

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Les tores singuliers

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 10, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A10_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES TORES SINGULIERS.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 11.2.1957)

1.- Cinq lemmes.

LEMME 1.- Soient U , V et W des variétés, f un morphisme de $U \times V$ dans W , A une partie fermée de V et B une partie fermée de W telle que $f(U \times A) \subset B$; si A' est une composante irréductible de A , $f(U \times A')$ est contenu dans une composante irréductible de B .

Cet ensemble est en effet irréductible comme image continue d'un ensemble irréductible $U \times A'$.

COROLLAIRE.- Soit G un groupe algébrique irréductible qui opère dans une variété V (i.e. on a un morphisme $(s, y) \rightarrow s.y$ de $G \times V$ dans V tel que $s.(s'.y) = ss'.y$ si $s, s' \in G$, $y \in V$, et $e.y = y$ si e est l'élément neutre de G). Si les applications $y \rightarrow s.y$ transforment toutes en elle-même une certaine partie fermée A de V , elles transforment en elle-même toute composante irréductible A' de A .

En effet, les points $s.y$ ($s \in G$, $y \in A'$) sont contenus dans une même composante irréductible de A (lemme 1) qui, contenant $y = e.y$ pour tout $y \in A'$, est identique à A' .

LEMME 2.- Soient Q et T des tores et U une variété; soit pour chaque $u \in U$ f_u un homomorphisme rationnel de Q dans T . Supposons que, pour tout $z \in Q$, $u \rightarrow f_u(z)$ soit un morphisme de U dans T . Alors f_u ne dépend pas de u .

Soit z un point d'ordre fini m de Q ; $f_u(z)$ est un point d'ordre fini diviseur de m , donc reste dans un ensemble fini; comme l'ensemble des $f_u(z)$ pour $u \in U$ est irréductible, il se réduit à un point. Soit A l'ensemble des éléments d'ordres finis de Q ; il est dense dans Q . Si $u, u' \in U$, les applications continues $f_u, f_{u'}$, qui coïncident sur A sont égales.

Rappelons que le corps K , muni de sa structure de variété, peut être plongé dans une variété complète D , la droite projective qui se déduit de K par adjonction d'un point noté ∞ , et qui est isomorphe à l'espace projectif associé à l'espace vectoriel K^2 .

LEMME 3.- Toute fonction f sur la droite projective à valeurs dans une variété complète V est partout définie.

Si D_0 est l'ensemble de définition de f , $a \rightarrow (a, f(a))$ est un morphisme g de D_0 dans $D \times V$; l'adhérence ϕ de l'image de D_0 par ce morphisme est une sous-variété fermée de $D \times V$; si p est le morphisme de ϕ induit par la projection $D \times V \rightarrow D$, $p^{-1}(a)$ est fini pour tout $a \in D$ puisque ϕ est de dimension 1; de plus, le cohomorphisme de p est un isomorphisme du corps F_D sur le corps F_ϕ , car $p \circ g$ (resp. $g \circ p$) est l'application identique de D (resp. ϕ). Comme D est normale, p est un isomorphisme de ϕ sur une sous-variété $p(\phi)$ de D (exposé 5, théorème 2); or ϕ , qui est une sous-variété fermée de la variété complète $D \times V$, est complète; $p(\phi)$ est donc fermé, d'où $p(\phi) = D$; le lemme 3 résulte immédiatement de là.

LEMME 4.- Toute fonction numérique u partout définie sur une variété complète V est constante.

On peut considérer u comme un morphisme de V dans la droite projective D ; comme V est complète, $u(V)$ est une partie fermée irréductible de D qui ne contient pas le point ∞ et se réduit par suite à un point.

LEMME 5.- Soient $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé à un espace vectoriel V de dimension finie et W une sous-variété fermée de dimension $d > 0$ de $\mathbb{P}(V)$. Si H est un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$, $W \cap H$ est non vide, et toute composante irréductible de cet ensemble est de dimension $\geq d - 1$.

