BRUNO KAHN

La conjecture de Milnor

Astérisque, tome 245 (1997), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 834, p. 379-418
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1996-1997__39__379_0>

Séminaire Bourbaki
49ème année, 1996-97, n° 834

Juin 1997

LA CONJECTURE DE MILNOR
d'après V. Voevodsky

par **Bruno KAHN**

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **2**

1. Résultats antérieurs et premières réductions **5**

1.1. Résultats connus antérieurement

1.2. Nettoyages

2. Cohomologie motivique **8**

3. Corps dont la K-théorie de Milnor est divisible **12**

4. Variétés de déploiement **14**

4.1. Corps de déploiement

4.2. Variétés de déploiement

5. Homotopie des variétés algébriques **20**

5.1. Topologie de Nisnevich

5.2. Catégorie homotopique

5.3. Deux cercles

5.4. T-spectres

5.5. Théories cohomologiques et homologiques

5.6. Spectres d'Eilenberg-Mac Lane et cohomologie motivique

6. Opérations de Steenrod en cohomologie motivique **24**

7. Démonstration du théorème 6.6 **26**

7.1. Réalisation topologique

7.2. Espaces de Thom et cobordismes algébriques

7.3. Le théorème principal

8. Démonstration du théorème 4.16 **32**
8.1. Le motif de Rost
8.2. Zéro-cycles à coefficients dans les unités
9. Compléments **36**
9.1. Le motif de Rost-Voevodsky
9.2. (v_n, l)-variétés et variétés de déploiement génériques
BIBLIOGRAPHIE **38**

Introduction

Soit F un corps commutatif. La *K-théorie de Milnor* de F est l'anneau gradué $K_*^M(F)$ défini par générateurs et relations de la manière suivante :

- Générateurs : $\{a\}$, $a \in F^*$.
- Relations : $\{ab\} = \{a\} + \{b\}$ $(a, b \in F^*)$, $\{a\} \cdot \{1-a\} = 0$ $(a \in F^* - \{1\})$.

En d'autres termes, $K_*^M(F)$ est le quotient de l'algèbre tensorielle du $\mathbf{Z}$-module F^* par l'idéal bilatère engendré par les $a \otimes (1-a)$ pour $a \neq 1$. On a $K_0(F) = \mathbf{Z}$, $K_1(F) = F^*$. Pour $a_1, \dots, a_n \in F^*$, le produit $\{a_1\} \cdot \dots \cdot \{a_n\} \in K_n^M(F)$ est noté $\{a_1, \dots, a_n\}$. Pour $a \neq 1$, les relations

$$\{a, 1-a\} = 0$$
$$\{a^{-1}, 1-a^{-1}\} = 0$$

et la bilinéarité entraînent

$$\{a, -a\} = 0$$

d'où, encore par bilinéarité

$$\{a, b\} = -\{b, a\} \quad \text{pour } a, b \in F^*.$$

L'anneau gradué $K_*^M(F)$ est donc *commutatif.*

Les groupes $K_n^M(F)$ ont été introduits dans [22] par Milnor, qui était motivé par le fait que $K_2^M(F) = K_2(F)$ (théorème de Matsumoto).

Soit m un entier premier à l'exposant caractéristique de F, et soit F_s une clôture séparable de F. La suite exacte de Kummer

$$1 \to \mu_m \to F_s^* \xrightarrow{m} F_s^* \to 1$$

fournit un homomorphisme

$$(1) \qquad \begin{aligned} F^* &\to H^1(F, \mu_m) \\ a &\mapsto (a) \end{aligned}$$

vers la cohomologie galoisienne de F.

LEMME 1 (Tate). — *L'homomorphisme* (1) *se prolonge par le cup-produit en une famille d'homomorphismes*

$$K_n^M(F)/m \xrightarrow{u_{n,m}(F)} H^n(F, \mu_m^{\otimes n}).$$

Cela revient à voir que $(a) \cup (1-a) = 0$ dans $H^2(F, \mu_m^{\otimes 2})$, pour tout $a \in F^*$. Pour cela, considérons l'algèbre étale $E = F[t]/t^m - a$. Si α est l'image de t dans E, on a

$$\alpha^m = a$$
$$N_{E/F}(1-\alpha) = 1-a.$$

En utilisant la formule de projection en cohomologie étale, il en résulte :

$$(a) \cup (1-a) = \mathrm{Cor}_{E/F}((a) \cup (1-\alpha)) = \mathrm{Cor}_{E/F}(m(\alpha) \cup (1-\alpha)) = 0. \qquad \square$$

Les homomorphismes $u_{n,m}(F)$ sont parfois appelés, pour des raisons historiques, *homomorphismes de résidu normique.* Notons $K(n,m,F)$ l'énoncé suivant :

$(K(n,m,F))$ L'homomorphisme $u_{n,m}(F)$ du lemme 1 est bijectif.

Kato a proposé la conjecture suivante :

CONJECTURE 1 ([14, conj. 1]). — *$K(n,m,F)$ est vrai pour tout (n,m,F).*

Pour $n = 2$, cette conjecture avait été indiquée par Milnor lui-même [22, p. 540], et Bloch [6, lecture 5] avait posé la question de la surjectivité des $u_{n,m}$ lorsque F est un corps de fonctions sur $\mathbf{C}$ (notons que, dans ce cas, la surjectivité équivaut au fait que l'algèbre de cohomologie $H^*(F, \mathbf{Z}/m)$ est engendrée en degré 1).

La conjecture de Kato a été démontrée dans un grand nombre de cas particuliers (voir 1.1). Elle vient d'être démontrée dans le cas 2-primaire par Voevodsky :

THÉORÈME 1 ([48]). — *$K(n,m,F)$ est vrai pour tout (n,F) lorsque m est une puissance de 2.*

La démonstration de Voevodsky est par récurrence sur n : elle est exposée dans les prochaines sections[1]. Contrairement aux démonstrations précédentes, qui utilisaient la

[1]Le rédacteur ne prétend pas avoir vérifié les moindres ramifications de cette démonstration, qui s'appuie sur un travail antérieur considérable (notamment [12], [42], [44], [45]). Il a par contre vérifié les arguments de [48] dans un détail suffisant pour juger que son contenu mérite d'être exposé dans ce séminaire. Néanmoins, il doit souligner que la démonstration de [48] ne sera complète que lorsque les articles [26] et [47], sur lesquels elle repose, seront achevés et rendus publics.

K-théorie algébrique, elle n'utilise "que" la *cohomologie motivique*, qu'il a contribué a développer (voir à ce sujet l'exposé de E. Friedlander dans ce séminaire). Malgré cela, la topologie algébrique y joue un rôle essentiel, sous la forme de la catégorie homotopique (et de la catégorie homotopique stable) des variétés, introduite par Morel et Voevodsky [25], [46], [26]. Les arguments de Voevodsky n'utilisent pas non plus de réduction aux corps de nombres, comme c'était le cas pour certaines des démonstrations antérieures.

Pour le lecteur qui ne souhaiterait pas se plonger dans les détails, nous en donnons ici un résumé. Il est facile de voir qu'on peut se limiter au cas où F est de caractéristique 0, voire un sous-corps de $\mathbf{C}$ (corollaire 1.4 et proposition 1.5). On suppose la conjecture connue en degré $n-1$. La première étape, largement inspirée de (mais non identique à) la stratégie antérieure de Merkurjev-Suslin, réduit le problème à démontrer un "théorème 90 de Hilbert en degré n" (corollaire 2.6) : celui-ci est exprimé en termes de cohomologie motivique. La deuxième étape, toujours inspirée par Merkurjev-Suslin, consiste à réduire ce théorème 90 à l'existence d'une variété de déploiement convenable pour un symbole $a \in K_n^M(F)/2$, c'est-à-dire une variété intègre X_a telle que a s'annule par extension des scalaires de F à $F(X_a)$: on.prend pour X_a la quadrique projective définie par une voisine de dimension $2^{n-1}+1$ de la forme de Pfister associée à a. Ici la stratégie diverge de celle de Merkurjev-Suslin : Voevodsky montre qu'il suffit d'établir la nullité d'un certain groupe de cohomologie motivique d'un schéma simplicial $\check{C}(X_a)$ associé à X_a (proposition 4.4 et théorème 4.9). Cette approche simplifie grandement celle de Merkurjev et Suslin, qui étaient obligés de démontrer une multitude d'énoncés parasites.

Toutes les démonstrations antérieures de cas particuliers de la conjecture de Kato utilisent le fait que, pour une variété de déploiement convenable X associée comme ci-dessus à un symbole, le groupe des "zéros-cycles à coefficients dans les unités modulo l'équivalence rationnelle"

$$A_0(X, K_1)$$

s'injecte dans F^* par l'intermédiaire de la norme (voir section 8). Pour $l=2$, ce résultat est démontré par M. Rost en tout degré (théorème 8.5). Grâce à une décomposition du motif de Chow de X_a, également due à Rost (théorème 8.1), Voevodsky montre que cette injectivité est équivalente à la nullité d'un *autre* groupe de cohomologie motivique de $\check{C}(X_a)$ (théorème 4.16). Sa contribution essentielle est alors de relier le premier groupe au deuxième par une opération cohomologique α, qu'il va montrer être injective.

Pour définir α, Voevodsky utilise la *catégorie homotopique des F-variétés*, qu'il construit conjointement avec F. Morel. Elle lui permet de définir des opérations de Steenrod en cohomologie motivique, analogues à celles existant en topologie algébrique, et α est une version entière de l'une de ces opérations. Supposant F plongé dans $\mathbf{C}$, l'injectivité de α sur la cohomologie motivique de la variété X_a résulte d'une part de l'existence d'une classe fondamentale dans le bordisme algébrique de X_a, et d'autre part du fait que la classe de $X_a(\mathbf{C})$ en $(n-1)$-ième K-théorie de Morava est un générateur périodique, ce qui établit un lien mystérieux entre la démonstration de Voevodsky et des objets intervenant dans des propriétés profondes de la catégorie homotopique stable classique ([10], [31], [32]) ...

Une partie considérable de l'argument de Voevodsky s'applique au cas d'un nombre premier quelconque. Nous nous sommes efforcé de mettre en évidence cette généralité ; on en trouvera les fruits dans la section 9.1. Pour avoir tous les détails de la démonstration, le lecteur devra naturellement consulter [48], ainsi que les articles dont il dépend. Nous l'encourageons également à lire [46], ancêtre direct de [48], qui contient des commentaires éclairants ayant disparu de ce dernier article.

