C. CHEVALLEY

Le normalisateur d'un groupe de Borel

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. nº 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A9_0>

Séminaire C. CHEVALLEY
E.N.S., 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 9

LE NORMALISATEUR D'UN GROUPE DE BOREL.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 4.2.1957)

1.- Un lemme de dévissage.

LEMME 1.- Tout automorphisme du groupe additif K (considéré comme groupe algébrique) est de la forme $x \to cx$, c étant un élément $\neq 0$ de K.

Soit σ un automorphisme. Si θ est l'application identique $K \to K$, $\theta \circ \sigma$ est une fonction numérique partout définie qui n'a qu'un seul zéro, à savoir 0, qui est d'ordre 1 ; une telle fonction est de la forme $c\,\theta$.

LEMME 2.- Soit G un groupe algébrique résoluble ; soient G_u l'ensemble des éléments unipotents de G et T un tore maximal de G. Soient A et B des sous-groupes fermés connexes de G_u dont les normalisateurs contiennent T tels que $A \subset B$. Il existe une suite $(H_i)_{0 \leq i \leq m}$ de sous-groupes fermés connexes de G_u qui possède les propriétés suivantes : $U_o = \{e\}$; pour $1 \leq i \leq m$, le normalisateur de H_{i-1} contient H_i et T ; il existe un homomorphisme rationnel θ_i de H_i sur le groupe additif K de noyau H_{i-1} qui définit par passage aux quotients un isomorphisme de H_i/H_{i-1} sur K ; on a, pour $s \in H_i$, $t \in T$, $\theta_i(tst^{-1}) = \chi_i(t)\ \theta_i(s)$, χ_i étant un caractère rationnel de T ; H_i est engendré par H_{i-1} et par des éléments du centralisateur de la composante connexe du noyau de χ_i dans T ; on a $H_m = G_u$; A et B figurent parmi les H_i. Si A et B sont distingués dans G, on peut supposer qu'il en est de même de tous les H_i.

Etablissons d'abord que, si C est un sous-groupe distingué connexe de G contenu dans G_u et $\neq \{e\}$ (e étant l'élément neutre), C contient un sous-groupe connexe de dimension 1 distingué dans G. On a déjà vu (exp. 6, corollaire 1 au théorème 1) qu'il y a une suite $(G_o, \ldots, G_s)$ de sous-groupes distingués connexes de G telle que $G_o = \{e\}$, $G_{i-1} \subset G_i$ et $\dim G_i/G_{i-1} = 1$ si $1 \leq i \leq s$, $G_s = G_u$. Si $G_1 \subset C$, notre assertion est vraie. Sinon, on procède par récurrence sur dim C. Soit k le plus petit indice tel que $C \subset G_k$; $G_{k-1}C$ est connexe, contient G_{k-1} sans lui être égal et est contenu dans G_k, d'où $G_{k-1}C = G_k$. Soit $C' = C \cap G_{k-1}$; l'application canonique $G_k \to G_k/G_{k-1}$ induit un épimorphisme de C sur G_k/G_{k-1} de noyau C' ; si C' est fini, C est de dimension 1 ; sinon, la composante connexe C'_o de e dans C' est de dimension $<$ dim C, mais > 0, et il suffit de lui appliquer l'hypothèse inductive. Ceci étant, soit H un sous-groupe fermé connexe $\neq G_u$ de G_u dont le normalisateur dans G contient T et sur lequel nous faisons l'hypothèse suivante : ou bien a) $H \subset A$ et $H \neq A$, ou bien b) $A \subset H \subset B$ et $H \neq B$; ou bien c) $B \subset H$. Soit N un groupe qui est la composante connexe de e dans le normalisateur de H dans A dans le cas a), dans B dans le cas b), dans G_u dans le cas c). On a $N \neq H$ en vertu du lemme 1; exposé 7. Le normalisateur de N contient T ; NT est un groupe algébrique résoluble contenant H et N comme sous-groupes distingués. Appliquant le résultat établi ci-dessus à NT/H, on voit qu'il y a un sous-groupe fermé connexe distingué H' de NT contenu dans N, contenant H et tel que H'/H soit de dimension 1. On a $H' \subset A$ dans le cas a), $H' \subset B$ dans le cas b). Comme H'/H est de dimension 1 et est un composé d'éléments unipotents, il est isomorphe à K (exposé 7, théorème 4). Il y a donc un homomorphisme rationnel θ de H' sur K de noyau H qui définit par passage aux quotients un isomorphisme de H'/H sur K ; tout autre homomorphisme θ' ayant les mêmes propriétés est de la forme $s \to c\,\theta(s)$ en vertu du lemme 1. Si $t \in T$, $s \to tst^{-1}$ est un automorphisme de H' qui conserve H ; $\theta(tst^{-1})$ est donc de la forme $\chi(t)\,\theta(s)$, $\chi(t) \in K^*$ (le groupe des éléments $\neq 0$ de K). Prenant s tel que $\theta(s) = 1$, on voit que χ est un morphisme de T dans K^* ; c'est évidemment un caractère. Soit Q la composante connexe du noyau du caractère χ de T, et soit C son centralisateur dans le groupe $H'Q$; comme Q est un tore maximal de $H'Q$, C est un groupe de Cartan de $H'Q$. Soit π l'homomorphisme canonique de $H'Q$ sur $H'Q/H$; $\pi(C)$ est donc un groupe de Cartan de $H'Q/H$ (exposé 7, théorème 3) Or il est clair que $H'Q/H$ est un groupe commutatif, et en particulier nilpotent, d'où $\pi(C) = H'Q/H$, ce qui montre que H' est engendré par H et par des éléments de C. Supposons maintenant de plus que H soit un sous-groupe distingué de G, et qu'il en soit de même de A et B. Le groupe N est alors distingué dans G, et N/H est un sous-groupe distingué de G/H. On peut alors prendre pour H' un sous-groupe distingué de G. Les considérations précédentes permettent de construire inductivement une suite (H_i) ayant les propriétés énoncées.