Soit φ l'application canonique de l'ensemble des éléments $\neq 0$ de V sur $\mathbb{P}(V)$. Si λ, μ sont des formes linéaires sur V , $\mu \neq 0$, il y a une fonction numérique λ/μ sur $\mathbb{P}(V)$ définie en tout point $\varphi(x)$ tel que $\mu(x) \neq 0$ et y prenant la valeur $\lambda(x)(\mu(x))^{-1}$. Prenons pour μ une forme linéaire $\neq 0$ nulle sur $\varphi^{-1}(H)$. Ecartons le cas trivial où $W \subset H$; comme W ne se réduit pas à un point, il y a une forme linéaire λ sur V telle que λ/μ (qui est définie en au moins un point de W) induise une fonction non constante sur W ; il y a un point de W où

cette fonction n'est pas définie (lemme 4), d'où $W \cap H \neq \emptyset$. Soit x_0 tel que $\varphi(x_0) \in W \cap H$, et soit ν une forme linéaire sur V telle que $\nu(x_0) \neq 0$; soit W_0 l'ensemble des points de W en lesquels μ/ν est définie. Alors $W_0 \cap H$ est l'image réciproque de 0 par le morphisme de W_0 dans K induit par μ/ν ; les composantes irréductibles de cet ensemble sont donc de dimensions $\geq d-1$.

2.- Les groupes de Borel qui contiennent un tore.

Soit G un groupe algébrique affine et soit Q un tore contenu dans G . Soit B_0 un groupe de Borel de G ; les groupes de Borel de G sont donc les stabilisateurs des points de G/B_0 ; ceux qui contiennent Q sont les stabilisateurs des points de G/B_0 invariants par Q .

PROPOSITION 1.- Les points de G/B_0 invariants par Q forment un ensemble fermé E . Soit Z le centralisateur de Q ; si E_1 est une composante irréductible de E , les points de E_1 sont transformés transitivement entre eux par les opérations de Z ; leurs stabilisateurs dans Z sont les groupes de Borel de Z ; si C est l'un de ces groupes, on a $\dim. E_1 = \dim. Z/C$. Si T est un tore maximal contenant Q , E_1 contient un point dont le stabilisateur contient T .

Il est évident que E est fermé et que les opérations de Z permutent entre eux les points de E . Comme Z est connexe (exposé 6, théorème 6 a)), les opérations de Z permutent entre eux les points de E_1 (corollaire au lemme 1). Soit f l'application canonique $G \rightarrow G/B_0$; $U = f^{-1}(E_1)$ est alors une sous-variété fermée de G (exposé 9, lemme 3). Si $u \in E$, on a $Q \subset uB_0u^{-1}$, d'où $u^{-1}Qu \subset B_0$. Soit B_0^u le groupe des éléments unipotents de B_0 ; B_0/B_0^u est alors un tore; si h est l'application canonique de B_0 sur B_0/B_0^u , $(u, x) \rightarrow h(u^{-1}xu)$ est un morphisme de $U \times Q$ dans B_0/B_0^u ; lui appliquant le lemme 2, on voit qu'il ne dépend pas de u . Il en résulte que le groupe D engendré par B_0^u et $u^{-1}Qu$ ne dépend pas de u ; les $u^{-1}Qu$ en sont des tores maximaux, et sont par suite conjugués les uns des autres dans D . Soit u_1 un point quelconque de U ; posons $Q_1 = u_1^{-1}Qu_1$. Alors, pour tout $u \in U$, il existe un élément $b(u) \in B_0^u$ tel que $u^{-1}Qu = b(u)Q_1(b(u))^{-1}$; de plus, si $x \in Q$, on a $u^{-1}xu \equiv u_1^{-1}xu_1 \pmod{B_0^u}$

et par suite aussi $(ub(u))^{-1}x(ub(u)) \equiv u_1^{-1}xu_1 \pmod{B_0^u}$; comme ces deux éléments appartiennent à Q_1 , ils sont égaux, d'où $ub(u) = z(u)u_1$ avec un $z(u) \in Z$. Comme $b(u)$ appartient à B_0 , on a $f(ub(u)) = f(u)$, d'où $f(u) = z(u).x_1$ si $x_1 = f(u_1)$. Comme $f(U) = E_1$, on a $E_1 = Z.x_1$, ce qui montre que les opérations de Z transforment transitivement entre eux les points de E_1 . Si C est un groupe de Borel de Z , les opérations de C laissent invariant un point x au moins de E_1 , puisque E_1 est une variété complète et C résoluble. Les opérations de Z qui laissent x fixe sont celles de l'intersection de Z avec le stabilisateur de x dans G , qui est un groupe résoluble ; elles forment donc un sous-groupe résoluble de Z qui, contenant C , lui est identique (exposé 9, corollaire 2 au théorème 1) . On en déduit par passage aux quotients un morphisme bijectif de Z/C sur E_1 , d'où $\dim E_1 = \dim Z/C$. Tout tore maximal contenant Q est contenu dans Z , donc dans au moins un groupe de Borel de Z , ce qui démontre la dernière assertion.