Supposons F de caractéristique différente de 2. Soient $W(F)$ l'*anneau de Witt* de F, classifiant les formes quadratiques non dégénérées sur F, IF son idéal d'augmentation et, pour tout $n > 0$, $I^nF = (IF)^n$. Le groupe abélien IF est engendré par les classes des formes binaires $< 1, -a >$ pour $a \in F^*$; le groupe I^nF est donc engendré par les classes des *n-formes de Pfister* $\ll a_1, \dots, a_n \gg := < 1, -a_1 > \otimes \dots \otimes < 1, -a_n >$. L'application $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \ll a_1, \dots, a_n \gg$ induit un homomorphisme surjectif

$$K_n^M(F)/2 \to I^nF/I^{n+1}F. \tag{2}$$

En collaboration avec D. Orlov et A. Vishik, Voevodsky a annoncé une démonstration du fait que (2) est *bijectif* pour tout (n, F) ; cela avait été également conjecturé par Milnor. Nous n'aborderons pas ici cet aspect de son travail, qui utilise essentiellement les mêmes méthodes (*cf.* [28]).

Je remercie Fabien Morel pour son aide dans la préparation de ce texte.

NOTATION. Si A est un foncteur sur la catégorie des extensions de F, si $a \in A(F)$ et si E est une extension de F, on note a_E l'image de a dans $A(E)$.

1. RÉSULTATS ANTÉRIEURS ET PREMIÈRES RÉDUCTIONS

1.1. Résultats connus antérieurement

Notons $K(n, m)$ l'énoncé $\{K(n, m, F)$ pour tout corps F de caractéristique ne divisant pas $m\}$.

L'énoncé $K(0,m,F)$ dit que le groupe de cohomologie galoisienne $H^0(F,\mathbf{Z}/m)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/m$: c'est trivial.

L'énoncé $K(1,m,F)$ dit que le groupe $H^1(F,\mu_m)$ est isomorphe à F^*/F^{*m}. Ce résultat, classique, est connu sous le nom de *théorie de Kummer*. Lorsque $\mu_m \subset F$, il équivaut au fait que les caractères d'ordre divisant m du groupe de Galois $G_F = Gal(F_s/F)$ correspondent bijectivement aux éléments de F^*/F^{*m}, après le choix d'une racine primitive m-ième de l'unité. L'injectivité de $u_{1,m}(F)$ résulte immédiatement de sa définition ; sa surjectivité résulte du théorème 90 de Hilbert (ou plutôt de la version d'Emmy Noether de ce théorème) :

$$H^1(F,F_s^*) = 0.$$

La démonstration de $K(2,m,F)$ est due à Tate pour les corps globaux [43] ; Tate utilise la théorie du corps de classes. La démonstration de $K(2,m)$ est due à Merkurjev pour $m = 2$ [18] et à Merkurjev-Suslin pour m quelconque [20]. Elle utilise la K-théorie algébrique de Quillen ; voir l'exposé Bourbaki de Soulé à ce sujet [39].

La démonstration de $K(3,2)$ est due indépendamment à Rost [33] et à Merkurjev-Suslin [21]. La démonstration de Merkurjev-Suslin utilise la K-théorie algébrique, alors que celle de Rost ne l'utilise pas. Une démonstration de $K(4,2)$ a été annoncée par Rost vers 1988, mais celui-ci ne l'a jamais rédigée.

Rost et Voevodsky ont récemment annoncé une démonstration de $K(3,3)$ et de $K(4,3)$ (voir section 9.1).

Enfin, en dehors des cas cités ci-dessus, $K(n,m,F)$ est connu pour des corps F particuliers :

- *Corps globaux* : $K(n,m,F)$ est connu pour tout (n,m) avec $n \geq 3$ (Bass-Tate [5]). Bass et Tate démontrent plus : pour $n \geq 3$, le groupe $K_n^M(F)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^{r_1}$, où r_1 est le nombre de places réelles de F.
- *Corps henséliens* : soit F un corps de caractéristique 0, hensélien pour une valuation discrète, à corps résiduel de caractéristique $p > 0$. Alors $K(n,p,F)$ est connu pour tout n (Bloch-Gabber-Kato [7]).

1.2. Nettoyages

PROPOSITION 1.1. — *a) Soient m_1, m_2 deux entiers premiers entre eux. Alors, pour tout corps F de caractéristique première à m_1m_2 et pour tout $n \geq 0$, $K(n,m_1m_2,F) \iff \{K(n,m_1,F)$ et $K(n,m_2,F)\}$.*
b) (Tate) Soient $m \geq 1$, F un corps de caractéristique première à m et E/F une extension de degré premier à m. Soit $n \geq 0$. Alors $K(n,m,E) \Rightarrow K(n,m,F)$.

c) (Tate) Soit l un nombre premier. Alors, pour tout corps F de caractéristique différente de l, $\{K(n-1,l,F)$ et $K(n,l,F)\} \Rightarrow \{K(n,l^\nu,F)$ pour tout $\nu \geq 1\}$.

Démonstration. a) est clair. Pour démontrer b), on remarque que les deux foncteurs $F \mapsto K_n^M(F)$ et $F \mapsto H^n(F,\mu_m^{\otimes n})$ sont munis de transferts

$$N_{E/F} : \begin{cases} K_n^M(E) & \to K_n^M(F) \\ H^i(E,\mu_m^{\otimes n}) & \to H^n(F,\mu_m^{\otimes n}) \end{cases}$$

pour toute extension finie E/F, vérifiant la formule de projection et tels que $N_{E/F} \circ i_{E/F}$ soit la multiplication par le degré $[E:F]$, où $i_{E/F}$ correspond à la fonctorialité (c'est classique pour la cohomologie galoisienne, *cf.* [38]; voir [5, §5] et [14, §1.7] pour la K-théorie de Milnor), et que ces transferts commutent à l'homomorphisme $u_{n,m}$.

Pour démontrer c), on se réduit via b) au cas où F contient une racine primitive l-ième de l'unité ζ : en effet, le degré $[F(\mu_l):F]$ divise $l-1$, donc est premier à l. On raisonne par récurrence sur ν, en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
K_{n-1}^M(F)/l & \xrightarrow{\{\zeta\}\cdot} & K_n^M(F)/l^\nu & \longrightarrow & K_n^M(F)/l^{\nu+1} & \longrightarrow & K_n^M(F)/l & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle u_{n-1,l}}\downarrow & & {\scriptstyle u_{n,l^\nu}}\downarrow & & {\scriptstyle u_{n,l^{\nu+1}}}\downarrow & & {\scriptstyle u_{n,l}}\downarrow & & \\
H^{n-1}(F,\mu_l^{\otimes(n-1)}) & \xrightarrow{\rho} & H^n(F,\mu_{l^\nu}^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(F,\mu_{l^{\nu+1}}^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(F,\mu_l^{\otimes n}) & &
\end{array}$$

où ρ est le cup-produit par la classe $[\zeta]$ de ζ dans $H^0(F,\mu_l) = \mu_l$ suivi du Bockstein ∂ associé à la suite exacte de coefficients

$$(A_n) \qquad 0 \to \mu_{l^\nu}^{\otimes n} \to \mu_{l^{\nu+1}}^{\otimes n} \to \mu_l^{\otimes n} \to 0.$$

Dans ce diagramme, la ligne inférieure est exacte, et la ligne supérieure est exacte sauf peut-être en $K_n^M(F)/l^\nu$. La commutativité du diagramme est évidente, sauf celle du carré de gauche. Pour vérifier cette dernière, on remarque que, si $x \in K_{n-1}^M(F)$, son image y par $u_{n-1,l}$ provient de $\tilde{y} = u_{n-1,l^{\nu+1}}(x) \in H^{n-1}(F,\mu_{l^{\nu+1}}^{\otimes(n-1)})$, et donc que

$$\rho(y) = \partial([\zeta] \cup y) = \partial([\zeta]) \cup \tilde{y} = (\zeta) \cup \tilde{y} = u_{n,l^\nu}(\{\zeta\} \cdot x).$$

L'énoncé résulte alors d'une chasse aux diagrammes. □

PROPOSITION 1.2. — *Soit E un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel F. Alors, pour tout m premier à la caractéristique de F et tout $n \geq 1$, on a $K(n,m,E) \iff \{K(n,m,F)$ et $K(n-1,m,F)\}$.*

En effet, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_n^M(F)/m & \longrightarrow & K_n^M(E)/m & \longrightarrow & K_{n-1}^M(F)/m & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle u_{n,m}(F)}\downarrow & & {\scriptstyle u_{n,m}(E)}\downarrow & & {\scriptstyle u_{n-1,n}(F)}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^n(F,\mu_m^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(E,\mu_m^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^{n-1}(F,\mu_m^{\otimes(n-1)}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

La ligne supérieure est exacte scindée par le choix d'une uniformisante de E [22, lemma 2.6], ainsi que la ligne inférieure, *cf.* [38, p. 121, (2.2)]. On vérifie facilement que ce diagramme est commutatif [22, p. 341] et que les deux scindages sont compatibles. La proposition résulte alors du lemme des 5. $\square$

COROLLAIRE 1.3. — $K(n,m) \Rightarrow K(n-1,m)$.

Démonstration. On applique la proposition 1.2 avec $E = F((t))$. $\square$

COROLLAIRE 1.4. — *$K(n,m)$ en caractéristique 0 implique $K(n,m)$ en toute caractéristique première à n.*

Démonstration. Soit F un corps de caractéristique $p > 0$ première à m. D'après la proposition 1.1 b), pour démontrer $K(n,m,F)$, on peut supposer F parfait. On applique alors la proposition 1.2 en prenant pour E le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de F. $\square$

Pour démontrer le théorème 1, on peut donc supposer que $m = 2$ et que F est un corps de caractéristique 0. Cela servira à disposer non seulement de la résolution des singularités, mais aussi d'un "foncteur de réalisation" de la catégorie homotopique des F-schémas vers la catégorie homotopique classique, associé à un plongement de F dans $\mathbf{C}$, si par exemple F est de type fini sur $\mathbf{Q}$ (voir section 7.1). Cette hypothèse supplémentaire est innocente en vertu de la

PROPOSITION 1.5. — *Soit F un corps. Si $K(n,m,k)$ est vrai pour tout sous-corps $k \subset F$ de type fini sur son sous-corps premier, alors $K(n,m,F)$ est vrai.*

C'est clair, puisque la K-théorie de Milnor et la cohomologie galoisienne commutent aux limites inductives filtrantes. $\square$

2. COHOMOLOGIE MOTIVIQUE

Soit F un corps. A tout F-schéma lisse de type fini X, Suslin et Voevodsky [42, §2] associent une famille de complexes de groupes abéliens $\mathbf{Z}(n,X)_{n\geq 0}$, contravariants en X et commutant aux limites projectives à morphismes de transition affines. Pour chaque $n \geq 0$, les $\mathbf{Z}(n,X)$ définissent donc un complexe de faisceaux $\mathbf{Z}(n)$ sur le grand site zariskien de $\operatorname{Spec} F$ restreint à la sous-catégorie pleine des F-schémas lisses. Ces complexes de faisceaux ont les propriétés suivantes :

(A) $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}$, concentré en degré 0.

(B) $\mathbf{Z}(1)$ est quasi-isomorphe à $\mathbb{G}_m[-1]$ (le faisceau des unités placé en degré cohomologique 1).

(C) Pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{Z}(n)$ est acyclique en degré $> n$.