2.- Un lemme de géométrie algébrique.

LEMME 3.- *Soient* G *un groupe algébrique,* H *un sous-groupe fermé de* G , f *l'application canonique* $G \to G/H$, s *un point de* G , V *une sous-variété fermée de* G/H ; *il y a alors une sous-variété* U *de* G *passant par* s *telle que* $f(U)$ *soit dense dans* V ; *si* H *est connexe,* $f^{-1}(V)$ *est une sous-variété de* G .

L'ensemble $f^{-1}(V)$ est fermé ; soit X une composante irréductible de cet ensemble. Soit $n = \dim G$, $h = \dim H$, $d = \dim V$; on a alors $\dim X \geqslant d + h$ (séminaire 1955/56, exposé 8, théorème 2) ; par ailleurs, pour tout $y \in V$, toute composante de $f^{-1}(y)$ est de dimension h ; faisant à nouveau usage du résultat qu'on vient de citer, on voit que $\dim X \leqslant \dim f(X) + h$; il en résulte que $\dim f(X) = \dim V$, donc que $f(X)$ est dense dans V . Prenant pour U une composante de $f^{-1}(V)$ passant par s , on obtient le premier résultat. Supposons maintenant H connexe. Comme $f(X)$ est épais, il contient une partie relativement ouverte V_o non vide de V . Soit $y \in V_o$; toute composante irréductible de $X \cap f^{-1}(y)$ est de dimension $\geqslant h$ et $f^{-1}(y)$ est de dimension h et connexe ; on a donc $f^{-1}(V_o) \subseteq X$; comme $f^{-1}(V_o)$ est relativement ouvert dans $f^{-1}(V)$, on a $X = X' = f^{-1}(V)$.

3.- Le normalisateur d'un groupe de Borel.

THÉORÈME 1.- *Soit* B *un groupe de Borel d'un groupe algébrique affine* G ; B *est alors son propre normalisateur dans* G .

Le normalisateur N de B est un sous-groupe fermé de G dont on sait déjà qu'il contient B comme sous-groupe d'indice fini (cf. exposé 6, lemme 5 et théorème 5). Si $s \in N$, les composantes semi-simple et unipotente de s sont dans N ; il suffira donc de montrer que, si $s \in N$ et si s est soit semi-simple soit unipotent, on a $s \in B$. Le point s appartient à un groupe de Borel B' de G (exposé 6 , théorème 5) ; soit B'_u le groupe des éléments unipotents de B' , et soit $(H_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ une suite de sous-groupes fermés distingués connexes de B' telle que $H_o = \{e\}$, que $H_{i-1} \subset H_i$ et $\dim H_i/H_{i-1} = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant m$, et que $H_m = B'_u$ (lemme 2). Soit T' un tore maximal de B' qui contient s dans le cas où s est semi-simple. Si s est unipotent, nous supposerons que $H_{i-1} \subset B$. Soit f l'application canonique $G \to G/B$, et soit $x_o = f(e)$; le groupe G opère sur G/B ; si

