Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Catherine Doléans

Désintégration des mesures

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 3 (1964), exp. n° 8, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964__3__A5_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
3e année, 1963/64, n° 8

11 juin 1964

DÉSINTÉGRATION DES MESURES

par Mlle Catherine DOLÉANS

(d'après les travaux de A. et C. IONESCU TULCEA [2])

Soient donnés :

Z et B : deux espaces localement compacts,

μ : une mesure de Radon positive sur Z ,

p : une application μ-propre de Z dans B ,

α : une mesure de Radon positive sur B , telle que

$$\nu = p(\mu) = \psi.\alpha$$

pour une fonction ψ localement α-intégrable.

Le problème est de trouver une application

$$\lambda : b \to \lambda_b$$

de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$ (ensemble des mesures de Radon positives sur Z) telle que

(i) $\int_Z g(f \circ p)\, d\mu = \int_B f \langle g , \lambda \rangle\, d\alpha \quad \forall f \in K(B) , \quad \forall g \in K(Z)$

(λ devant être telle que la deuxième intégrale existe)

(ii) $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ localement α-presque partout, et vérifiant en plus dans certains cas

(iii) λ_b est concentrée sur $p^{-1}(\{b\})$ localement α-presque partout.

On verra que si α est non nulle, il existe toujours une application λ vérifiant (i) et (ii).

Pour la propriété (iii), il faudra supposer l'existence d'un relèvement fort pour B.

1. Notations.

Si Z est un espace localement compact, et μ une mesure de Radon positive sur Z , $\mu \neq 0$, on notera :

$M_{\underset{\sim}{R}}^{\infty}(Z , \mu)$: l'algèbre de Banach des fonctions de Z dans $\underset{\sim}{R}$ bornées, et μ-mesurables, munies de la norme

$$f \to \|f\|_\infty = \sup_{z \in Z} |f(z)| \ ;$$

$C_R^\infty(Z , \mu)$: la sous-algèbre de $M_R^\infty(Z , \mu)$ formée des fonctions continues, bornées de Z dans $\underset{\sim}{R}$;

$K(Z)$: la sous-algèbre de $C_R^\infty(Z , \mu)$ formée des fonctions continues, à support compact.

$$f \equiv g \iff f = g \text{ localement presque partout pour } \mu \ .$$

Les autres notations : $\mathcal{L}_R^1$, $\mathcal{L}_R^{-1}$, $\mathcal{J}^*$..., seront celles utilisées dans BOURBAKI. [1]

Si $f \in \mathcal{L}_R^{-1}$, on notera par $\tilde{f}$ sa classe dans L_R^1

2. Propriété de relèvement.

Soit $T : f \to T_f$ une application de $M_R^\infty(Z , \mu)$ dans $M_R^\infty(Z , \mu)$, et considérons les propriétés suivantes

(1) $T_f \equiv f$,
(2) $f \equiv g \implies T_f = T_g$,
(3) $T_1 = 1$,
(4) $f \geqslant 0 \implies T_f \geqslant 0$,
(5) $T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g$, $\alpha , \beta \in \underset{\sim}{R}$,
(6) $T_{fg} = T_f T_g$,
(7) $T_f = f$, $\forall f \in C_R^\infty(Z)$.

T sera un relèvement linéaire s'il vérifie (1) - (5).
T sera un relèvement linéaire fort s'il vérifie (1) - (5), et (7).
T sera un relèvement s'il vérifie (1) - (6).
T sera un relèvement fort s'il vérifie (1) - (7).

Considérons $T(\mu)$, tribu des ensembles μ-mesurables avec la relation d'équivalence

$$A \equiv B \iff A \triangleright B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ est localement } \mu\text{-négligeable.}$$

Si T est un relèvement de $M_R^\infty(Z , \mu)$ pour tout $A \in T(\mu)$, T_{φ_A} est la fonction caractéristique d'un ensemble de $T(\mu)$ que l'on notera $\rho_T(A)$, et ρ_T vérifie les propriétés :

(i) $\rho_T(A) \equiv A$,

(ii) $A \equiv B \implies \rho_T(A) = \rho_T(B)$,

(iii) $\rho_T(\emptyset) = \emptyset$, $\rho_T(Z) = Z$,

(iv) $\rho_T(A \cap B) = \rho_T(A) \cap \rho_T(B)$,

(v) $\rho_T(A \cup B) = \rho_T(A) \cup \rho_T(B)$.

Réciproquement, si une application ρ de $T(\mu)$ dans $T(\mu)$ vérifie (i) - (v), il existe un relèvement T et un seul de $M_R^\infty(Z , \mu)$ tel que $\rho = \rho_T$.

Dans la suite, on ne différenciera plus les deux notations T et ρ_T .

THÉORÈME 2.1. - Pour tout espace localement compact Z et toute mesure de Radon positive μ , non nulle, sur Z , il existe un relèvement de $M_R^\infty(Z , \mu)$. (IONESCU TULCEA [2].)