(D) Pour $m, n \geq 0$, il existe un produit $\mathbf{Z}(m) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}(n) \to \mathbf{Z}(m+n)$. Ce produit est commutatif et associatif à homotopie près.

(E) Pour tout m premier à l'exposant caractéristique de F, $\alpha^*\mathbf{Z}(n) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/m$ est quasi-isomorphe à $\mu_m^{\otimes n}$, où α est la projection du grand site étale de $\operatorname{Spec} F$ sur son grand site zariskien.

(F) $\mathbf{Z}(n)$ est un complexe de faisceaux avec transferts, à faisceaux de cohomologie invariants par homotopie, au sens de [44].

(G) $\mathbb{H}^n(\operatorname{Spec} F, \mathbf{Z}(n)) = K_n^M(F)$ [42, §3].

Pour plus de détails, voir l'exposé de Friedlander.

Pour tout groupe abélien A, on note $A(n)$ le complexe $\mathbf{Z}(n) \overset{L}{\otimes} A$. On note $H_B^*(X, A(n))$ (*resp.* $H_L^*(X, A(n))$) les groupes d' hypercohomologie $\mathbb{H}^*_{\mathrm{Zar}}(X, A(n))$ (*resp.* $\mathbb{H}^*_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \alpha^* A(n))$). Pour $X = \operatorname{Spec} F$, on convient de noter simplement ces groupes $H_B^*(F, A(n))$ et $H_L^*(F, A(n))$.

Comme on ne sait pas pour $n \geq 2$ si $\mathbf{Z}(n)$ est cohomologiquement borné à gauche (c'est une conjecture), il est bon de rappeler la définition de l'hypercohomologie d'un complexe non borné et de vérifier quelques propriétés des groupes ci-dessus (ces points sont quelque peu passés sous silence dans [42] et [48]). Si X est un site et C un complexe de faisceaux sur X, à valeurs dans les groupes abéliens, $\mathbb{H}^*(X, C)$ est la cohomologie d'un complexe $\mathcal{F}$ K-injectif au sens de [40], quasi-isomorphe à C. Si X est de dimension cohomologique finie, on a des suites exactes :

$$(3) \qquad 0 \to \varprojlim{}^1 \mathbb{H}^{q-1}(X, \tau_{\geq n} C) \to \mathbb{H}^q(X, C) \to \varprojlim \mathbb{H}^q(X, \tau_{\geq n} C) \to 0.$$

Si C est cohomologiquement borné à gauche ou si X est de dimension cohomologique finie d, on a des suites spectrales d'hypercohomologie fortement convergentes :

$$(4) \qquad I_1^{p,q} = H^q(X, C^p) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, C) \Leftarrow H^p(X, \mathcal{H}^q(C)) = II_2^{p,q}.$$

On aura aussi besoin de la cohomologie motivique de certains schémas simpliciaux. Si $x_\bullet$ est un objet simplicial de X, on définit $\mathbb{H}^*(x_\bullet, C)$ comme étant la cohomologie du complexe total associé au complexe cosimplicial $\mathcal{F}(x_\bullet)$, où $\mathcal{F}$ est comme ci-dessus. Si C est cohomologiquement borné à gauche ou si $x_\bullet$ est de dimension finie, on a une suite spectrale fortement convergente :

$$(5) \qquad E_1^{p,q} = \mathbb{H}^q(x_p, C) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(x_\bullet, C).$$

Si $x_\bullet^{(r)}$ est un système inductif d'objets simpliciaux, de limite inductive $x_\bullet$, on a des suites exactes analogues à (3) :

$$(6) \qquad 0 \to \varprojlim{}^1 \mathbb{H}^{q-1}(x_\bullet^{(r)}, C) \to \mathbb{H}^q(x_\bullet, C) \to \varprojlim \mathbb{H}^q(x_\bullet^{(r)}, C) \to 0.$$

Pour tout nombre premier l, notons $\mathbf{Z}_{(l)}$ le localisé de $\mathbf{Z}$ en l.

PROPOSITION 2.1. — *Pour tout corps F et tout nombre premier $l \neq \operatorname{car} F$,*
a) L'application naturelle $H^q_B(F, \mathbf{Q}(n)) \to H^q_L(F, \mathbf{Q}(n))$ est un isomorphisme pour tout $q \in \mathbf{Z}$.
b) Le foncteur $F \mapsto H^q_L(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$, où $l \neq \operatorname{car} F$, commute aux limites inductives pour tout $q \in \mathbf{Z}$.
c) $H^q_L(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$ est de torsion pour $q > n$.

Démonstration. a) Plus généralement, pour tout corps F et tout complexe de faisceaux de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels K sur le grand site zariskien de $\operatorname{Spec} F$, munis de transferts au sens de [44], l'application $H^q(K(F)) \to \mathbb{H}^q_{\text{ét}}(F, \alpha^* K)$ est un isomorphisme. Si K est réduit à un faisceau, c'est dû à l'existence de transferts et au fait que la cohomologie galoisienne d'un G_F-module est de torsion en degré > 0. En général, on note qu'un corps est de $\mathbf{Q}$-dimension cohomologique étale 0, et qu'on peut donc appliquer la suite spectrale II de (4).

b) Il suffit de démontrer l'énoncé analogue pour les groupes de cohomologie à coefficients $\mathbf{Q}(n)$ et $\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(n)$. Dans le premier cas, cela résulte de a) ; dans le deuxième, cela résulte de la propriété (E) de $\mathbf{Z}(n)$ et de la commutation bien connue de la cohomologie étale d'un faisceau aux limites inductives filtrantes.

c) Cela résulte de a) et des propriétés (C) et (E) de $\mathbf{Z}(n)$. □

Soit l un nombre premier différent de $\operatorname{car} F$. Considérons l'énoncé suivant :

$(H90(n,l,F))$ Pour tout $i \leq n$, $H^{i+1}_L(F, \mathbf{Z}_{(l)}(i)) = 0$.

Exemples 2.2. —

(1) $n = 0$: l'énoncé se traduit en $H^1_{\text{ét}}(F, \mathbf{Z}_{(l)}) = 0$. C'est clair, puisque le groupe de Galois G_F, profini, n'a pas de caractères continus d'ordre infini.
(2) $n = 1$: l'énoncé se traduit en le précédent et $H^1_{\text{ét}}(F, \mathbb{G}_m) \otimes \mathbf{Z}_{(l)} = 0$. C'est la version d'Emmy Noether du théorème 90 de Hilbert.

Notons $H90(n,l)$ l'énoncé $\{H90(n,l,F)$ pour tout corps F de caractéristique $0\}$. Par ailleurs, notons $B(n)$ le complexe de faisceaux zariskiens $\tau_{\leq n+1} R\alpha_* \alpha^* \mathbf{Z}(n)$: on a un morphisme naturel

(B_n) $$\mathbf{Z}(n) \to B(n)$$

sur le grand site zariskien de $\operatorname{Spec} \mathbf{Q}$.

THÉORÈME 2.3 ([48, th. 2.11]). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $H90(n,l)$ est vrai.
(ii) Pour tout $i \leq n$, le morphisme $(B_i) \otimes \mathbf{Z}_{(l)}$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i) est clair, d'après la propriété (C) de $\mathbf{Z}(n)$. Pour voir la réciproque, introduisons le cône $K(i)$ du morphisme $(B_i) \otimes \mathbf{Z}_{(l)}$: c'est un complexe de faisceaux sur le grand site zariskien de $\operatorname{Spec} F$, et il faut montrer qu'il est acyclique. Pour tout anneau local A d'une F-variété lisse X, il résulte de la propriété (F) de $\mathbf{Z}(i)$ que $\mathbb{H}^*(\operatorname{Spec} A, K(i)) \to \mathbb{H}^*(\operatorname{Spec} E, K(i))$ est injectif ("conjecture de Gersten", [44, cor. 4.17]). Cela ramène à démontrer, sans perte de généralité, que $\mathbb{H}^*(F, K(i)) = 0$. D'après la proposition 2.1 c), $\mathbb{H}^*(F, K(i) \otimes \mathbf{Q}) = 0$. Il reste à voir que $\mathbb{H}^*(F, K(i) \overset{L}{\otimes} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) = 0$, c'est-à-dire que $H^q_B(F, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i)) \to H^q_L(F, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l(i))$ est bijectif pour $q \leq i$. Or :

LEMME 2.4. — *Si $H90(n, l, F)$ est vrai, alors, pour tout $i \leq n$, le Bockstein*

$$H^i(F, \mu_{l^\nu}^{\otimes i}) \to H^{i+1}(F, \mu_l^{\otimes i})$$

associé à la suite exacte (A_i) est nul.

En effet, la propriété (E) du complexe $\mathbf{Z}(i)$ implique que ce Bockstein se factorise par le Bockstein

$$H^i(F, \mu_{l^\nu}^{\otimes i}) \to H^{i+1}_B(F, \mathbf{Z}_{(l)}(i)) = 0$$

associé au triangle distingué $\alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(i) \xrightarrow{l^\nu} \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(i) \to \alpha^*\mathbf{Z}/l^\nu(i) \to \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(i)[1]$. La conclusion résulte maintenant de [42, prop. 7.1 et th. 5.9] (voir l'exposé de Friedlander, prop. 6.5). $\square$

Remarque 2.5. — L'hypothèse de caractéristique 0 intervient dans la démonstration de [42, th. 5.9], qui utilise la résolution des singularités.

COROLLAIRE 2.6. — *$H90(n, l) \Rightarrow K(n, l)$.*

Vu les propriétés (E) et (G) de $\mathbf{Z}(n)$, il suffit d'appliquer le foncteur $C \mapsto \mathbb{H}^n_{\mathrm{Zar}}(F, C \overset{L}{\otimes} \mathbf{Z}/l)$ au morphisme (B_n) et de tenir compte du corollaire 1.4. $\square$

Dans la section suivante, on aura également besoin du

COROLLAIRE 2.7 (théorème 90 de Hilbert pour K_n^M, [48, cor. 2.14]). — *Supposons que $H90(n, l)$ soit vrai. Soient F un corps de caractéristique 0, E/F une extension cyclique de degré l^ν $(\nu \geq 1)$ et σ un générateur de son groupe de Galois. Alors la suite*

$$K_n^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_n^M(F) \tag{7}$$

est exacte.