REMARQUE.- Il faut se garder de croire que les composantes irréductibles de E sont transformées transitivement entre elles par les opérations du normalisateur de Q ; il n'en est pas ainsi, comme on le voit par des exemples simples.

DEFINITION 1.- Un tore Q de G s'appelle régulier s'il contient au moins un point régulier de G , semi-singulier s'il n'est contenu que dans un nombre fini de groupes de Borel de G , singulier s'il est contenu dans une infinité de groupes de Borel de G .

PROPOSITION 2.- Pour qu'un tore soit semi-régulier, il faut et suffit que son centralisateur soit résoluble.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1 .

COROLLAIRE.- Un tore régulier est semi-régulier.

Si un tore Q contient un élément régulier s , son centralisateur est contenu dans celui de s , qui est le centralisateur d'un tore maximal et est par suite nilpotent, donc résoluble.

PROPOSITION 3.- Si Q est un tore semi-régulier contenu dans le tore maximal T , tout groupe de Borel qui contient Q contient T .

Soit B_0 un groupe de Borel. L'ensemble E des points de G/B_0

invariants par Q est fini. Comme T est commutatif, les opérations de T transforment E en lui-même, donc transforment chaque point de E en lui-même (corollaire au lemme 1).

PROPOSITION 4.- Pour qu'un tore Q soit semi-régulier (resp. régulier), il faut et suffit qu'il contienne un tore de dimension 0 ou 1 qui soit semi-régulier (resp. régulier).

La condition est évidemment suffisante. L'ensemble Q_0 des points de Q dont les centralisateurs sont égaux à celui de Q contient un ensemble relativement ouvert non vide dans Q . On peut en effet supposer que le groupe G est un groupe algébrique de matrices et que les éléments de Q sont des matrices diagonales ; si $t \in Q$, soient $a_1(t), \dots, a_n(t)$ les coefficients diagonaux de la matrice t . Le centralisateur de Q se compose des matrices $(b_{ij}) \in G$ telles que $b_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que l'on n'ait pas $a_i(t) = a_j(t)$ pour tout $t \in Q$. Or il y a une partie ouverte non vide Q_0 de Q telle que, si $t \in Q_0$, la condition $a_i(t) = a_j(t)$ entraîne que $a_i(t') = a_j(t')$ pour tout $t' \in Q$.

Il y a donc un groupe à un paramètre γ de Q tel que $\text{Supp } \gamma$ rencontre Q_0 (exposé 9, proposition 3), d'où le résultat.

Nous dirons qu'un groupe à un paramètre d'un tore de G est régulier (resp. semi-régulier, singulier) si le tore $\text{Supp } \gamma$ est régulier (resp. semi-régulier, singulier).

3.- Groupes à un paramètre semi-réguliers.

Soient G un groupe algébrique affine et Ω une variété complète sur laquelle opère G . Soient T un tore maximal de G , γ un groupe à un paramètre de T et x un point de Ω ; le morphisme $\theta \rightarrow \gamma(\theta).x$ de K^* dans Ω se prolonge en un morphisme de la droite projective dans Ω qui applique les points 0 et ∞ sur des points que nous désignerons par $\gamma(0).x$ et $\gamma(\infty).x$ respectivement. Il résulte immédiatement de la formule $\gamma(\theta\theta').x = \gamma(\theta).(\gamma(\theta').x)$ que les points $\gamma(0).x$, $\gamma(\infty).x$ sont invariants par les opérations de $\text{Supp } \gamma$. Ceci dit, supposons que $\Omega = G/B_0$ où B_0 est un groupe de Borel de G . Alors le stabilisateur de $\gamma(0).x$ est un groupe de Borel contenant $\text{Supp } \gamma$. Réciproquement, si x est un point de Ω invariant par les opérations de $\text{Supp } \gamma$, on a $x = \gamma(0).x$; les groupes de Borel contenant $\text{Supp } \gamma$ sont donc les

stabilisateurs des points $\sigma(0).x$, où x parcourt les points de Ω ; pour que σ soit semi-régulier, il faut et suffit que l'ensemble des $\sigma(0).x$ soit fini. Pour étudier cet ensemble, nous allons utiliser une représentation linéaire de G .