s est unipotent, soit V l'adhérence de $H_i x_o$; si s est semi-simple, soit V l'adhérence de $T'x_o$; V est donc une variété complète stable par les opérations de H_i si s est unipotent, par celles de T' si s est semi-simple. Il y a donc un point $x_1 \in V$ qui est invariant par les opérations de H_i dans le premier cas, par celles de T' dans le second. Le groupe de stabilité de x_1 dans G est un groupe de Borel B_1 qui contient H_i dans le premier cas, T' dans le second. Nous allons montrer que s appartient au normalisateur de B_1 et que la condition $s \in B_1$ entraîne $s \in B$. Posons $Z = H_i$ si s est nilpotent, $Z = T'$ si s est semi-simple. Dans le cas où s est nilpotent, on a $szs^{-1} \equiv z \pmod{H_{i-1}}$ pour tout $z \in Z$. En effet, comme H_i/H_{i-1} est commutatif, l'ensemble formé des $szs^{-1}z^{-1}h'$, avec $z \in Z$, $h' \in H_{i-1}$ est un sous-groupe de H_i ; ce groupe, image de $Z \times H'$ par un morphisme, est épais et irréductible, donc fermé ; il ne peut être identique à H_i, car, B'_u/H_{i-1} étant nilpotent, il est impossible que tout élément de H_i/H_{i-1} soit commutateur d'un élément de H_i/H_{i-1} et d'un élément de G/H_{i-1}; il est donc identique à H_{i-1}, ce qui démontre notre assertion. Si s est semi-simple, s commute avec tous les éléments de Z. Comme $H_{i-1} \subset B$ si s est nilpotent, on voit que, dans tous les cas, $szs^{-1} \equiv z \pmod B$ pour tout $z \in Z$. Ceci donne $z^{-1}sz \in Bs \subset N$. Si $z' \in f^{-1}(f(z))$, on a $z' = zb$, avec un $b \in B$, d'où il résulte immédiatement que $z'^{-1}sz' \in N$. Or V n'est autre que l'adhérence de $f(Z)$; par ailleurs, $U = f^{-1}(V)$ est une sous-variété de G (lemme 3). L'ensemble $f^{-1}(f(Z))$ est dense dans U ; en effet, si U_o est une partie relativement ouverte non vide de U, $f(U_o)$ contient une partie relativement ouverte non vide de V, d'où $f(U_o) \cap f(Z) \neq \emptyset$. Tenant compte de la continuité de l'application $z' \to z'^{-1}sz'$ et du fait que N est fermé, on voit que $u^{-1}su \in N$ pour tout $u \in U$. Or $f^{-1}(V)$ contient un point u_1 tel que $f(u_1) = x_1$, et on a $B_1 = u_1Bu_1^{-1}$; comme $u_1^{-1}su_1 \subset N$, on a $s \in u_1Nu_1^{-1}$, ce qui montre que s appartient au normalisateur de B_1. Supposons maintenant que $s \in B_1$, d'où $u_1^{-1}su_1 \in B$. L'ensemble des $u^{-1}su$ pour $u \in U$ est une partie connexe de N qui contient un point de B ; cet ensemble est donc contenu dans B. Or U contient $f^{-1}(f(Z))$, qui contient l'élément neutre e ; on a donc alors $s \in B$. Ceci étant, si s est semi-simple, l'inclusion $T' \subset B_1$ implique $s \in B_1$, d'où $s \in B$. Si s est unipotent, on construit par le procédé précédent une suite $(B_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ de groupes de Borel de G qui possèdent les propriétés suivantes : on a $B_0 = B$; pour chaque i, s appartient au normalisateur de B_i et, si $i > 0$, la condition $s \in B_i$ entraîne $s \in B_{i-1}$; B_i contient H_i. Donc B_m contient B'_u, donc s ; il s'ensuit que $s \in B_i$ pour tout i, et, en particulier, $s \in B = B_0$.

COROLLAIRE 1.- Soit B un groupe de Borel du groupe algébrique affine G. L'application qui à tout $x \in G/B$ fait correspondre le groupe de stabilité de x est une bijection de G/B sur l'ensemble des groupes de Borel de B.