Démonstration. Soit $G = Gal(E/F)$. On a une suite exacte de G_F-modules

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z} \to 0$$

que l'on considère comme un complexe K de faisceaux sur le petit site étale de $\operatorname{Spec} F$. On a donc

$$Ext^q_{F,\text{ét}}(K, \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(n-1)) = 0 \quad \text{pour tout} \quad q \in \mathbf{Z}.$$

Notons que $Ext^q_{F,ét}(\mathbf{Z}, \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(n)) = H^q_L(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$ et que $Ext^q_{F,ét}(\mathbf{Z}[G], \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(n)) = H^q_L(E, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$. D'après le théorème 2.3, ces groupes coïncident respectivement avec $H^q_B(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$ et $H^q_B(E, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$ pour $q \leq n+1$. En utilisant une suite spectrale d'hypercohomologie convergeant vers $Ext^*_{F,ét}(K, \alpha^*\mathbf{Z}_{(l)}(n))$ et la propriété (G) de $\mathbf{Z}(n)$, on en déduit que la suite (7) est exacte après tensorisation par $\mathbf{Z}_{(l)}$. Mais l'homologie de (7) est de l^ν-torsion, en vertu de la formule $N_{E/F}(x)_E = \sum_{k=0}^{l^\nu-1} \sigma^k x$; le corollaire 2.7 en résulte.□

Remarque 2.8. — Dans le cas $l = 2$, Merkurjev a démontré indépendamment que la propriété du lemme 2.4 pour $\nu = 1$ entraîne la conjecture de Milnor, sans utiliser la résolution des singularités [19].

Vu le corollaire 2.6, le théorème 1 résulte maintenant du théorème suivant :

THÉORÈME 2.9 ([48, th. 4.1]). — *$H90(n,2)$ est vrai pour tout $n \geq 0$.*

3. CORPS DONT LA K-THÉORIE DE MILNOR EST DIVISIBLE

Le but de cette section est de démontrer :

THÉORÈME 3.1. — *Soit l un nombre premier, et soit F un corps de caractéristique 0, sans extensions finies de degré premier à l, tel que $K_n^M(F) = lK_n^M(F)$. Alors $H90(n-1,l) \Rightarrow H90(n,l,F)$.*

Démonstration. On a besoin de quelques lemmes :

LEMME 3.2 (*cf.* [48, lemma 2.20]). — *Supposons $H90(n-1,l)$ vrai. Soit F un corps de caractéristique 0, sans extensions de degré premier à l. Soit E/F une extension cyclique de degré l telle que la norme $K^M_{n-1}(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K^M_{n-1}(F)$ soit surjective. Alors la suite*

$$K_n^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_n^M(F) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. L'exactitude en $K_n^M(F)$ résulte facilement de l'hypothèse. Pour démontrer l'exactitude en $K_n^M(E)$, on définit un homomorphisme

$$K_n^M(F) \xrightarrow{\varphi} K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E)$$

par la formule

$$\varphi(\{a_1, \dots, a_n\}) = b \cdot \{a_n\}$$

où $b \in K^M_{n-1}(E)$ est tel que $N_{E/F}(b) = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Le corollaire 2.7 implique que $b \cdot \{a_n\} \in K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E)$ ne dépend pas du choix de b. Pour voir que φ est bien défini, il faut vérifier que $b \cdot \{a_n\}$ dépend multilinéairement de $(a_1, \dots, a_n)$, ce qui est immédiat, et que cet élément est nul si $a_1 + a_n = 1$. Pour simplifier, supposons $a_1 \notin F^{*l}$ (l'autre cas est plus facile), et soit $K = F(\sqrt[l]{a_1})$. Soit $c \in K^*$ tel que $c^l = a_1$. Notons que

$$N_{KE/K}(b_{KE}) = N_{E/F}(b)_K = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}_K = l\{c, a_2 \dots, a_{n-1}\}$$

donc que $N_{KE/K}(b_{KE} - \{c, a_2 \dots, a_{n-1}\}) = 0$; en appliquant de nouveau le corollaire 2.7, on obtient un élément $d \in K_{n-1}^M(KE)$ tel que $(1-\sigma)d = b_{KE} - \{c, a_2 \dots, a_{n-1}\}$. Notons aussi que $1 - a_1 = N_{K/F}(1-c)$. On a alors :

$$\begin{aligned} b \cdot \{a_n\} &= b \cdot \{1 - a_1\} = N_{KE/E}(b_{KE} \cdot \{1-c\}) \\ &= N_{KE/E}((b_{KE} - \{c, a_2, \dots, a_{n-1}\}) \cdot \{1-c\}) = N_{KE/E}((1-\sigma)d \cdot \{1-c\}) \\ &= (1-\sigma)N_{KE/E}(d \cdot \{1-c\}) \in (1-\sigma)K_n^M(E). \end{aligned}$$

Il est clair que φ est une section de l'homomorphisme $K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E) \xrightarrow{\nu} K_n^M(F)$ induit par la norme. Reste à voir qu'il est surjectif. Or, d'après Bass-Tate [5, cor. 5.3], $K_n^M(E)$ est engendré par les symboles de la forme $\{b, a_2, \dots, a_n\}$ avec $b \in E^*$ et $a_2, \dots, a_n \in F^*$. On vérifie facilement sur ces symboles que $\varphi \circ \nu$ est l'identité. □

LEMME 3.3 (*cf.* [48, lemma 2.17]). — *Soit F un corps de caractéristique 0, sans extensions de degré premier à l. Supposons $H90(n-1, l)$ vrai. Alors, pour toute extension cyclique E/F de degré l, la suite*

$$H^{n-1}(E, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{N_{E/F}} H^{n-1}(F, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{\cup\chi} H^n(F, \mathbf{Z}/l) \to H^n(E, \mathbf{Z}/l),$$

où $\chi \in H^1(F, \mathbf{Z}/l)$ est un caractère définissant E, est exacte.

Nous renvoyons à [48] pour la démonstration : en effet, pour $l = 2$, ce résultat est vrai sans l'hypothèse $H90(n-1, l)$ (ni d'ailleurs celle que F n'ait pas d'extensions premières à l), *cf.* par exemple [1, cor. 4.6].

LEMME 3.4 ([48, lemma 2.22]). — *Sous l'hypothèse du théorème 3.1, on a $K_n^M(E) = lK_n^M(E)$ pour tout extension finie E/F.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas où E/F est cyclique de degré l. Montrons d'abord que la norme $K_{n-1}^M(E) \xrightarrow{N_{E/F}} K_{n-1}^M(F)$ est surjective : comme son conoyau est de l-torsion, cela résulte de la surjectivité de $K_{n-1}^M(E)/l \xrightarrow{N_{E/F}} K_{n-1}^M(F)/l$. Comme F n'a pas d'extensions de degré premier à l, il contient une racine primitive l-ième de l'unité dont le choix identifie le module galoisien μ_l à $\mathbf{Z}/l$; de plus, on a $E = F(\sqrt[l]{a})$ pour un $a \in F^*$ convenable. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} K_{n-1}^M(E)/l & \xrightarrow{N_{E/F}} & K_{n-1}^M(F)/l & \xrightarrow{\cdot\{a\}} & K_n^M(F)/l = 0 & \longrightarrow & K_n^M(E)/l \\ \downarrow{\scriptstyle u_{n-1,l}} & & \downarrow{\scriptstyle u_{n-1,l}} & & \downarrow{\scriptstyle u_{n,l}} & & \downarrow{\scriptstyle u_{n,l}} \\ H^{n-1}(E, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{N_{E/F}} & H^{n-1}(F, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{\cup(a)} & H^n(F, \mathbf{Z}/l) & \longrightarrow & H^n(E, \mathbf{Z}/l) \end{array} \tag{8}$$

où les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes par le corollaire 2.6 et dont la ligne inférieure est exacte par le lemme 3.3. La surjectivité en résulte.

Soit σ un générateur de $Gal(E/F)$. L'égalité $K_n^M(F) = lK_n^M(F)$ et le lemme 3.2 entraînent facilement que l'endomorphisme $1-\sigma$ de $K_n^M(E)/l$ est surjectif. La conclusion en résulte, puisque $(1-\sigma)^l = 0$. □

Démonstration du théorème 3.1. Montrons que $H^n(F, \mathbf{Z}/l) = 0$: c'est suffisant vu la proposition 2.1 c) et la propriété (E) de $\mathbf{Z}(n)$. Soit $\alpha \in H^n(F, \mathbf{Z}/l)$. Il existe une extension finie galoisienne E/F telle que $\alpha_E = 0$. Grâce au lemme 3.4, on peut supposer par récurrence sur $[E:F]$ que E/F est cyclique de degré l. Soit $E = F(\sqrt[l]{a})$ pour $a \in F^*$. En réutilisant le diagramme (8), on voit facilement que $\alpha = 0$. □

4. VARIÉTÉS DE DÉPLOIEMENT

4.1. Corps de déploiement

DÉFINITION 4.1. — Soient F un corps, $n > 0$ et $x \in K_n^M(F)/l$. On dit qu'une extension K/F est un *corps de déploiement* (*resp.* un *corps de déploiement générique*) pour x si $x_K = 0$ (*resp.* si, pour toute extension E/F, $x_E = 0 \iff$ il existe une F-place de K vers E). On dit qu'une F-variété intègre X est une *variété de déploiement* (*resp.* une *variété de déploiement générique*) pour x si $F(X)$ est un corps de déploiement (*resp.* un corps de déploiement générique) pour x.

Remarque 4.2. — Si la variété X est de plus *propre*, la condition de généricité se traduit sous la forme suivante : pour toute extension E/F, $x_E = 0$ si et seulement si $X \otimes_F E$ a un point rationnel. Cela résulte du critère valuatif de propreté. Si Y est une autre variété de déploiement pour x, il existe donc un F-morphisme d'un ouvert de Y vers X. La pertinence de cette notion apparaîtra dans la section 9.2.

Exemples 4.3. —

(1) F_s est un corps de déploiement pour tout x : en effet, la K-théorie de Milnor de F_s est l-divisible. Cela prouve l'existence de corps de déploiement (et même de corps de déploiement de degré fini sur F).

(2) Pour la démonstration du théorème 2.9, on utilisera des corps de déploiement *génériques* dans le cas où x est un symbole. En voici des exemples :

   (a) $n = 2$. Supposons $\mu_l \subset F$ et choisissons une racine primitive l-ième de l'unité ζ. Pour $a, b \in F^*$, l'algèbre centrale simple $A = \left(\frac{a\, b}{F}\right)_\zeta$ admet une *variété de Severi-Brauer* X : c'est une F-variété projective, lisse, géométriquement intègre, isomorphe à $\mathbf{P}^{l-1}$ si et seulement si A n'est pas à division ([8], [2]). On montre que X est une variété de déploiement générique pour $\{a, b\} \in K_2^M(F)/l$ (Bass-Tate, [23, th. 5.7 et cor. 5.11]).

(b) $n = 3$. Avec les mêmes hypothèses et notations que ci-dessus, soit c un troisième élément de F^*. Notons U la variété affine d'équation $Nrd_A(x) = c$, où Nrd_A est la norme réduite associée à A : c'est une "forme tordue" de SL_l. Il résulte de [20, th. 12.1] que U est une variété de déploiement générique pour $\{a,b,c\} \in K_3^M(F)/l$. Une complétion projective de U est donnée par $X = \{[x,y,t] \in \mathbf{P}(A \oplus A \oplus F) \mid xy = t^2, x^* = yt^{l-2}c, y^* = xt^{l-2}c^{-1}\}$, où $x \mapsto x^* \in A$ est une fonction polynomiale (bien définie!) telle que $xx^* = Nrd_A(x)$, l'immersion ouverte $U \to X$ étant donnée par $x \mapsto [x, x^{-1}, 1]$ (Rost). La variété X n'est toutefois lisse que pour $l = 3$.