Dans la suite, on utilisera souvent le lemme suivant :

LEMME 2.1. - Si ρ est un relèvement de $M_R^\infty(Z , \mu)$, et si $\mathfrak{F}$ est un ensemble filtrant pour $\leqslant$ de fonctions de $M_R^\infty(Z , \mu)$ telles que

(2.1.1) $$f \geqslant 0 ,$$

et

(2.1.2) $$\rho(f) = f \quad \forall\, f \in \mathfrak{F} .$$

Alors $f_\infty = \sup_{f \in \mathfrak{F}} f$ est μ-mesurable, et pour toute mesure de Radon positive ν absolument continue relativement à μ , on a :

$$\overline{\int}^{*} f_\infty \, d\nu = \sup \overline{\int}^{*} f \, d\nu .$$

Si ν est absolument continue relativement à μ , on a $\nu = g.\mu$ avec g localement μ-intégrable et positive.

On peut se ramener au cas où g est borné, et on a alors $\nu = \rho(g).\mu$.

$\mathfrak{F}_g = \{f\rho(g) \ ; \ f \in \mathfrak{F}\}$ vérifie les conditions (2.1.1) et (2.1.2), et on est donc ramené au cas $\nu = \mu$.

Si $\nu = \mu$, pour tout $g , h \in M_R^\infty(Z , \mu)$, on a $\rho(\inf(g , h)) = \inf(\rho(g) , \rho(h))$, car

$$\rho(|f|)^2 = \rho(f.f) = [\rho(f)]^2$$

et par suite

$$|\rho(f)| = \rho(|f|) .$$

On peut donc supposer f_∞ borné, car sinon on considère, pour tout p entier,

$$\mathfrak{F}_p = \{\inf(f , p) , \quad f \in \mathfrak{F}\}$$

qui vérifie aussi les conditions (2.1.1) et (2.1.2), puis l'on fait tendre p vers $+\infty$.

Considérons donc le cas où f_∞ est borné. Pour tout compact $K \subset Z$, on a

$$f_\infty \varphi_{\rho(K)} = \sup_{\mathfrak{F}} f \varphi_{\rho(K)} ;$$

or $f \varphi_{\rho(K)} \in \bar{\mathcal{L}}^1_R$ pour tout $f \in \mathfrak{F}$, et f_∞ est borné, par suite

$$\mathfrak{F}_K = \{\tilde{f} \tilde{\varphi}_{\rho(K)} , \quad f \in \mathfrak{F}\}$$

a une borne supérieure $\tilde{g} \in L^1_R$, et $\mathfrak{F}_K$ converge dans L^1_R vers $\tilde{g}$.

On a alors

$$\rho(g) \geqslant \rho(f \varphi_{\rho(K)}) = f \varphi_{\rho(K)} \quad \forall \ f \in \mathfrak{F}$$

donc

$$\rho(g) \geqslant f_\infty \varphi_{\rho(K)} .$$

Soit d'autre part une suite f_n croissante d'éléments de $\mathfrak{F}$ tels que

$$f_n \varphi_{\rho(K)} \to g \quad \text{dans} \quad \bar{\mathcal{L}}^1_R .$$

On a

$$f_\infty \varphi_{\rho(K)} \geqslant \lim_n f_n \varphi_{\rho(K)} = g$$

localement presque partout. $f_\infty \varphi_{\rho(K)}$ est donc μ-mesurable, et

$$\sup_{f \in \mathfrak{F}} \int f \varphi_{\rho(K)} \, d\mu = \int g \, d\mu = \int f_\infty \varphi_{\rho(K)} \, d\mu .$$

Ceci étant vrai pour tout compact $K \subset Z$ (et $\rho(K) \equiv K$), on a

$$\overline{\int}^* f_\infty \, d\mu = \sup \overline{\int}^* f \, d\mu .$$

3. Propriété d'un relèvement fort.

PROPOSITION 3.1. - *Soit* $T : f \to T_f$ *un relèvement de* $M^\infty_R(Z , \mu)$; *alors*

T *relèvement fort* $\iff$ (3.1.1) $\rho_T(U) \supset U$, $\forall$ U ouvert de Z ,

$\iff$ (3.1.2) $\rho_T(F) \subset F$, $\forall$ F fermé de Z .

Les propriétés (3.1.1) et (3.1.2) se déduisent l'une de l'autre par dualité.

Soient T un relèvement fort, et U un ouvert de Z. Soit

$$F_U = \{f \in K(Z) \ , \ 0 \leqslant f \leqslant \varphi_U\} \ .$$

On a

$$\varphi_U = \sup_{F_U} f$$

d'où

$$T_{\varphi_U} \geqslant T_f = f \ , \ \forall \ f \in F_U$$

$$T_{\varphi_U} \geqslant \varphi_U \quad \text{et} \quad \rho_T(U) \supset U \ .$$