Soit f l'application canonique de G sur G/B ; si $x = f(s)$, $s \in G$, le groupe de stabilité de x est sBs^{-1}, qui est un groupe de Borel. Comme tous les groupes de Borel sont conjugués, l'application en question est surjective, Si $x = f(s)$, $x' = f(s')$ sont tels que $sBs^{-1} = s'Bs'^{-1}$, $s^{-1}s'$ normalise B, donc est dans B, d'où $x = x'$.

COROLLAIRE 2.- Tout groupe de Borel B d'un groupe algébrique affine G est un sous-groupe résoluble maximal de G.

Soit H un sous-groupe résoluble de G contenant B ; soient $\overline{H}$ l'adhérence de H, et $\overline{H}_0$ la composante connexe de e dans $\overline{H}$; $\overline{H}_0$ est résoluble et connexe, et contient B, d'où $\overline{H}_0 = B$; $\overline{H}$ étant dans le normalisateur de $\overline{H}_0 = B$, on a $H = B$.

COROLLAIRE 3.- Soit T un tore maximal d'un groupe algébrique affine G ; soient C et N le centralisateur et le normalisateur de T. Soit B un groupe de Borel contenant T ; les groupes de Borel contenant T sont alors les sBs^{-1}, où $s \in N$; si s, $s' \in N$, on ne peut avoir $sBs^{-1} = s'Bs'^{-1}$ que si $s \equiv s' \pmod{C}$; le nombre des groupes de Borel contenant T est fini et égal à $[N : C]$.

Si sBs^{-1} est un groupe de Borel contenant T, sTs^{-1} et T sont des tores maximaux de sBs^{-1}, donc conjugués dans sBs^{-1} ; si $sTs^{-1} = b'Tb'^{-1}$, $b' \in sBs^{-1}$, $b'^{-1}s = s'$ est dans N et $sBs^{-1} = s'Bs'^{-1}$. Soient maintenant s et s' des éléments de N tels que $s'Bs'^{-1} = sBs^{-1}$; $s^{-1}s'$ est alors dans le normalisateur de B, donc dans B ; de plus $s^{-1}s' \in N$. Or on sait que le normalisateur de T dans B est C (exposé 6, corollaire 3 au théorème 1), d'où $s \equiv s' \pmod{C}$. Il est clair que N est dans le normalisateur de C ; comme C est un groupe de Cartan, N/C est fini.

DÉFINITION 1.- Les notations étant celles du corollaire 3, le groupe N/C s'appelle de groupe de Weyl de T.

Tous les tores maximaux de G étant conjugués, ces tores ont des groupes de Weyl isomorphes. Un groupe abstrait isomorphe aux groupes de Weyl des tores maximaux de G est aussi appelé un groupe de Weyl de G.

4.- Le radical.

DÉFINITION 2.- On appelle radical d'un groupe algébrique affine G la composante algébrique de l'élément neutre dans l'intersection des groupes de Borel de G.

Le radical est manifestement un sous-groupe distingué fermé résoluble de G.

PROPOSITION 1.- Le radical de G est le plus grand sous-groupe distingué fermé résoluble connexe de G.

En effet, un sous-groupe distingué irréductible et résoluble de G est contenu dans au moins un groupe de Borel, donc dans tous et par suite aussi dans le radical.

DÉFINITION 3.- On appelle semi-simple un groupe algébrique affine dont le radical se réduit à l'élément neutre.

PROPOSITION 2.- Soit R le radical d'un groupe algébrique affine G ; G/R est alors semi-simple.

Le radical de G/R s'écrit S/R, où S est un sous-groupe fermé distingué de G qui est connexe (Lemme 4) ; S étant résoluble puisque R et S/R le sont, on a $S = R$.

5.- Les groupes à un paramètre d'un tore.