(c) $l = 2$. Pour $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (F^*)^n$ la quadrique projective $X_{\underline{a}}$ définie par la n-forme de Pfister $\varphi = \ll a_1, \ldots, a_n \gg$ est une variété de déploiement générique pour $\{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(F)/2$ [11, cor. 3.3]. *Variante* : on remplace φ par une de ses voisines (sous-forme de dimension $> 2^{n-1}$) [17, ex. 4.1].

Pour $x \in K_n^M(F)/l$, notons $D(x)$ la propriété suivante :

$D(x)$ Il existe un corps de déploiement K pour x, de type fini sur F et tel que $H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n)) \to H_L^{n+1}(K, \mathbf{Z}_{(l)}(n))$ soit injectif.

PROPOSITION 4.4. — *Supposons $H90(n-1, l)$ vrai. Supposons de plus que, pour tout corps E de caractéristique 0 et tout $(a_1, \ldots, a_n) \in (E^*)^n$, $D(\{a_1, \ldots, a_n\})$ soit vrai. Alors $H90(n, l)$ est vrai.*

Démonstration. Par l'absurde. Soit $\alpha \in H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n)) - \{0\}$. Choisissons un domaine universel pour F, c'est-à-dire une extension $\tilde{F}/F$, algébriquement close et de degré de transcendance infini. D'après la proposition 2.1 b), l'ensemble des sous-extensions K/F telles que $\alpha_K \neq 0$ est inductif; il a donc un élément maximal E. Ce corps E n'a pas d'extensions finies de degré premier à l (argument de transfert). D'après le théorème 3.1, on a donc $K_n^M(E)/l \neq 0$. Soit $x = \{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(E)/l - \{0\}$. En appliquant $D(x)$, on trouve une extension K/E de type fini, telle que $x_K = 0$ (donc $K \neq E$) et $\alpha_K \neq 0$. Comme K/E est de type fini, K se plonge dans $\tilde{F}$, ce qui contredit la maximalité de E.□

4.2. Variétés de déploiement

Pour toute F-variété intègre X, notons $\check{C}(X)$ le schéma simplicial tel que $\check{C}(X)_n = X^{n+1}$, les faces et dégénérescences étant données par les projections et diagonales partielles. On a une chaîne de morphismes de schémas simpliciaux

$$\operatorname{Spec} F(X) \to X \to \check{C}(X) \to \operatorname{Spec} F$$

où les objets autres que $\check{C}(X)$ sont considérés comme des schémas simpliciaux constants.

LEMME 4.5. — *a) Si X a un point rationnel, les homomorphismes*

$$H_B^*(F, \mathbf{Z}(n)) \to H_B^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n))$$

sont des isomorphismes.

b) Les homomorphismes

$$H_L^*(F, \mathbf{Z}(n)) \to H_L^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n))$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. a) C'est classique : le choix d'un point rationnel de X définit une rétraction r de l'application naturelle

$$H_B^*(F, \mathbf{Z}(n)) \xrightarrow{\alpha} H_B^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n)).$$

Pour prouver que $\alpha \circ r$ est l'identité, on construit comme d'habitude une homotopie de l'identité à l'application correspondant à $\alpha \circ r$ sur un complexe calculant $H_B^*(\check{C}(X), \mathbf{Z}(n))$.

b) C'est clair par le même raisonnement qu'en a) si X a un point rationnel, par exemple si F est algébriquement clos. En général, cela résulte de la comparaison des suites spectrales convergentes

$$H^p(F, \mathbb{H}^q_{\text{ét}}(F_s, K)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_{\text{ét}}(F, K)$$
$$H^p(F, \mathbb{H}^q_{\text{ét}}(\check{C}(X_s), K)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}_{\text{ét}}(\check{C}(X), K)$$

où $X_s = X \otimes_F F_s$ et $K = \mathbf{Q}(n)$ ou $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n)$, *cf.* la démonstration de la proposition 2.1 b). □

Remarque 4.6. — Une démonstration du lemme 4.5 a) plus naturelle d'un point de vue homotopique pourra être obtenue à partir de l'exemple 5.1 et du théorème 6.2 ci-dessous.

DÉFINITION 4.7. — Soit $x \in K_n^M(F)/l$. Une variété de déploiement X pour x est *bonne* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) X est lisse.
(ii) $X_{F(X)}$ est rétracte rationnelle.
(iii) $H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) = 0$.

Rappelons qu'une F-variété intègre X est *rétracte rationnelle* s'il existe un ouvert non vide $U \subset X$ tel que Id_U se factorise par un ouvert d'un espace affine. Cette notion est due à D. Saltman [37].

Exemples 4.8. —

(1) Soit X une *variété projective homogène* sur F : il existe donc un groupe semi-simple G, défini sur F, tel que $X \otimes_F F_s$ soit F_s-isomorphe à $G \otimes_F F_s/P$ pour un F_s-sous-groupe parabolique P convenable de $G \otimes_F F_s$ [9, prop. 4]. Alors X vérifie les hypothèses (i) et (ii) de la définition 4.7. Pour (i), c'est classique ; pour (ii) on utilise la décomposition de Bruhat généralisée qui montre que $X_{F(X)}$ est même $F(X)$-rationnelle [3, th. 21.20] (je remercie Philippe Gille de m'avoir indiqué cette référence). Ceci s'applique aux exemples 4.3 (2) (a) et (c).

(2) La variété U de l'exemple 4.3 (2) (b) vérifie également les hypothèses (i) et (ii) de la définition 4.7 : pour (ii), on remarque que si U a un point rationnel, on peut se ramener à $c = 1$ par multiplicativité de la norme réduite. Il faut donc montrer que $SL_{1,A}$ est rétracte rationnelle. Comme l'indice de A est premier, le théorème de Wang [50] implique que tout élément de norme réduite 1 est produit de commutateurs. En appliquant ceci au point générique η de $SL_{1,A}$, on obtient une factorisation

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & SL_{1,A} \\ & (GL_{1,A})^{2m} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

pour $m \geq 1$ convenable. Cette factorisation s'étend en un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & SL_{1,A} \\ & (GL_{1,A})^{2m} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où V est un ouvert convenable de $SL_{1,A}$, ce qui entraîne facilement la propriété cherchée. (Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène de m'avoir expliqué cette démonstration.)

THÉORÈME 4.9 (*cf.* [48, th. 2.25]). — *Supposons que $H90(n-1,l)$ soit vrai. Soit $x \in K_n^M(F)/l$; supposons que x admette une bonne variété de déploiement. Alors $D(x)$ est vrai.*

Démonstration. On a encore besoin de quelques lemmes :

LEMME 4.10 ([48, th. 2.15]). — *Supposons que $H90(n-1,l)$ soit vrai ; soit $K(n)$ le cône du morphisme (B_n) ci-dessus, localisé en l. Alors $X \mapsto \mathbb{H}^*(X, K(n))$ est un invariant birationnel lorsque X décrit les F-variétés lisses et intègres.*

Démonstration. Il faut montrer que, pour tout ouvert non vide $U \subset X$, $\mathbb{H}^*(X, K(n)) \to \mathbb{H}^*(U, K(n))$ est bijectif. Soit $Z = X - U$. Par récurrence sur $\dim Z$, on se ramène au cas où Z est lisse (considérer son lieu singulier). De la pureté de la cohomologie motivique [42, prop. 2.4] et de la cohomologie étale à coefficients racines de l'unité tordues, on déduit alors que

$$\mathbb{H}^q_Z(X, K(n)) \simeq \mathbb{H}^{q-2c}(Z, K(n-c))$$

où $c = \operatorname{codim}_X(Z)$. La conclusion résulte maintenant du théorème 2.3. □

LEMME 4.11. — *Avec les hypothèses et notations du lemme 4.10, soit $Y \xrightarrow{f} X$ un morphisme dominant de F-variétés lisses et intègres, dont la fibre générique est une variété rétracte rationnelle. Alors $\mathbb{H}^*(X, K(n)) \xrightarrow{f^*} \mathbb{H}^*(Y, K(n))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Grâce au lemme 4.10, on se ramène au cas où X est un corps. En réutilisant si besoin est le lemme 4.10, le lemme 4.11 résulte alors de l'invariance par homotopie de la cohomologie motivique (propriété (F) de $\mathbf{Z}(n)$) et de la cohomologie étale à coefficients racines de l'unité tordues. □

LEMME 4.12. — *Supposons $H90(n-1,l)$ vrai. Soit X une F-variété intègre vérifiant les propriétés* (i) *et* (ii) *de la définition* 4.7. *Alors,*
a) Les homomorphismes

$$\mathbb{H}^*(\check{C}(X), K(n)) \to \mathbb{H}^*(X, K(n)) \to H^*(F(X), K(n))$$

sont des isomorphismes.
b) On a une suite exacte

$$H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) \to H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n)) \to H_L^{n+1}(F(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)).$$

Démonstration. a) C'est clair pour l'homomorphisme de droite, en vertu du lemme 4.10. Si ∂ est une face de $\check{C}(X)_{r+1}$ vers $\check{C}(X)_r$, il résulte du lemme 4.11 que l'application induite par ∂ en $K(n)$-hypercohomologie est un isomorphisme. Pour tout $r \geq 0$, soit $\check{C}(X)^{(r)}$ le r-ième squelette de $\check{C}(X)$. D'après la remarque ci-dessus, les différentielles d_1 sont alternativement nulles et bijectives dans la suite spectrale (5) associée à $\check{C}(X)^{(2r)}$. Il en résulte que cette suite spectrale dégénère et induit des isomorphismes

$$\mathbb{H}^*(\check{C}(X)^{(2r)}, K(n)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^*(X, K(n)), \quad r \geq 0.$$

En particulier, les systèmes projectifs $(\mathbb{H}^*(\check{C}(X)^{(2r)}, K(n)))_{r\geq 0}$ sont constants, et il résulte des suites exactes (6) que les homomorphismes $\mathbb{H}^*(\check{C}(X), K(n)) \to \mathbb{H}^*(\check{C}(X)^{(2r)}, K(n))$ sont des isomorphismes pour tout $r \geq 0$.

b) Cela résulte de a) et du diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc}
0 = H_B^{n+1}(F(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n))) & \longrightarrow & H_L^{n+1}(F(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n))) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(F(X), K(n))) \\
\uparrow & & \uparrow & & \wr\uparrow \\
H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n))) & \longrightarrow & H_L^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n))) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(\check{C}(X), K(n))) \\
 & & \wr\uparrow & & \\
 & & H_L^{n+1}(F, \mathbf{Z}_{(l)}(n))) & &
\end{array}$$

où l'isomorphisme du haut résulte de a), et celui du bas du lemme 4.5 b). □

Le théorème 4.9 résulte immédiatement de la définition 4.7 et du lemme 4.12 b). □

Vu la proposition 4.4 et le théorème 4.9, le théorème 2.9 résulte maintenant du

Théorème 4.13 (*cf.* [48, prop. 4.10]). — *Supposons $H90(n-1,2)$ vrai. Soient $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (F^*)^n$ et $Q_{\underline{a}}$ la quadrique projective de dimension $2^{n-1}-1$ définie par la forme quadratique*

$$\ll a_1, \dots, a_{n-1} \gg \perp < -a_n > .$$

Alors $Q_{\underline{a}}$ est une bonne variété de déploiement pour $\{a_1, \dots, a_n\} \in K_n^M(F)/2$.