PROPOSITION 5.- Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe algébrique affine G . Il existe alors une représentation rationnelle ρ de G et un point $e \neq 0$ de l'espace V de ρ tels que H soit l'ensemble des $s \in G$ tels que $\rho(s)$ transforme l'espace Ke en lui-même.

Soit P l'algèbre des fonctions numériques partout définies sur G , et soit Ω l'idéal des fonctions de P nulles sur H . Si $s \in G$, $u \in P$, on désigne par $\sigma(s).u$ la fonction $t \rightarrow u(ts)$. Tout sous-espace de dimension finie de P est contenu dans un sous-espace de dimension finie qui est stable par les opérations $\sigma(s)$ (exposé 4). Il existe donc un sous-espace P_1 de dimension finie de P , stable par les $\sigma(s)$, qui contient un ensemble de générateurs de Ω . Soit $d = \dim(P_1 \cap \Omega)$; soient V la puissance extérieure d -ième de P_1 et, pour $s \in G$, $\rho(s)$ la puissance extérieure d -ième de la restriction de $\sigma(s)$ à P_1 ; soit e le produit extérieur des éléments d'une base de $P_1 \cap \Omega$. Pour qu'un élément s appartienne à H , il faut et suffit que $\sigma(s)$ transforme Ω en lui-même, ou encore transforme $P_1 \cap \Omega$ en lui-même, donc que $\rho(s)$ transforme Ke en lui-même.

REMARQUE.- Prenant P_1 de telle manière que P_1 contienne 1 et un ensemble de générateurs de P , on voit facilement que la représentation ρ construite dans la démonstration précédente est fidèle.

COROLLAIRE.- Soient G un groupe algébrique affine et B_0 un groupe de Borel de G . Il existe une représentation rationnelle ρ de G , d'espace V et un morphisme bijectif ξ de G/B_0 sur une sous-variété fermée Ω de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ associé à V qui possèdent la propriété suivante : si on désigne, pour $s \in G$, par $\rho^*(s)$ l'automorphisme de $\mathbb{P}(V)$ défini par $\rho(s)$, on a, pour tout $x \in G/B_0$ et tout $s \in G$, $\xi(s.x) = \rho^*(s). \xi(x)$. On peut de plus supposer que Ω n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathbb{P}(V)$.

Appliquons en effet la proposition 4 en prenant $H = B_0$. L'espace engendré par les transformés de e par les opérations de G est stable par G ; on peut donc supposer que c'est V tout entier. Soit ξ l'application canonique de l'ensemble des éléments $\neq 0$ de V sur $\mathbb{P}(V)$; le groupe de

stabilité du point $e^* = \varphi(e)$ est B_0 . Le morphisme $s \rightarrow \rho^*(s).e^*$ définit donc par passage aux quotients un morphisme bijectif ξ de G/B_0 dans $\mathcal{F}(V)$; comme G/B_0 est complet, $\Omega = \xi(G/B_0)$ est une sous-variété fermée de $\mathcal{F}(V)$; il est clair que Ω n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathcal{F}(V)$. Si $x = tB_0$, $t \in G$, on a $s.x = stB_0$,

$$\xi(s.x) = \rho^*(st).e^* = \rho^*(s).(\rho^*(t).e^*) = \rho^*(s). \xi(x).$$

Les notations étant celles du corollaire précédent, soit de plus T un tore maximal de G . Il y a une base (e_1, \dots, e_n) de V telle que l'on ait, pour $t \in T$,

$$\rho(t).e_i = \chi_i(t)e_i \quad (1 \leq i \leq n),$$

les χ_i étant des caractères rationnels de T , qui peuvent être considérés comme des formes linéaires sur le groupe $\Gamma(T)$ des groupes à un paramètre de T . Si $\gamma \in \Gamma(T)$, on a

$$\rho(\gamma(\theta)). \sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{i=1}^n a_i \theta^{c_i} e_i \quad (\theta \in K^*), \text{ avec } c_i = \chi_i(\gamma).$$