Soit T un tore. Nous appellerons groupe à un paramètre de T tout homomorphisme rationnel γ du groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K dans T ; soit $\Gamma(T)$ l'ensemble des groupes à un paramètre de T. Si $\gamma \in \Gamma(T)$, nous désignerons par Supp γ l'ensemble des $\gamma(x)$, $x \in K^*$. Si γ et γ' sont dans $\Gamma(T)$, il en est de même de l'application $x \longrightarrow \gamma(x) \quad \gamma'(x)$; on a ainsi une loi de composition dans $\Gamma(T)$ relativement à laquelle $\Gamma(T)$ constitue un groupe comme on le vérifie tout de suite. Ce groupe sera noté suivant les besoins tantôt additivement tantôt multiplicativement. Soit aussi X le groupe des caractères de T, i.e. des homomorphismes rationnels de T dans K^*. Si $\gamma \in \Gamma(T)$, $\chi \in X$, $\chi \circ \gamma$ est un homomorphisme rationnel de K^* dans lui-même, donc de la forme $x \to x^n$, n étant un entier bien déterminé ; nous poserons $n = \langle \gamma , \chi \rangle$. Considérant $\Gamma(T)$ et X comme des modules sur $\underline{Z}$, $(\gamma, \chi) \to \langle \gamma, \chi \rangle$ est évidemment une forme bilinéaire sur $\Gamma(T) \times X$. Montrons qu'elle définit un isomorphisme de l'un quelconque des modules $\Gamma(T)$, X sur le dual de l'autre. On peut se limiter au cas où $T = K^{*^d}$ pour un certain $d > 0$. Le groupe X est alors, comme on l'a vu, engendré par des éléments χ_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ tels que

$$\chi_i(x_1 , \dots , x_d) = x_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant d) \ (\text{où } (x_1 , \dots , x_d) \in K^{*^d}).$$

Par ailleurs, l'application γ_i qui fait correspondre à tout $x \in K^*$ l'élément de K^{*^d} dont la i-ème coordonnée est x et les autres coordonnées 1 est un groupe à un paramètre ; on a $\langle \gamma_i , \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ $(1 \leqslant i , j \leqslant d)$. Si γ est un élément quelconque de $\Gamma(T)$, il y a des entiers e_i tels que $\langle \gamma - \sum_{i=1}^{d} e_i \gamma_i , \chi_j \rangle = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant d$, ce qui entraîne manifestement que $\gamma = \sum_{i=1}^{d} e_i \gamma_i$, et démontre notre assertion.

Par extension de l'anneau de base, on déduit de $\Gamma(T)$ un espace vectoriel $\Gamma^{\underline{R}}(T)$ de dimension dim T sur le corps $\underline{R}$ des nombres réels.

PROPOSITION 3.- Soit T un tore ; soit U un cône ouvert non vide dans l'espace vectoriel $\Gamma^{\underline{R}}(T)$ (muni de sa topologie ordinaire). La réunion des Supp γ pour $\gamma \in U \cap \Gamma^{\underline{R}}(T)$ est alors dense dans T.

Soit $d = \dim T$. Soit E une partie fermée $\neq T$ de T ; alors l'ensemble des $\gamma \in \Gamma(T)$ tels que Supp $\gamma \subset E$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini de sous-groupes de rangs $< d$ de $\Gamma(T)$. On peut en effet supposer $T = K^{*^d}$; il y a alors un polynome $P \neq 0$ en d lettres à coefficients dans K tel que $P(x_1 , \dots , x_d) = 0$ si $(x_1 , \dots , x_d) \in E$. Par ailleurs un élément γ de $\Gamma(T)$ est de la forme

$$x \to (x^{n_1} , \dots , x^{n_d}) \text{ , les } n_i \text{ étant des entiers.}$$

Pour que Supp $\gamma \subset E$, il est nécessaire que le polynome $P(X^{n_1}, \dots , X^{n_d})$ en une lettre X soit identiquement nul. On voit tout de suite qu'il existe un nombre fini de systèmes $(e_1 , \dots , e_d)$ d'entiers non tous nuls tels que le polynome $P(X^{n_1}, \dots, X^{n_d})$ ne puisse être nul que si l'une au moins des conditions $\sum_{i=1}^{d} \rho_i n_i = 0$ est satisfaite. Remplaçant U par l'ensemble qu'on en déduit en retirant les points d'un nombre fini d'hyperplans de $\Gamma^{\underline{R}}(T)$ passant par l'origine, on voit qu'on est ramené à montrer que $U \cap \Gamma(T) \neq \emptyset$. Or toute base de $\Gamma(T)$ en est aussi une de $\Gamma^{\underline{R}}(T)$; relativement à une pareille base, U contient au moins un point à coordonnées rationnelles, donc aussi un point à coordonnées entières puisque c'est un cône, d'où la proposition 3.