Réciproquement, supposons que $\rho_T(U) \supset U$ pour tout ouvert U de Z. Soit $g \geqslant 0$, $g \in C_R^\infty(Z \ , \ \mu)$ et

$$U_g = \{\alpha\varphi_U \ ; \ \alpha \geqslant 0 \ , \ U \ \text{ouvert de } Z \ , \ \alpha\varphi_U \leqslant g\} \ ;$$

on a

$$g = \sup_{U_g} \alpha\varphi_U$$

d'où

$$T_g \geqslant g \ .$$

Soient maintenant $f \in C_R^\infty(Z)$ et λ une constante telle que

$$\lambda + f \geqslant 0 \ ,$$

$$\lambda - f \geqslant 0 \ ;$$

on a

$$T_{\lambda+f} = \lambda + T_f \geqslant \lambda + f \ ,$$

$$T_{\lambda-f} = \lambda - T_f \geqslant \lambda - f \ ,$$

et donc

$$T_f = f \ .$$

4. Remarques sur les applications à valeurs dans un espace de mesures.

Soient B un espace localement compact,

α une mesure de Radon positive sur B ,

$C(B \ , \ \alpha)$ l'ensemble des familles localement dénombrables $K = (K_j)_{j \in J}$ de compacts disjoints tels que $E \setminus \bigcup_{j \in J} K_j$ soit localement α-négligeable.

PROPRIÉTÉS.

a. Si $(K_{j'})_{j'\in J'}$ et $(K_{j''})_{j''\in J''}$ sont deux familles de $C(B , \alpha)$, la famille $(K_{j'} \cap K_{j''})_{(j',j'')\in J'\times J''}$ est dans $C(B , \alpha)$.

b. Si α est non nulle, si T est un relèvement de $M_R^\infty(B , \alpha)$ et si $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$, il existe $(L_i)_{i\in I} \in C(B , \alpha)$ telle que tout L_i soit contenu dans un $\rho_T(K_j)$ pour un certain j .

Soient Z et B deux espaces localement compacts. Pour toute application λ $(b \to \lambda_b)$ de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$, et pour tout $g \in K(Z)$, on note $\langle g , \lambda\rangle$ l'application

$$b \to \langle g , \lambda_b\rangle$$

de B dans $\underset{\sim}{R}$.

DÉFINITION. - Si α est une mesure de Radon positive sur B , on note $F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ le cône des applications λ

$$\lambda : \ b \to \lambda_b$$

de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$, telles qu'il existe $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ pour laquelle

$$\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle \in M_R^\infty(B , \alpha) , \quad \forall\, j \in J , \quad \forall\, g \in K(Z) .$$

Remarque. - Si $\lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, $\langle g , \lambda\rangle$ est α-mesurable, $\forall\, g \in K(Z)$.

DÉFINITIONS.

1° Si $\alpha \neq 0$, si $T = \rho_T : f \to T_f$ est un relèvement de $M_R^\infty(B , \alpha)$ et si $\lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, on dit que $\rho_T[\lambda] = \lambda$ s'il existe $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ telle que

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g , \lambda\rangle , \quad \forall\, g \in K(Z) , \quad \forall\, j \in J$$

(ceci suppose $\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle \in M_R^\infty(B , \alpha)$).

2° Si λ' et $\lambda'' \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, on dit que $\lambda' \equiv \lambda''$ si

$$\langle g , \lambda'\rangle \equiv \langle g , \lambda''\rangle , \quad \forall\, g \in K(Z) .$$

PROPOSITION 4.2.

(4.2.1) $\forall\, \lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, il existe $\lambda' \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ tel que

$$\rho_T[\lambda] = \lambda \text{ et } \lambda' \equiv \lambda .$$

(4.2.2) Si λ' et $\lambda'' \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, si $\rho_T[\lambda'] = \lambda'$,

$$\rho_T[\lambda''] = \lambda'' \quad \text{et} \quad \lambda' \equiv \lambda''$$

alors λ'_b et λ''_b coïncident localement α-presque partout.

Démonstration.

(4.2.1). - Soit $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ telle que $\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle \in M_R^\infty(B , \alpha)$, $\forall j \in J$, $\forall g \in K(Z)$. Posons

$$\lambda'_b(g) = \begin{cases} \rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) & \text{si } b \in \rho_T(K_j) \\ 0 & \text{si } b \notin \bigcup_{j\in J} \rho_T(K_j) . \end{cases}$$

Pour $j' \neq j''$, on a

$$\rho_T(K_{j'}) \cap \rho_T(K_{j''}) = \rho_T(K_{j'} \cap K_{j''}) = \rho_T(\emptyset) = \emptyset .$$

λ'_b est donc bien défini. Les propriétés de relèvement de T donnent $\lambda'_b \in \mathfrak{M}^+(Z)$.

Soit $(L_i)_{i\in I} \in C(B , \alpha)$ tel que, pour tout i , il existe un $j \in J$ pour lequel $L_i \subset \rho_T(K_j)$. Soient i et j ainsi choisis. On a

$$\varphi_{L_i}\langle g , \lambda'\rangle = \varphi_{L_i}\ \rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) \in M_R^\infty(B , \alpha)$$

et ceci $\forall i \in I$, $\forall g \in K(Z)$. Donc $\lambda' \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$.