Cette formule permet de déterminer explicitement $\gamma(0).x^*$ si x^* est un point quelconque de $\mathcal{F}(V)$. Soit φ l'application canonique de l'ensemble des éléments $\neq 0$ de V sur $\mathcal{F}(V)$, et soit $x^* = \varphi(\sum_{i=1}^n a_i e_i)$; posons $\xi_i(\gamma, x) = 1$ si on a $a_i \neq 0$ et $\chi_i(\gamma) \leq \chi_j(\gamma)$ pour tout j tel que $a_j \neq 0$, $\xi_i(\gamma, x) = 0$ dans le cas contraire. On a alors

$$\gamma(0).x^* = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i(\gamma, x)e_i\right).$$

On peut de même déterminer $\gamma(\infty).x^*$: on pose alors $\xi'_i(\gamma, x) = 1$ si $a_i \neq 0$ et $\chi_i(\gamma) \geq \chi_j(\gamma)$ pour tout j tel que $a_j \neq 0$ et $\xi'_i(\gamma, x) = 0$ dans le cas contraire, et on a

$$\gamma(\infty).x^* = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i \xi'_i(\gamma, x)e_i\right).$$

On ne peut avoir $\gamma(0).x^* = \gamma(\infty).x^*$ que si les $\chi_i(\gamma)$ pour tous les i tels que $a_i \neq 0$ sont égaux, auquel cas on a $\gamma(\theta).x^* = x^*$. On déduit de là le résultat suivant :

PROPOSITION 6. - Soient G un groupe algébrique affine, B_0 un groupe de Borel de G et T un tore maximal de G . Si W est une sous-variété fermée de G/B_0 invariante par T , et si $\dim W > 0$, W contient au moins deux points distincts invariants par T .

Soit γ un groupe à un paramètre semi-régulier de T . Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de G/B_0 invariants par T , ou, ce qui revient au même (proposition 3) par $\text{Supp } \gamma$, il y a un point $x \in W$ tel que l'application $e \rightarrow \gamma(e).x$ ne soit pas constante. Les points $\gamma(0).x$ et $\gamma(\infty).x$ sont alors des points distincts de W invariants par T .

COROLLAIRE. - Si G est un groupe algébrique affine non résoluble, tout tore maximal de G est contenu dans au moins deux groupes de Borel.

Revenons maintenant aux notations utilisées plus haut, et cherchons à quelle condition γ est semi-régulier. Soit $\chi(\gamma)$ le plus petit des $\chi_i(\gamma)$, et soit I l'ensemble des i tels que $\chi(\gamma) = \chi_i(\gamma)$. Supposons d'abord que I ne comporte qu'un seul élément i_0 . Soit Ω_0 l'ensemble des $\varphi(\sum_{i=1}^n a_i e_i)$ tels que $a_{i_0} \neq 0$; c'est une partie ouverte non vide de Ω (car Ω n'est contenu dans aucun hyperplan), et on a $\gamma(0).x^* = \varphi(e_{i_0})$ pour tout $x^* \in \Omega_0$, $\gamma(0).x^* \neq \varphi(e_{i_0})$ si $x^* \in \Omega - \Omega_0$. On en conclut que $\varphi(e_{i_0})$ est alors isolé dans l'ensemble des $\gamma(0).x^*$ ($x^* \in \Omega$), donc que γ est semi-régulier (proposition 1). Supposons au contraire que I contienne deux indices distincts i_0 et i_1 ; si c est un élément quelconque de K , il y a des points x^* de Ω tels que x^* soit de la forme $\varphi(\sum_{i=1}^n a_i e_i)$ avec $a_{i_0} \neq 0$, $a_{i_1} \neq 0$, $a_{i_1} \neq ca_{i_0}$: on en conclut immédiatement que l'ensemble des $\gamma(0).x^*$, $x^* \in \Omega$, est infini, donc que γ est singulier. On a donc le résultat suivant:

PROPOSITION 7. - Soient G un groupe algébrique affine, B_0 un groupe de Borel de G , d la dimension de G/B_0 , T un tore maximal de G , γ un groupe à un paramètre de T . Il y a un point x_0 et un seul de G/B_0 qui possède la propriété suivante: l'ensemble U_0 des $x \in G/B_0$ tels que $\gamma(0).x = x_0$ est dense dans G/B_0 . L'ensemble U_0 est alors ouvert; si $d > 0$, $G/B_0 - U_0$ est un ensemble non vide dont les composantes irréductibles sont de dimension $d-1$.

La dernière assertion résulte du lemme 5.

COROLLAIRE. - Si G/B_0 est de dimension > 1 , tout tore maximal de G est contenu dans au moins trois groupes de Borel.