Remarque 4.14. — Soient X, Y deux F-variétés lisses et intègres qui sont *stablement équivalentes*, par exemple $X_{F(Y)}$ est $F(Y)$-rationnelle et $Y_{F(X)}$ est $F(X)$-rationnelle. Alors, pour $x \in K_n^M(F)/l$, X est une bonne variété de déploiement pour x si et seulement si Y l'est. Cela résulte facilement du lemme 4.12 b) (voir aussi exemple 5.1).

Dans l'énoncé du théorème 4.13, on pourrait donc remplacer la quadrique $Q_{\underline{a}}$ par la quadrique $X_{\underline{a}}$ associée à la n-forme de Pfister $\ll a_1, \dots, a_n \gg$. Toutefois, l'existence du modèle $Q_{\underline{a}}$ est cruciale pour la démonstration de Voevodsky, comme le montre l'énoncé du théorème 4.15 ci-dessous.

Le théorème 4.13 résulte formellement de la conjonction des deux énoncés suivants, le premier de nature "topologique", le deuxième de nature "arithmétique" :

Théorème 4.15. — *Supposons $H90(n-1,l)$ vrai. Soient F un sous-corps de $\mathbf{C}$ et X une F-variété projective lisse de dimension $d = l^{n-1}-1$ telle que $s_d(X(\mathbf{C})) \not\equiv 0 \pmod{l^2}$, où $s_d(X(\mathbf{C}))$ est le nombre de Chern de $X(\mathbf{C})$ associé au d-ième polynôme de Newton (cf. [24, §16]). Alors il existe une injection*

$$H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) \xrightarrow{\alpha} H_B^{2\frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(\frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1)).$$

Le théorème 4.15 sera démontré dans les sections 6 et 7.3.

Théorème 4.16. — *Supposons $H90(n-1,2)$ vrai. Soient F et $\underline{a}, Q_{\underline{a}}$ comme dans le théorème 4.13. Alors $s_d(Q_{\underline{a}}(\mathbf{C})) \not\equiv 0 \pmod 4$ et $H_B^{2^n-1}(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(2^{n-1})) = 0$.*

Le théorème 4.16 sera démontré dans la section 8. Notons tout de suite que sa première conclusion résulte d'un calcul élémentaire (on trouve $s_d(Q_{\underline{a}}(\mathbf{C})) = 2(2^{2^{n-1}-1} - 2^{n-1} - 1)$, *cf.* [24, problem 16-D]).

Pour la démonstration du théorème 4.15, Voevodsky utilise des opérations de Steenrod en cohomologie motivique. Pour les définir, il faut introduire la *catégorie homotopique stable des schémas* : c'est fait dans la prochaine section.

5. HOMOTOPIE DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

5.1. Topologie de Nisnevich

Soit X un schéma. Un *recouvrement de Nisnevich* de X est une famille $(U_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ de morphismes étales telle que, pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ et $u \in f_i^{-1}(x)$ tel que $\kappa(x) \to \kappa(u)$ soit un isomorphisme. Les recouvrements de Nisnevich définissent une topologie de Grothendieck sur la catégorie Sm/F des F-schémas lisses : la *topologie de Nisnevich* [27]. Les anneaux locaux de cette topologie sont les anneaux locaux henséliens.

5.2. Catégorie homotopique

Soient $Shv_{Nis}(Sm/F)$ le topos associé (faisceaux d'ensembles) et $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$ la catégorie des objets simpliciaux de ce topos. On identifiera, sans plus de commentaires, les objets suivants à des objets de $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$: ensembles simpliciaux (faisceaux constants), F-schémas simpliciaux (faisceaux représentables), faisceaux d'ensembles, F-schémas.

Pour $U \in Sm/F$ et $u \in U$, notons $\mathcal{O}^h_{U,u}$ le hensélisé de l'anneau local de U en u. Alors $\operatorname{Spec} \mathcal{O}^h_{U,u}$ est limite projective de F-schémas lisses U_α ; pour tout $\mathcal{X} \in \Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$, on définit sa fibre $\mathcal{X}_u$ en u comme la limite inductive des ensembles simpliciaux $\mathcal{X}(U_\alpha)$. On dit qu'un morphisme $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$ est une *équivalence faible simpliciale* si, pour tout $U \in Sm/F$ et tout $u \in U$, $\varphi_u = \mathcal{X}_u \to \mathcal{Y}_u$ est une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

Exemple 5.1. — (*cf.* [48, lemma 3.8]) Soit $f : X \to S$ un morphisme de Sm/F. Considérons le schéma simplicial $\check{C}_S(X)$ tel que $\check{C}_S(X)_n = \underbrace{X \times_S \times \cdots \times_S X}_{n+1}$, les faces et dégénérescences étant données par les projections et diagonales partielles (pour $S = \operatorname{Spec} F$, on retrouve l'objet $\check{C}(X)$ considéré ci-dessus). Si f_s a une section pour tout $s \in S$, la projection $\check{C}_S(X) \to S$ est une équivalence faible simpliciale : c'est évident. En particulier, supposons $X = Y \times_F S$ pour un F-schéma lisse Y ; alors, si $Hom_F(S, Y) \neq \emptyset$, la projection $\check{C}(Y) \times_F S \to S$ est une équivalence faible simpliciale.
Prenons par exemple $S = \operatorname{Spec} F$, et pour Y une variété de déploiement générique pour un élément $x \in K^M_n(F)/l$ (*cf.* définition 4.1). Supposons Y propre. Alors le faisceau simplicial $\check{C}(Y)$ est faiblement simplicialement équivalent au faisceau d'ensembles Φ_x défini par

$$\Phi_x(U) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_{F(U)} \neq 0 \\ pt & \text{si } x_{F(U)} = 0 \end{cases}$$

où U décrit les F-schémas lisses intègres et pt désigne un ensemble à 1 élément : cela résulte de la remarque 4.2. Ceci montre que l'objet $\check{C}(Y)$, vu à homotopie près, ne dépend que de x.

Notons $\mathcal{H}_s(\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F))$ la localisation de $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$ par rapport aux équivalences faibles simpliciales. On dit qu'un objet $\mathcal{X} \in \Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$ est $\mathbf{A}^1$-*local* si, pour tout $\mathcal{Y} \in \Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$, $Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y},\mathcal{X}) \to Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y}\times\mathbf{A}^1,\mathcal{X})$ est bijective, et qu'un morphisme $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ de $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$ est une $\mathbf{A}^1$-*équivalence faible* si pour tout objet $\mathbf{A}^1$-local $\mathcal{X}$, l'application correspondante

$$Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y}',\mathcal{X}) \xrightarrow{f^*} Hom_{\mathcal{H}_s}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$$

est bijective. Disons qu'un morphisme φ de $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$ est une *cofibration* (*resp.* une *équivalence faible*) si φ est un monomorphisme (*resp.* une $\mathbf{A}^1$-équivalence faible). D'après [26], ceci munit $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F)$ d'une structure de catégorie de modèles fermée au sens de Quillen [29]. La catégorie homotopique correspondante $\mathcal{H}(F)$ est appelée *catégorie homotopique des F-schémas.*

On a une version pointée $\mathcal{H}_\bullet(F)$ de $\mathcal{H}(F)$, en partant de la catégorie $\Delta^{op}_\bullet Shv_{Nis}(Sm/F)$ des faisceaux d'ensembles simpliciaux pointés, et un foncteur

$$\mathcal{H}(F) \to \mathcal{H}_\bullet(F)$$

induit par le foncteur $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_+ = \mathcal{X} \coprod pt$. Notons que le faisceau simplicial pointé constant réduit à un point est représenté par $\operatorname{Spec} F$. Si $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ sont deux faisceaux simpliciaux pointés, on définit leur *smash produit* $\mathcal{X}\wedge\mathcal{Y}$ comme étant le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{X}(U)\wedge\mathcal{Y}(U)$. Ceci munit $\Delta^{op}_\bullet Shv_{Nis}(Sm/F)$ et $\mathcal{H}_\bullet$ d'une structure monoïdale symétrique, l'objet unité étant S^0 (faisceau constant, que l'on peut décrire comme $(\operatorname{Spec} F)_+$).

5.3. Deux cercles

On définit deux "cercles" $S^1_s, S^1_t \in \Delta^{op}_\bullet Shv_{Nis}(Sm/F)$:

- S^1_s est le cercle simplicial, vu comme faisceau constant.
- S^1_t est le F-schéma $\mathbf{A}^1_F - \{0\}$ pointé par 1, vu comme faisceau représentable (constant comme objet simplicial).

On note également T le faisceau simplicial pointé donné par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{A}^1_F - \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{A}^1_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} F & \longrightarrow & T.\end{array}$$

Dans $\mathcal{H}_\bullet(F)$, on a des isomorphismes $S^1_s \wedge S^1_t \approx T \approx (\mathbf{P}^1_F, 0)$.

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme de $\Delta^{op}_\bullet Shv_{Nis}(Sm/F)$. Le *cône* de f, cône(f), est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto$ cône$(f(U))$. On a un morphisme canonique $\mathcal{Y} \to$

cône(f) qui s'étend comme d'habitude en une suite

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \longrightarrow \text{cône}(f) \longrightarrow S^1_s \wedge \mathcal{X}$$

appelée *suite cofibrante* associée à f.

5.4. T-spectres

DÉFINITION 5.2. — Un *T-spectre* sur F est une suite $\mathbf{E} = (E_i, e_i : T \wedge E_i \longrightarrow E_{i+1})_{i\in\mathbf{Z}}$, où $E_i \in \Delta^{op}_{\bullet} Shv_{Nis}(Sm/F)$ pour tout i. Soient $\mathbf{E} = (E_i, e_i), \mathbf{F} = (F_i, f_i)$ deux T-spectres. Un morphisme $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est la donnée, pour tout i, d'un morphisme $\varphi_i : E_i \longrightarrow F_i$, avec $\varphi_{i+1} \circ e_i = f_i \circ \varphi_i$.

On note $\mathrm{Spect}_T(F)$ la catégorie des T-spectres sur F. En utilisant la structure de modèles fermée sur $\Delta^{op}_{\bullet} Shv_{Nis}(Sm/F)$, on définit comme dans [4] des structures de modèles fermées stable et stricte. On note $\mathcal{SH}(F)$ la catégorie homotopique associée à la structure stable : c'est la *catégorie homotopique stable des F-schémas.*

Soit $\mathcal{X} \in \Delta^{op}_{\bullet} Shv_{Nis}(Sm/F)$. On a le *spectre des suspensions de $\mathcal{X}$* :

$$\Sigma^\infty_T \mathcal{X} = (T^{\wedge i} \wedge \mathcal{X}, Id).$$

Par abus de notation, on notera parfois $\mathcal{X}$ au lieu de $\Sigma^\infty_T \mathcal{X}$. Cette construction induit un foncteur $\mathcal{H}_\bullet(F) \longrightarrow \mathcal{SH}(F)$.