On a de plus

$$\varphi_{L_i}\langle g , \lambda'\rangle \equiv \varphi_{L_i}\ \varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle \equiv \varphi_{L_i}\langle g , \lambda\rangle , \quad \forall i \in I , \quad \forall g \in K(Z)$$

donc

$$\lambda \equiv \lambda' .$$

Soient i et j tels que $L_i \subset \rho_T(K_j)$. On a

$$\rho_T(\varphi_{L_i}\langle g , \lambda'\rangle) = \rho_T(\varphi_{L_i}\ \varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(L_i)}\ \rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle)$$

mais on a $\rho_T(L_i) \subset \rho_T(K_j)$, donc

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \langle g , \lambda'\rangle \quad \text{sur} \quad \rho_T(L_i)$$

et

$$\lambda' = \rho_T[\lambda'] .$$

(4.2.2). - Soient $(K'_{j'})_{j' \in J'} \in C(B , \alpha)$ et $(K''_{j''})_{j'' \in J''} \in C(B , \alpha)$ telles que

$$\rho_T(\varphi_{K'_{j'}}\langle g , \lambda' \rangle) = \varphi_{\rho_T(K'_{j'})}\langle g , \lambda' \rangle , \quad \forall\, j' \in J' , \ \forall\, g \in K(Z)$$

$$\rho_T(\varphi_{K''_{j''}}\langle g , \lambda'' \rangle) = \varphi_{\rho_T(K''_{j''})}\langle g , \lambda'' \rangle , \quad \forall\, j'' \in J'' .$$

On a alors, pour tout j' , j'' et $g \in K(Z)$,

$$\varphi_{\rho_T(K'_{j'} \cap K''_{j''})}\langle g , \lambda' \rangle = \rho_T(\varphi_{K'_{j'} \cap K''_{j''}}\langle g , \lambda' \rangle)$$

$$= \rho_T(\varphi_{K'_{j'} \cap K''_{j''}}\langle g , \lambda'' \rangle) = \varphi_{\rho_T(K'_{j'} \cap K''_{j''})}\langle g , \lambda'' \rangle$$

donc $\lambda'_b = \lambda''_b$, $\forall\, b \in \rho_T(K'_{j'} \cap K''_{j''})$, et par suite

$$\lambda'_b = \lambda''_b \quad \text{localement } \alpha\text{-presque-partout.}$$

DÉFINITION. - Soit $F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ le cône des applications

$$\lambda : \ b \to \lambda_b$$

de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$ telles que

(*) $\langle g , \lambda \rangle$ soit α-mesurable, $\forall\, g \in K(Z)$,

(**) $b \to \|\lambda_b\|$ soit une application bornée.

On a

$$F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha) \subset F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha) .$$

Supposons $\alpha \neq 0$, et soit T un relèvement de $M_R^\infty(B , \alpha)$:

- Si $\lambda \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$, on dit que

$$\rho_T(\lambda) = \lambda ;$$

- Si $\rho_T(\langle g , \lambda \rangle) = \langle g , \lambda \rangle$, $\forall\, g \in K(Z)$, $\lambda \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ et $\rho_T(\lambda) = \lambda$, on a aussi

$$\rho_T[\lambda] = \lambda .$$

PROPOSITION 4.3.

(4.3.1) $\forall\, \lambda \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ il existe $\lambda' \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ tel que $\rho_T(\lambda') = \lambda'$ et $\lambda' \equiv \lambda$.

Démonstration analogue à celle de (4.2.1).

PROPOSITION 4.4. - Soit $\lambda \in F^{\infty}(B , \mathfrak{M}^{+}(Z) , \alpha)$ telle que $\rho_T(\lambda) = \lambda$. Soit K compact $\subset Z$ et soit

$$\lambda_K : \ b \to \lambda_{K,b}$$

définie par $\lambda_{K,b} = (\lambda_b)_K$, $\forall\ b \in B$, alors

$$\lambda_K \in F^{\infty}(B , \mathfrak{M}^{+}(K) , \alpha)$$

et si $\lambda'_K : \ (b \to \lambda'_{K,b}) \in F^{\infty}(B , \mathfrak{M}^{+}(K) , \alpha)$ est tel que

(4.4.1) $$\rho_T(\lambda'_K) = \lambda'_K$$

(4.4.2) $$\lambda'_K \equiv \lambda_K ,$$

on a $\lambda'_{K,b} = \lambda_{K,b}$ localement α-presque-partout.

Montrons d'abord que $\lambda_K \in F^{\infty}(B , \mathfrak{M}^{+}(K) , \alpha)$.

Pour $g \in K^{+}(K)$ et $b \in B$, on a

$$\langle g , \lambda_{K,b} \rangle = \langle \varphi_K\, h , \lambda_b \rangle \quad \text{si} \quad h \in K_{+}(Z) \quad \text{et} \quad h/K = g$$

mais

$$\langle \varphi_K\, h , \lambda_b \rangle = \inf_{\substack{f \in K(Z) \\ f \geqslant \varphi_K}} \langle fh , \lambda_b \rangle$$

et

$$\rho_T(\langle fh , \lambda_b \rangle) = \langle fh , \lambda_b \rangle .$$

Donc, en vertu du lemme 1, $\langle g , \lambda_K \rangle$ est α-mesurable. Ceci se généralise à tout $g \in K(Z)$.