Observons en effet que, si $t \in T$, t commute avec les éléments de $\text{Supp } \sigma$, d'où il résulte immédiatement que $t \cdot (\sigma(0) \cdot x^*) = \sigma(0) \cdot (t \cdot x)$ pour tout $x \in G/B_0$. Si $x \in U_0$, on a $\sigma(0) \cdot x = x_0$, $x_0 = t \cdot x_0$, d'où $t \cdot x \in U_0$; chaque composante irréductible de $G/B_0 - U_0$ est donc invariante par T (corollaire au lemme 1) et contient par suite au moins deux points invariants par T (proposition 6).

Les notations étant celles de la proposition 7, désignons par $B(\sigma)$ le stabilisateur de x_0 ; nous avons donc attaché intrinsèquement à tout élément semi-régulier σ de $\Gamma(T)$ un groupe de Borel $B(\sigma)$ contenant T .

DÉFINITION 2.- Soit $\Gamma_{sr}(T)$ l'ensemble des groupes à un paramètre semi-réguliers de T . Pour tout groupe de Borel B contenant T , soit $\mathcal{C}(B)$ l'ensemble des $\sigma \in \Gamma_{sr}(T)$ tels que $B(\sigma) = B$; les ensembles non vides de la forme $\mathcal{C}(B)$ sont appelés les chambres de $\Gamma(T)$; si $\mathcal{C}(B) \neq \emptyset$, $\mathcal{C}(B)$ est appelé la chambre associée à B .

Nous verrons d'ailleurs que $\mathcal{C}(B) \neq \emptyset$ pour tout groupe de Borel B contenant T .

PROPOSITION 8.- Soit G un groupe algébrique affine non résoluble, et soit T un tore maximal de G . Il existe alors un tore singulier contenu dans T et de codimension 1 dans T .

Reprenons en effet les notations utilisées plus haut; soit x^* un point quelconque de Ω et soit W l'adhérence de $T \cdot x^*$. Le sous-espace X de V engendré par $\bar{\varphi}^{-1}(W)$ est stable par les opérations de $\rho(T)$; il a donc une base (e_1', \dots, e_m') telle que les sous-espaces Ke_i' soient stables par $\rho(T)$. Supposons que W soit de dimension $\delta > 0$: on peut considérer W comme une sous-variété fermée de l'espace projectif $\mathcal{P}(X)$ associée à X ; l'image par φ du sous-espace de X engendré par e_2', \dots, e_m' est un hyperplan H de $\mathcal{P}(X)$ qui ne contient pas W et qui est invariant par T . Toute composante irréductible A de $H \cap W$ est invariante par T (corollaire au lemme 1) et est de dimension $\delta - 1$ (lemme 5). Si $\delta > 1$, les points de A , qui sont en nombre infini, ne sont pas tous invariants par T , et A contient un point x^* tel que Tx^* soit de dimension > 0 mais $< \delta$. Ce raisonnement montre que G/B_0 contient un point x^* tel que l'adhérence de Tx^* , que nous désignerons maintenant par W , soit de dimension 1.

Soit S_0 la composante de l'élément neutre dans le groupe des éléments de T qui laissent x^* fixe ; il y a alors un morphisme de T/S_0 sur Ts^* tel que l'image réciproque de x^* par ce morphisme soit finie ; T/S_0 est donc de dimension 1 . Comme T est commutatif, tous les points de Tx^* sont invariants par S_0 , ce qui montre que S_0 est singulier.

COROLLAIRE.- Tout tore singulier contenu dans T est contenu dans un tore singulier contenu dans T et de codimension 1 dans T .

Soient Q un tore singulier contenu dans T et Z son centralisateur : Z n'est donc pas résoluble, et T en est un tore maximal. Il y a un tore S contenu dans T , de codimension 1 dans T et qui est **singulier relativement** au groupe Z . Le centralisateur de S dans Z est le même que celui de SQ , puisque Q est dans le centre de Z ; il n'est pas résoluble, d'où $SQ \neq T$; comme S est de codimension 1 et SQ connexe, il s'en suit que $Q \subset S$. Par ailleurs le centralisateur de S dans G contient son centralisateur dans Z et n'est par suite pas résoluble, ce qui montre que S est un tore singulier dans G .