THÉORÈME 5.3 ([48, th. 3.10]). — *Il existe une structure de catégorie tensorielle triangulée sur $\mathcal{HS}(F)$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) Le foncteur de décalage $\mathbf{E} \mapsto \mathbf{E}[1]$ est donné par $\mathbf{E}[1] = S^1_s \wedge \mathbf{E}$.
(ii) Le foncteur Σ^∞_T transforme suites cofibrantes en triangles distingués.
(iii) Le foncteur Σ^∞_T est un foncteur monoïdal symétrique de $(\mathcal{H}_\bullet(F), \wedge)$ vers $(\mathcal{SH}(F), \wedge)$.
(iv) L'objet T de $\mathcal{SH}(F)$ est inversible.

5.5. Théories cohomologiques et homologiques

Fixons des objets S^{-1}_s, S^{-1}_t de $\mathrm{Spect}_T(F)$ et des isomorphismes

$$S^1_s \wedge S^{-1}_s \cong S^0$$
$$S^1_t \wedge S^{-1}_t \cong S^0$$

dans $\mathcal{SH}(F)$. Notons, pour $n \in \mathbf{Z}$,

$$S^n_s = \begin{cases} (S^1_s)^{\wedge n} & \text{pour } n \geq 0 \\ (S^{-1}_s)^{\wedge(-n)} & \text{pour } n \leq 0 \end{cases} \quad S^n_t = \begin{cases} (S^1_t)^{\wedge n} & \text{pour } n \geq 0 \\ (S^{-1}_t)^{\wedge(-n)} & \text{pour } n \leq 0 \end{cases}$$

et, pour $p, q \in \mathbf{Z}$

$$S^{q,p} = S^p_t \wedge S^{q-p}_s.$$

Pour $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(F)$, on note $\mathbf{E}(p)[q] = S^{q,p} \wedge \mathbf{E}$.

DÉFINITION 5.4. — Soit $\mathbf{E} \in \mathcal{SH}(F)$. La *théorie cohomologique associée à* $\mathbf{E}$ est le foncteur

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}^{p,q} : \mathcal{SH}(F) &\to (Ab)^{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} \\ X &\mapsto Hom_{\mathcal{SH}(F)}(X, \mathbf{E}(q)[p]).\end{aligned}$$

La *théorie homologique associée à* $\mathbf{E}$ est le foncteur

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{p,q}(X) : \mathcal{SH}(F) &\to (Ab)^{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} \\ X &\mapsto Hom_{\mathcal{SH}(F)}(S^{q,p}, \mathbf{E} \wedge X).\end{aligned}$$

Si $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(F)$, on note

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{p,q}(\mathcal{X}) &= \tilde{\mathbf{E}}^{p,q}(\Sigma_T^\infty(\mathcal{X}_+)) \\ \mathbf{E}_{p,q}(\mathcal{X}) &= \tilde{\mathbf{E}}_{p,q}(\Sigma_T^\infty(\mathcal{X}_+)).\end{aligned}$$

5.6. Spectres d'Eilenberg-Mac Lane et cohomologie motivique

Pour toute F-variété lisse X, notons $L(X)$ le faisceau pour la topologie de Nisnevich qui associe à un schéma lisse connexe U le groupe abélien libre engendré par les fermés irréductibles de $U \times_F X$ qui sont finis et surjectifs sur U (c'est le faisceau $c_{equi}(X, 0)$ de l'exposé de Friedlander, §2). Soit A un groupe abélien. Pour $n \geq 0$, on note

$$K(A(n), 2n)$$

le faisceau de groupes abéliens quotient $L(\mathbf{A}^n)/L(\mathbf{A}^n - \{0\}) \otimes A$, considéré comme faisceau d'ensembles pointés. On a des morphismes de faisceaux d'ensembles pointés

$$T \wedge K(A(n), 2n) \xrightarrow{e_n} K(A(n+1), 2n+2).$$

Pour $n < 0$, on pose $K(A(n), 2n) = \{*\}$.

DÉFINITION 5.5. — Le *spectre d'Eilenberg-Mac Lane* $\mathbf{H}_A$ est le T-spectre $(K(A(n), 2n), e_n)$.

Pour $X \in \mathcal{SH}(F)$ (*resp.* $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(F)$), on note $\tilde{H}^{p,q}(X, A) = \tilde{\mathbf{H}}_A^{p,q}(X)$ (*resp.* $H^{p,q}(\mathcal{X}, A) = \mathbf{H}_A^{p,q}(\mathcal{X})$) (*cf.* définition 5.4) : c'est la *cohomologie motivique de* X *(resp. de* $\mathcal{X}$*)*. Cette terminologie est justifiée par le

THÉORÈME 5.6 ([26]). — *Soit F un corps de caractéristique 0, et soit $\mathcal{X}$ un F-schéma simplicial lisse. Alors, pour tout groupe abélien A, on a*

$$H^{p,q}(\mathcal{X}, A) = H_B^p(\mathcal{X}, A(q)).$$

Indications sur la démonstration (d'après F. Morel). Il résulte de la quasi-invertibilité de $\mathbf{Z}(1)$ dans la catégorie triangulée $DM^{eff}(F)$ des F-motifs effectifs ([45, th. 4.3.1], voir aussi l'exposé de Friedlander, th. 5.7) que le spectre $\mathbf{H}_A$ est un Ω_T-spectre. Il suffit donc de montrer que, pour tous $m, n, i \geq 0$, l'ensemble des morphismes dans $\mathcal{H}_\bullet(F)$

$$[\Sigma_s^m \Sigma_t^n(\mathcal{X}_+), K(A(i), 2i)]$$

s'identifie naturellement au groupe $H_B^{2i-m-n,i-n}(\mathcal{X}, A)$. Cela résulte d'une adjonction essentiellement formelle. □

Remarque 5.7. — On peut montrer que le foncteur $A \mapsto \mathbf{H}_A$ se "prolonge" en un foncteur

$$\mathbf{H} : DM(F) \to \mathcal{SH}(F)$$

où $DM(F)$ est la catégorie triangulée des F-motifs, convenablement complétée, où l'on a inversé le motif de Tate. Ce foncteur a pour adjoint à gauche un foncteur

$$M : \mathcal{SH}(F) \to DM(F)$$

qui "prolonge" le foncteur "motif" $Sm/F \xrightarrow{M} DM(F)$ (*cf.* l'exposé de Friedlander, définition 3.1). Ce résultat généralise le théorème 5.6.

6. OPÉRATIONS DE STEENROD EN COHOMOLOGIE MOTIVIQUE

DÉFINITION 6.1. — L'*algèbre de Steenrod motivique modulo* l sur F est l'algèbre $\mathcal{A}^{*,*}(F, \mathbf{Z}/l)$ des endomorphismes du T-spectre $\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}$ dans $\mathcal{SH}(F)$.

Par définition, on a

$$\mathcal{A}^{p,q}(F, \mathbf{Z}/l) = Hom_{\mathcal{SH}(F)}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}(q)[p]) = \tilde{H}^{p,q}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l).$$

THÉORÈME 6.2 ([48, th. 3.14], [47]). — *On a*

(i) $\mathcal{A}^{p,q}(F, \mathbf{Z}/l) = 0$ *pour* $q < 0$

(ii) $\mathcal{A}^{0,0}(F, \mathbf{Z}/l) = \mathbf{Z}/l$, *engendré par l'identité.*

THÉORÈME 6.3 ([48, th. 3.15], [47]). — *L'homomorphisme de Künneth*

$$\tilde{H}^{*,*}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l) \otimes_{\tilde{H}^{*,*}(S^0, \mathbf{Z}/l)} \tilde{H}^{*,*}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l) \to \tilde{H}^{*,*}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}, \mathbf{Z}/l)$$

est un isomorphisme.

On va avoir besoin d'opérations $Q_i \in \mathcal{A}^{2l^i-1, l^i-1}(F, \mathbf{Z}/l)$, analogues aux opérations de Milnor. Pour les définir, on procède comme en topologie algébrique : on définit des opérations $P^i \in \mathcal{A}^{2i(l-1), i(l-1)}(F, \mathbf{Z}/l)$ analogues aux puissances de Steenrod, et on définit inductivement

$$Q_0 = \beta$$

$$Q_{i+1} = [Q_i, P^{l^i}]$$

où β est le Bockstein modulo p. Pour cet exposé, les propriétés principales des Q_i sont :

Théorème 6.4 ([48, th. 3.17], [47]). — *(i)* $Q_i^2 = 0$.

(ii) Pour tout $i > 0$, il existe des opérations q_i telles que $Q_i = [\beta, q_i]$.

Corollaire 6.5. — *Soient $X \in \mathcal{SH}(F)$ et $p, q \in \mathbf{Z}$. Pour tout $x \in \tilde{H}^{p,q}(X, \mathbf{Z}_{(l)})$ et tout $i > 0$, posons*

$$\tilde{Q}_i(x) = \tilde{\beta} q_i(\bar{x})$$

où q_i est comme dans le théorème 6.4 (ii), $\tilde{\beta}$ est le Bockstein entier et $^-$ désigne la réduction modulo l. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^{p,q}(X, \mathbf{Z}_{(l)}) & \xrightarrow{\tilde{Q}_i} & \tilde{H}^{p+2l^i-1, q+l^i-1}(X, \mathbf{Z}_{(l)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^{p,q}(X, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{Q_i} & \tilde{H}^{p+2l^i-1, q+l^i-1}(X, \mathbf{Z}/l) \end{array}$$

est commutatif. □

Vu la propriété (i) des Q_i, on a pour tout objet $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}(F)$ des complexes

(9)
$$\dots \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p-2(l^i-1), q-l^i+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{p+2(l^i-1), q+l^i-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i} \dots$$

Théorème 6.6. — *Soient F et X comme dans l'énoncé du théorème* 4.15. *Alors les complexes* (9) *sont acycliques pour $i \leq n-1$ et $\mathcal{X} = \mathrm{fibre}(\Sigma_T^\infty(\check{C}(X)_+) \to S^0)$.*

Le théorème 6.6 sera démontré dans la section 7.3. Déduisons-en tout de suite le théorème 4.15 avec $\alpha = \tilde{Q}_{n-2} \dots \tilde{Q}_1$, où les $\tilde{Q}_i$ sont les opérations cohomologiques du corollaire 6.5. D'après le théorème 5.6, l'algèbre de Steenrod motivique opère sur la cohomologie motivique de $\check{C}(X)$, de telle façon que l'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_B^{n+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(n)) & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n-2}\dots\tilde{Q}_1} & H_B^{2\frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1}(\check{C}(X), \mathbf{Z}_{(l)}(\frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^{n+1,n}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(l)}) & \xrightarrow{\tilde{Q}_{n-2}\dots\tilde{Q}_1} & H^{2\frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1, \frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(l)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}^{n+1,n}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{Q_{n-2}\dots Q_1} & H^{2\frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1, \frac{l^{n-1}-1}{l-1}+1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \end{array}$$

La propriété (C) des $\mathbf{Z}(i)$ implique que les flèches verticales supérieures sont des isomorphismes. Par ailleurs, le lemme 4.5 a) et un argument de transfert impliquent que $\tilde{H}^{*,*}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}_{(l)})$ est d'exposant l; les flèches verticales inférieures sont donc injectives. Par conséquent, pour démontrer le théorème 4.15, il suffit de prouver que la flèche horizontale inférieure est injective.