D'autre part, on a $\|\lambda_{K,b}\| \leqslant \|\lambda_b\|$, donc

$$\lambda_K \in F^{\infty}(B , \mathfrak{M}^{+}(K) , \alpha) .$$

Soit maintenant $g \in K^{+}(K)$. On a

$$\langle g , \lambda'_K \rangle = \rho_T(\langle g , \lambda'_K \rangle) = \rho_T(\langle g , \lambda_K \rangle)$$

mais, $\forall\ b \in B$,

$$\langle g , \lambda_{K,b} \rangle = \inf_{\substack{f \in K(Z) \\ f \geqslant \varphi_K}} \langle fh , \lambda_b \rangle \qquad \text{où} \quad h \in K^{+}(Z) \quad \text{et} \quad h/K = g ,$$

donc

$$\rho_T(\langle g , \lambda_K \rangle) \leqslant \inf_{\substack{f \in K(Z) \\ f \geqslant \varphi_K}} \rho_T(\langle fh , \lambda_b \rangle) = \inf \langle fh , \lambda_b \rangle = \langle g , \lambda_{K,b} \rangle$$

et par suite $\lambda'_{K,b} \leq \lambda_{K,b}$, $\forall\, b \in B$, mais on a

$$\langle 1 \ , \ \lambda'_{K,b} \rangle \equiv \langle 1 \ , \ \lambda_{K,b} \rangle$$

λ'_K et λ_K coïncident donc localement α-presque-partout.

5. Désintégration des mesures.

Soient Z et B deux espaces localement compacts,
$\alpha \neq 0$ une mesure de Radon positive sur B ,
T un relèvement de $M_R^\infty(B \ , \ \alpha)$.

DÉFINITION. - *On dit qu'une application* λ

$$\lambda : \ b \to \lambda_b$$

de B *dans* $\mathcal{M}^+(Z)$ *est appropriée relativement à* $(\alpha \ , \ T)$ *si*

(A_1) $\qquad \lambda \in F(B \ , \ \mathcal{M}^+(Z) \ , \ \alpha)$ *et* $\rho_T[\lambda] = \lambda$,

(A_2) $\langle g \ , \ \lambda \rangle$ *est essentiellement* α-*intégrable*, $\forall\, g \in K(Z)$.

$\mu = \int_B \lambda_b \, d\alpha(b)$ est alors une mesure de Radon positive sur Z .

Remarque. - Si $\alpha \neq 0$, et si T est un relèvement fort de $M_R^\infty(B \ , \ \alpha)$, toute application α-adéquate de B dans $\mathcal{M}^+(Z)$ est appropriée relativement à $(\alpha \ , \ T)$.

PROPOSITION 5.1. - *Soit* $\lambda : \ b \to \lambda_b$ *une application de* B *dans* $\mathcal{M}^+(Z)$ *appropriée relativement à* $(\alpha \ , \ T)$ *et soit*

$$\mu = \int \lambda_b \, d\alpha(b) \ .$$

Si une fonction $f : Z \to \underline{R}$ *est* μ-*intégrable, il existe* $H \subset B$ *localement* α-*négligeable tel que* $\forall\, b \notin H$, f *soit* λ_b *intégrable* ;

$b \to \int_Z f \, d\lambda_b$ *est essentiellement* α-*intégrable et*

$$\int_Z f \, d\mu = \int_B d\alpha(b) \int_Z f \, d\lambda_b \ .$$

On se limite d'abord au cas où f est semi-continue inférieurement, positive. Le passage à f μ-intégrable quelconque se fait comme dans BOURBAKI ([1], chap. V, p. 21-23).

f est semi-continue inférieurement, et $(K_j)_{j \in J} \in C(B \ , \ \alpha)$ est tel que

$$\rho_T(\varphi_{K_j} \langle g \ , \ \lambda \rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)} \langle g \ , \ \lambda \rangle \ .$$

Soit

$$f : Z \to R_+ \quad \text{semi-continue inférieurement,}$$

et

$$F_f = \{g \in K(Z) \ ; \ 0 \leqslant g \leqslant f\} .$$

Soit $F(J)$: l'ensemble des parties finies de J . Pour tout $H \in F(J)$,

$$K_H = \bigcup_{j \in H} K_j ,$$

on a

$$\int_Z^* f(Z)\, d\lambda_b(Z) = \sup_{\substack{g \in F_f \\ H \in F(J)}} \rho_T(\varphi_{K_H}\langle g , \lambda\rangle)(b)$$

pour tout $b \in \bigcup_{j \in J} \rho_T(K_j)$, et d'après le lemme 1, on a alors

$$\overline{\int}_B^* d\alpha(b) \int_Z^* f(Z)\, d\lambda_b(Z) = \sup_{\substack{g \in F_f \\ H \in F(J)}} \int_B \varphi_{\rho_T(K_H)}\langle g , \lambda\rangle \, d\alpha$$

$$= \sup_{g \in F_f} \int_B \langle g , \lambda\rangle \, d\alpha = \sup_{g \in F_f} \int g \, d\mu = \int_Z^* f \, d\mu .$$

COROLLAIRE. - Si $A \subset Z$ est μ-négligeable, il existe $H \subset B$ localement α-négligeable tel que A soit λ_b négligeable pour tout $b \notin H$.

THÉORÈME 5.2. - Soient Z et B deux espaces localement compacts,

μ : mesure de Radon, positive sur Z ,

p : application μ-propre de Z dans B ,

$\nu = p(\mu)$,

α une mesure de Radon positive sur B telle que $\nu = \psi \cdot \alpha$,

ψ étant localement α-intégrable.

