
\end{aligned}$$

Cas de deux e. a. b. quelconques X et Y . - Il suffit de considérer des recouvrements de X et Y par des ouverts X_i et Y_j , (X_i , Φ_i) et (Y_j , Φ_j) étant isomorphes à des modèles ($\Phi_i = i^* \Phi$ ou $i : X_i \to X$) . On transporte la structure d'e. a. b. du produit des modèles sur $X_i \times Y_j$ (les espaces sous-jacents

étant homéomorphes). Les structures d'e. a. b. ainsi définies localement se recollent, ce qui permet de définir sur $X \times Y$ une structure d'e. a. b. qui vérifie la propriété du produit.

(c) Noyaux de doubles flèches.

Soient u et v deux morphismes de X dans X_1. Un noyau de la double flèche (u , v) est un sous-espace analytique banachique X' de X, tel que, pour tout e. a. b. Y,

$$\mathrm{Mor}(Y , X') = \{h , \ h \in \mathrm{Mor}(Y , X) u_0 h = v_0 h\} .$$

Construction. - On suppose que $X = \mu(U , F , f)$, $X_1 = \mu(U_1 , F_1 , f_1)$, et que u et v se prolongent en des applications analytiques de U dans E_1. D'après la proposition 3, $X' = \mu(U , F \times E_1 , (f , v - u))$ répond à la question.

Cas général. - On construit X' localement.

La catégorie des e. a. b., admettant des noyaux de double flèche et des produits finis, admet des produits fibrés et des limites projectives finies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Some applications of the new theory of Banach analytic spaces, J. London math. Soc., t. 41, 1966, p. 70-78.

[2] CARTAN (Henri). - Thèse de Douady, Séminaire Bourbaki, t. 18, 1965/66, n° 296, 16 p.

[3] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, fasc. 1, p. 1-95 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).