Observons maintenant que le groupe de Weyl W de T opère de manière naturelle dans $\Gamma(T)$; si s est une opération du normalisateur N de T et $\sigma \in \Gamma(T)$, l'application $\theta \rightarrow s \sigma (\theta) s^{-1}$ est encore un groupe à un paramètre de T , que nous désignerons par $s. \sigma$; il est clair que $\sigma \rightarrow s. \sigma$ est un automorphisme du groupe $\Gamma(T)$ qui ne dépend que de la classe w de s modulo le centralisateur de T ; aussi poserons nous $w. \sigma = s. \sigma$. L'application qui à tout $w \in W$ fait correspondre l'automorphisme $\sigma \rightarrow w. \sigma$ est un homomorphisme de W dans le groupe des automorphismes de $\Gamma(T)$. Cet homomorphisme est injectif. En effet, si $w. \sigma = \sigma$, et si s est un représentant de w , s commute avec tous les éléments de $\text{Supp } \sigma$; comme la réunion des $\text{Supp } \sigma$ est dense dans T (exposé 9, proposition 3), on voit que, si $w. \sigma = \sigma$ pour tout σ , s appartient au centralisateur de T , d'où $w = I$. Le groupe W opère donc aussi de manière naturelle dans le groupe dual $\Gamma^*(T)$ de $\Gamma(T)$, qui s'identifie comme nous l'avons vu au groupe des caractères rationnels de T ; si χ est un élément de ce groupe et s un représentant de w dans N , on a

$$(w. \chi)(t) = \chi(s^{-1}ts) \quad (t \in T) .$$

En étendant le domaine des scalaires au corps \underline{R} des nombres réels, on définit de $\Gamma(T)$ et $\Gamma^*(T)$ des espaces vectoriels $\Gamma^{\underline{R}}(T)$, $\Gamma^{*\underline{R}}(T)$ sur

\underline{R} en dualité l'un avec l'autre, et W opère encore de manière fidèle dans ces espaces vectoriels. Pour simplifier les notations, nous conviendrons d'identifier les éléments de W aux opérations dans $\Gamma(T)$, $\Gamma^*(T)$, $\Gamma^{\underline{R}}(T)$, $\Gamma^{*\underline{R}}(T)$ qui leur sont associées.

Ceci étant, si τ est un groupe à un paramètre de T , et si w est une opération du groupe de Weyl, représentée par un élément s du normalisateur de T , les groupes de Borel qui contiennent $\text{Supp } w \cdot \tau$ sont évidemment les sBs^{-1} , où B parcourt l'ensemble des groupes de Borel qui contiennent $\text{Supp } \tau$; w transforme donc en lui-même l'ensemble des éléments semi-réguliers. De plus, on a, pour $\theta \in K^*$, $(w \cdot \tau)(\theta) = s \tau(\theta) s^{-1}$, d'où, pour $x \in G/B_0$,

$$((w \cdot \tau)(0)) \cdot x = s \cdot (\tau(0) \cdot (s^{-1} \cdot x)) .$$

Supposons que τ soit semi-régulier et que $\tau(0) \cdot x = x_0$ pour tout x d'une partie ouverte non vide U de G/B_0 ; on a alors $((w \cdot \tau)(0)) \cdot x = s \cdot x_0$ pour tout $x \in s \cdot U_0$, et par suite

$$B(w \cdot \tau) = sB(\tau)s^{-1} .$$

Comme on sait que les groupes de Borel contenant T sont permutés entre eux de manière simplement transitive par les opérations du normalisateur de T , on en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 9.- Pour tout groupe de Borel B contenant le tore maximal T , il y a une chambre $\mathcal{C}(B)$ de $\Gamma(T)$ associée à B ; les opérations du groupe de Weyl dans $\Gamma(T)$ permutent les chambres entre elles de manière simplement transitive.

PROPOSITION 10.- Soit \mathcal{C} une chambre de $\Gamma(T)$; il existe un certain nombre de formes linéaires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sur $\Gamma(T)$ telles que \mathcal{C} soit l'ensemble des $\tau \in \Gamma(T)$ tels que $\lambda_i(\tau) > 0$ ($1 \leq i \leq m$).

En effet, on a vu qu'il existe des formes linéaires χ_1, \dots, χ_n sur $\Gamma(T)$ et un indice i_0 tels que \mathcal{C} soit l'ensemble des τ tels que $\chi_{i_0}(\tau) < \chi_i(\tau)$ pour tout $i \neq i_0$.