Supposons α non nulle, et soit $T : f \to T_f$ un relèvement de $M_R^\infty(B , \alpha)$. Alors

(5.2.1) il existe une application λ

$$\lambda : b \to \lambda_b$$

de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$ appropriée relativement à (α , T) telle que

(i) $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ localement α-presque-partout.

(ii) $\int_Z g(f \circ p)\, d\mu = \int_B f\langle g , \lambda\rangle \, d\alpha$, $\forall f \in K(B)$, $\forall g \in K(Z)$.

(5.2.2) De plus, si T est un relèvement fort, λ_b est concentré sur $p^{-1}(\{b\})$ localement α-presque-partout.

(5.2.3) Si $\lambda' : b \to \lambda'_b$, $\lambda'' : b \to \lambda''_b$ sont deux applications de B dans $\mathfrak{M}^+(Z)$

appropriées relativement à (α , T) et telles que

(j) λ'_b et λ''_b sont concentrées sur $p^{-1}(\{b\})$ localement α-presque-partout,

(jj) $\mu = \int_B \lambda'_b \, d\alpha(b) = \int_B \lambda''_b \, d\alpha(b)$,

alors $\lambda'_b = \lambda''_b$ localement α-presque-partout.

(5.2.1) Existence de λ . - Pour tout $g \in K(Z)$, considérons $\mu_g = p(g\cdot\mu)$. On a

$$|\int f \, d\mu_g| = |\int (f \circ p)\, g \, d\mu| \leqslant \|g\|_\infty \int |f \circ p| \, d\mu = \|g\|_\infty \int |f| \, d\nu .$$

Donc il existe h_g localement ν-intégrable telle que

$$\mu_g = h_g \cdot \nu$$

(on peut choisir h_g telle que $\|h_g\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$, et $h_g \geqslant 0$ si $g \geqslant 0$).

Soit ρ un relèvement de $M_R^\infty(B , \nu)$. On a $\rho(h_g)(b) = \langle g , \delta_b \rangle$ avec δ_b application linéaire positive de $K(Z)$ dans $\underset{\sim}{R}$.

$$|\langle g , \delta_b \rangle| \leqslant \|g\|_\infty$$

$$\langle g , \delta_b \rangle \text{ , } \nu\text{-mesurable } \forall\, g \in K(Z)$$

et
$$\int_Z g(f \circ p) \, d\mu = \int_B f \langle g , \delta_b \rangle \, d\nu(b)$$

par suite $\delta \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \nu)$.

Posons $\gamma_b = \psi(b) \, \delta_b$. $\langle g , \gamma \rangle = \psi \langle g , \delta \rangle$ est α-mesurable $\forall\, g \in K(Z)$ et $\gamma \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$. Il existe donc $\lambda : b \to \lambda_b$, $\lambda \in F(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ telle que $\gamma \equiv \lambda$ et $\rho_T[\lambda] = \lambda$. On a alors

$$\int_Z g(f \circ p) \, d\mu = \int_B f \langle g , \delta \rangle \, d\alpha \quad \forall\, g \in K(Z) , \quad \forall\, f \in K(B) .$$

De plus, on a

$$(\alpha) \qquad \mu = \int_B \lambda_b \, d\alpha(b)$$

car, si $g \in K_+(Z)$ et $F_1 = \{f \in K(B) , \ 0 \leqslant f \leqslant 1\}$

$$\int_B \langle g , \lambda \rangle \, d\alpha = \sup_{f \in F_1} \int_B f \langle g , \lambda \rangle \, d\alpha = \sup_{F_1} \int_Z g(f \circ p) \, d\mu$$

$$= \sup_{F_1} \int_B f \, dp(g\cdot\mu) = \int_Z g \cdot d\mu .$$

$$(\beta) \qquad \int_Z g(f \circ p) \, d\mu = \int_B g(b) \, d\alpha(b) \int_Z g \, d\lambda_b$$

pour toute

$$f : B \to \underset{\sim}{R} \quad \alpha\text{-mesurable bornée à support compact}$$

et toute

$$g : Z \to \underset{\sim}{R} \quad \mu\text{-mesurable bornée à support compact.}$$

(On utilise pour cela la proposition 5.1, et on approche f et g par des fonctions de $K(B)$ et $K(Z)$.)

Montrons que $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ localement α-presque-partout.

Soit $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ telle que

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g , \lambda\rangle$$

et $\forall H \in F(J)$ (ensemble des parties finies de J), soit $K_H = \bigcup_{j\in J} K_j$.

Soit $f \in K_+(B)$ et $F_1 = \{g \in K(Z) , 0 \leq g \leq 1\}$; en appliquant le lemme 2.1 et la propriété (β), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_B f(b)\, \lambda_b^*(1)\, d\alpha(b) &= \sup_{\substack{g\in F_1 \\ H\in F(J)}} \int_B f\varphi_{\rho_T(K_H)}\langle g , \lambda\rangle \, d\alpha \\
&= \sup_{g,H} \int g\, (f\varphi_{K_H} \circ p)\, d\mu \\
&= \sup_{H\in F(J)} \int_Z (f\varphi_{K_H}) \circ p \, d\mu \\
&= \int_B f \, dp(\mu) = \int_B f.\psi \, d\alpha
\end{aligned}$$

et ceci $\forall f \in K_+(B)$; donc $\|\lambda_b\| = \psi(b)$ localement α-presque-partout.

(5.2.3). Unicité de λ . - Soient λ' et λ'' deux applications appropriées relativement à (α , T) vérifiant (j) et (jj).

Soit $A = \{b \in B , \lambda'_b$ non concentré sur $p^{-1}(\{b\})\}$. A est localement α-négligeable.

$\forall f \in K(B)$ et $\forall g \in K(Z)$, $g(f \circ p)$ est μ-intégrable puisqu'à support compact, il existe donc $A_{fg} \subset B$, localement α-négligeable tel que $g(f \circ p)$ soit λ'_b-intégrable pour tout $b \notin A_{fg}$, et l'on a

$$\int_Z g(f \circ p)\, d\mu = \int_B d\alpha(b) \int_Z g(f \circ p)\, d\lambda'_b .$$

Si $b \notin A \cup A_{fg}$,

$$\int_Z g(f \circ p)\, d\lambda'_b = \int_Z \varphi_{p^{-1}(\{b\})}(z)\, g(z)\, f(p(z))\, d\lambda'_b(z) = f(b) \int_Z g(z)\, d\lambda'_b(z) ,$$

donc $\forall\, f \in K(B)$ et $\forall\, g \in K(Z)$,

$$\int_B f\langle g , \lambda' \rangle\, d\alpha = \int_B d\alpha(b) \int_Z g(f \circ p)\, d\lambda'_b = \int_Z g(f \circ p)\, d\mu$$

de même,

$$\int_B f\langle g , \lambda'' \rangle\, d\alpha = \int_Z g(f \circ p)\, d\mu$$

donc

$$\langle g , \lambda' \rangle \equiv \langle g.\lambda'' \rangle , \quad \forall\, g \in K(Z)$$

et la proposition (4.2.2) entraîne

$$\lambda'_b = \lambda''_b \text{ localement } \alpha\text{-presque-partout.}$$

(5.2.2) Il reste à montrer que <u>si</u> T <u>est un relèvement fort</u> λ_b <u>est concentré sur</u> $p^{-1}(\{b\})$ <u>localement</u> α-<u>presque-partout</u>.

(A) <u>Supposons d'abord</u> :

T <u>est un relèvement fort de</u> $M_R^\infty(B , \alpha)$

Z <u>est compact</u>

p <u>est continue</u>

$\lambda \in F^\infty(B , \mathcal{M}^+(Z) , \alpha)$ <u>et</u> $\rho_T(\lambda) = \lambda$.

Soient $b_0 \in B$, et $\mathcal{V}(b_0)$ l'ensemble des voisinages de b_0 . On a

$$\bigcap_{\substack{V = \overset{\circ}{V} \\ V \in \mathcal{V}(b_0)}} p^{-1}(V) = p^{-1}\Big(\bigcap_{\substack{V = \overset{\circ}{V} \\ V \in \mathcal{V}(b_0)}} V \Big) = p^{-1}(\{b_0\}) .$$

Pour tout voisinage W de $p^{-1}(\{b_0\})$, il existe donc $\mathbf{V} \in \mathcal{V}(b_0)$, $V = \overset{\circ}{V}$, tel que $p^{-1}(V) \subset W$.

Si $g \in K(Z)$ et si $\operatorname{supp} g \cap p^{-1}(\{b_0\}) = \emptyset$, il existe donc $V = \overset{\circ}{V}$, $V \in \mathcal{V}(b_0)$ tel que $\operatorname{supp} g \cap p^{-1}(V) = \emptyset$ si $f \in K(B)$ est telle que $\operatorname{supp} f \subset V$.

On a

$$f(p(z)) = 0 , \quad \forall\, z \in p^{-1}(V)$$

d'où

$$\int_Z g(f \circ p)\, d\mu = \int_B f\varphi_V\langle g , \lambda \rangle\, d\alpha = 0$$

d'où

$$\varphi_V\langle g , \lambda \rangle \equiv 0$$

et

$$\varphi_{\rho_T(V)}\langle g , \lambda \rangle = \rho_T(\varphi_V\langle g , \lambda \rangle) = 0 .$$

T étant un relèvement fort, on a $\rho_T(V) \supset V \ni b_0$, d'où $\langle g , b_0 \rangle = 0$, $\forall\, g \in K(Z)$ telle que $\operatorname{supp} g \cap p^{-1}(\{b_0\}) = \emptyset$, donc on a

$$\operatorname{supp} \lambda_b \subset p^{-1}(\{b\}) \ , \quad \forall\, b \in B \ .$$

(B) Prenons maintenant Z , B , μ , α , p , λ comme dans (5.2.1), et supposons que T est un relèvement fort.

(a) Soit $(K_j)_{j\in J} \in C(B , \alpha)$ telle que

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g , \lambda\rangle \ , \quad \forall\, g \in K(Z) \ , \quad \forall\, j \in J \ .$$

On peut supposer que ψ/K_j est borné, $\forall\, j \in J$ et que

$$\|\lambda_b\| = \psi(b) \ , \quad \forall\, b \in K_j$$

pour tout $j \in J$, et $b \in B$, soit $\lambda_b^j = \varphi_{\rho_T(K_j)}(b)\ \lambda_b$.

T étant un relèvement fort, on a $\rho_T(K_j) \subset K_j$, $b \to \|\lambda_b^j\|$ est donc une application bornée, et il suffit de montrer que, pour tout $j \in J$, λ_b^j est concentré sur $p^{-1}(\{b\})$, sauf pour $b \in H_j$ localement α-négligeable.

On aura alors $H_j \subset \rho_T(K_j) \subset K_j$ et $H_\infty = \bigcup_j H_j$ sera localement α-négligeable, et pour tout $b \in \bigcup_{j\in J} \rho_T(K_j) \setminus H_\infty$, $\lambda_b = \lambda_b^j$ sera concentré sur $p^{-1}(\{b\})$.

(b) Soit donc $j \in J$ fixé. On a

$$\rho_T(\varphi_{K_j}\langle g , \lambda\rangle) = \langle g , \lambda^j\rangle \ , \quad \forall\, g \in K(Z) \ ,$$

et $b \to \|\lambda_b^j\|$ borné. Donc $\lambda^j \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(Z) , \alpha)$ et $\rho_T(\lambda_j) = \lambda_j$. D'autre part $\langle g , \lambda^j\rangle$ est essentiellement α-intégrable pour tout $g \in K(Z)$. λ^j est donc appropriée relativement à (α , T) , et la propriété (β) entraîne

$$\int_Z g(f\varphi_{K_j}) \circ p \, d\mu = \int_B f\varphi_{\rho_T(K_j)}\langle g , \lambda\rangle \, d\alpha \ , \quad \forall\, g \in K(Z) \ , \quad \forall\, f \in K(B) \ .$$

Soit $\mu_j = (\varphi_{K_j} \circ p).\mu$, on a $\mu_j \leqslant \mu$, μ_j bornée et

$$\int_Z g(f \circ p) \, d\mu_j = \int f\langle g , \lambda^j\rangle \, d\alpha \ .$$

(c) μ_j étant bornée, et $\mu_j \leqslant \mu$, il existe $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(Z , \mu_j)$ telle que $p_n = p/L_n$ soit continue $\forall\, n$.

Soit $\lambda_{L_n}^j : b \to \lambda_{L_n,b}^j$, $\lambda_{L_n}^j \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(L_n) , \alpha)$, définie par

$$\lambda^j_{L_n,b} = (\lambda^j_b)_{L_n} , \quad \forall\, b \in B .$$

Les propositions 4.3 et 4.4 entraînent l'existence de $\gamma_n \in F^\infty(B , \mathfrak{M}^+(L_n) , \alpha)$ telle que $\rho_T(\gamma_n) = \gamma_n$ et $\lambda^j_{L_n,b} = \gamma_{n,b}$ pour tout $b \notin D_n$, D_n étant localement α-négligeable .

La propriété (β) appliquée à $(Z , B , \mu_j , p , \alpha , T , \lambda^j)$ entraîne

$$\int_{L_n} g(f \circ p_n)\, d(\mu_j)_{L_n} = \int_Z g'(f \circ p)\, d\mu_j = \int_B f(b)\, d\alpha(b) \int_Z g\, d\lambda^j_b = \int_B f \langle g , \lambda_n \rangle d\alpha$$

$\forall\, g \in K(L_n)$, $\forall\, g \in K(B)$ (g' définie par $g' = g$ sur L_n , $g'(Z) = 0$, $\forall\, Z \notin L_n$).

Le résultat de (A), appliqué à $(L_n , B , (\mu_j)_{L_n} , p_n , \alpha , T , \gamma_n)$ entraîne

$$\operatorname{supp} \gamma_{n,b} \subset p_n^{-1}(\{b\}) , \ \forall\, b \in B \implies \operatorname{supp} \lambda^j_{L_n,b} \subset p_n^{-1}(\{b\}) , \ \forall\, b \notin D_n .$$

Si U_n est l'injection canonique de $L_n \to Z$, on a

$$U_n(\lambda^j_{L_n,b}) = \varphi_{L_n} \cdot \lambda^j_b , \ \forall\, b \in B \implies \operatorname{supp}(\varphi_{L_n} \lambda^j_b) \subset p_n^{-1}(\{b\}) \subset p^{-1}(\{b\}) , \ \forall\, b \notin D_n .$$

(d) La famille $(\varphi_{L_n} \lambda^j_b)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\forall\, b \in B$. $Z \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$ est μ_j-négligeable, donc λ^j_b-négligeable localement α-presque-partout.

Par suite, $\lambda^j_b = \sum_n \varphi_{L_n} \lambda^j_b$ localement α-presque-partout et λ^j_b est concentré sur $p^{-1}(\{b\})$ localement α-presque-partout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 5. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1244 ; Bourbaki, 21).

[2] IONESCU TULCEA (A.) and IONESCU TULCEA (C.). - On the lifting property, I., J. math. Anal. and Appl., t. 3, 1961, p. 537-546.