Le théorème 6.6 implique que, pour $1 \leq i \leq n-2$, la suite

$$\tilde{H}^{n+1-2l\frac{l^i-2l^{i-1}+1}{l-1}-i+2,n-\frac{l^i-2l^{i-1}+1}{l-1}-i+2}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i}$$
$$\tilde{H}^{n+1+2l\frac{l^{i-1}-1}{l-1}-i+1,n+l\frac{l^{i-1}-1}{l-1}-i+1}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/l) \xrightarrow{Q_i} \tilde{H}^{n+1+2l\frac{l^i-1}{l-1}-i,n+l\frac{l^i-1}{l-1}-i}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/l)$$

est exacte. Mais $\tilde{H}^{n+1-2l\frac{l^i-2l^{i-1}+1}{l-1}-i+2,n-\frac{l^i-2l^{i-1}+1}{l-1}-i+2}(\mathcal{X},\mathbf{Z}/l) = 0$: si $n-\frac{l^i-2l^{i-1}+1}{l-1}-i+2 < 0$, c'est trivial, et sinon cela résulte du théorème 2.3 (ii) et du lemme 4.5 b). □

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.6

7.1. Réalisation topologique

Soit F un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soit $\Delta^{op}Ens$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On a un foncteur

$$\begin{aligned} Sm/F &\to \Delta^{op}Ens \\ X &\mapsto Sing(X(\mathbf{C})), \end{aligned}$$

où $Sing(M)$ désigne l'ensemble simplicial singulier associé à une variété complexe. D'après [26], on peut "prolonger" ce foncteur en un foncteur *réalisation topologique*

$$t_{\mathbf{C}} : \Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/F) \to \Delta^{op}Ens$$

tel que, pour tout $X \in Sm/F$, $t_{\mathbf{C}}(X)$ soit naturellement isomorphe à $Sing(X(\mathbf{C}))$. Ce foncteur transforme les $\mathbf{A}^1_F$-équivalences faibles en équivalences faibles, donc induit un foncteur sur les catégories homotopiques :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(F) &\xrightarrow{t_{\mathbf{C}}} \mathcal{H} \\ \mathcal{SH}(F) &\xrightarrow{t_{\mathbf{C}}} \mathcal{SH}. \end{aligned}$$

On a

$$t_{\mathbf{C}}(S^1_s) \cong t_{\mathbf{C}}(S^1_t) \cong S^1$$

donc

$$t_{\mathbf{C}}(T) \cong S^2.$$

De plus, le théorème de Dold-Thom implique :

$$t_{\mathbf{C}}(\mathbf{H}_{\mathbf{Z}}) \cong \mathbf{H}_{\mathbf{Z}}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{C}}(P^i) &= P^i \\ t_{\mathbf{C}}(Q_i) &= Q_i. \end{aligned}$$

7.2. Espaces de Thom et cobordismes algébriques

Soient $X \in Sm/F$, $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X et s la section nulle de $\mathcal{E}$. On définit l'*espace de Thom* de $\mathcal{E}$ comme étant le faisceau pointé $Th(\mathcal{E})$ donné par le carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} - s(X) & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} F & \longrightarrow & Th(\mathcal{E}) \end{array}$$

généralisant le carré qui définit T [26]. Si $\mathcal{E} = 0$, on a évidemment :

$$Th(\mathcal{E}) = X_+.$$

Si $\mathcal{F}$ est un fibré sur une autre variété Y et $\mathcal{E} \boxplus \mathcal{F}$ est leur somme externe sur $X \times_F Y$, on a un isomorphisme canonique de faisceaux pointés [26]

$$Th(\mathcal{E} \boxplus \mathcal{F}) = Th(\mathcal{E}) \wedge Th(\mathcal{F})$$

en particulier, pour $Y = \operatorname{Spec} F$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}^n$:

$$Th(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}^n) = T^{\wedge n} \wedge Th(E).$$

les $Th(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}^n)$ forment donc un spectre isomorphe au spectre des suspensions de $Th(\mathcal{E})$. Dans $\mathcal{H}_\bullet(F)$, on a un isomorphisme [26]

$$Th(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O})/\mathbf{P}(\mathcal{E})$$

d'où l'on déduit des isomorphismes, avec $d = \dim \mathcal{E}$:

$$\tilde{H}^{p,q}(Th(\mathcal{E}), A) \simeq H_B^{p-2d}(X, A(q-d)), \quad p, q \in \mathbf{Z}, \tag{10}$$

pour tout A, à l'aide du théorème 5.6 et du calcul de la cohomologie motivique d'une fibré projectif [42, prop. 2.5].

THÉORÈME 7.1 (théorème de pureté homotopique, [26]). — *Soit $i : Z \to X$ une immersion fermée de F-variétés lisses. Notons U l'ouvert complémentaire et $\nu_i \to Z$ le fibré normal de i. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\mathcal{H}_\bullet(F)$:*

$$X/U \approx Th(\nu_i).$$

Nous noterons $\mathbf{M}(\mathcal{E})$ la désuspension $T^{-d}\Sigma_T^\infty Th(\mathcal{E})$, où $d = \dim \mathcal{E}$: c'est le *spectre de Thom* de $\mathcal{E}$. En remplaçant au besoin X par une F-variété affine par le procédé de Jouanolou [13, lemme 1.5], on peut étendre cette construction en une fonction

$$\mathbf{M} : K_0(X) \to \mathcal{SH}(F).$$

Le foncteur $t_{\mathbf{C}}$ envoie $Th(\mathcal{E})$ (*resp.* $\mathbf{M}(\mathcal{E})$) sur l'espace (*resp.* le spectre) de Thom classique $Th(\mathcal{E}(\mathbf{C}))$ (*resp.* $\mathbf{M}(\mathcal{E}(\mathbf{C}))$).

Soit $G(m,n)$ la grassmannienne standard, munie de son fibré canonique $\mathcal{E}_{m,n}$. En lui appliquant la construction précédente, on obtient un spectre $\mathbf{M}(\mathcal{E}_{m,n})$. La limite inductive de ces spectres est notée **MGL** : c'est le *spectre des (F-)cobordismes algébriques.* La formule (10) et la propriété (C) des $\mathbf{Z}(n)$ entraînent :

THÉORÈME 7.2 ([48, th. 3.21]). — *Pour tout groupe abélien A, on a $\tilde{H}^{p,q}(\mathbf{MGL}, A) = 0$ pour $p > 2q$ et $\tilde{H}^{0,0}(\mathbf{MGL}, A) = A$.*

On note τ le générateur canonique de $\tilde{H}^{0,0}(\mathbf{MGL}, \mathbf{Z})$.

Le foncteur $t_{\mathbf{C}}$ envoie **MGL** sur le spectre du cobordisme complexe **MU**. En particulier, pour tout F-schéma simplicial lisse $\mathcal{X}$, on a des homomorphismes

$$\mathbf{MGL}_{p,q}(\mathcal{X}) \to \mathbf{MU}_p(\mathcal{X}(\mathbf{C}))$$

naturels en $\mathcal{X}$.

DÉFINITION 7.3. — Soit $X \in Sm/F$. On note I_X l'image de l'homomorphisme composé

$$\bigoplus_{i\geq 0} \mathbf{MGL}_{2i,i}(X) \longrightarrow \bigoplus_{i\geq 0} \mathbf{MGL}_{2i,i}(\operatorname{Spec} F) \longrightarrow \mathbf{MU}_*(pt).$$

On vérifie facilement que I_X est un *idéal* de $\mathbf{MU}_*(pt)$.

7.3. Le théorème principal

Nous commençons par énoncer le théorème principal de Voevodsky. Pour cela, nous avons besoin d'une définition :

DÉFINITION 7.4. — a) Un (v_n, l)-*élément* de $\mathbf{MU}_*(pt)$ est une classe de bordisme complexe v_n représentée par une variété compacte Y telle que

(1) $d := \dim Y = l^n - 1$
(2) $s_d(Y) \not\equiv 0 \pmod{l^2}$.

b) Soit F un sous-corps de $\mathbf{C}$. Une F-variété X, propre et lisse, est une (v_n, l)-*variété* si $X(\mathbf{C})$ définit un (v_n, l)-élément de $MU_*(pt)$.

Dans a), il revient au même de dire que v_n définit un générateur multiplicatif de $\pi_*(BP)$ (*resp.* de $\pi_*(K(n))$, où BP (*resp.* $K(n)$) est le *spectre de Brown-Peterson en l* (*resp.* la *n-ième K-théorie de Morava en l*) [30, ch. 4].

Exemples 7.5. —

(1) L'espace projectif $\mathbf{P}^d_F$ est une (v_n, l)-variété si et seulement si $n = 1$ et $d = l - 1$ [24, exemple 16-6].
(2) Une hypersurface projective lisse $X \subset \mathbf{P}^{d+1}_F$ de degré l est une (v_n, l)-variété si et seulement si $d = l^n - 1$ [24, problem 16-D].

(3) On peut montrer que, pour $l = 3$, la variété X de l'exemple 4.3 (2) (b) est une $(v_2, 3)$-variété (Rost).

THÉORÈME 7.6 ([48, th. 3.25]). — *Soit F un sous-corps de $\mathbf{C}$, et soit $X \in Sm/F$ telle que I_X (cf. définition 7.3) contienne un (v_n, l)-élément. Alors les complexes (9) sont acycliques pour $i = n$ et $\mathcal{X} = \mathrm{fibre}(\Sigma_T^\infty(\check{C}(X)_+) \to S^0)$.*

Démonstration. Notons Φ_n la fibre homotopique de $Q_n : \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \to S_s^1 \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}$. On a donc un triangle distingué

$$T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{u} \Phi_n \xrightarrow{v} \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{Q_n} S_s^1 \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}.$$

D'autre part, notons $\tilde{\tau}$ le composé

$$\mathbf{MGL} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{\tau \wedge Id} \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \xrightarrow{m} \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}$$

où τ est défini après l'énoncé du théorème 7.2 et m est le produit en cohomologie motivique. Du théorème 7.2 et d'une formule donnant $\Delta(Q_n)$, où Δ est le coproduit de l'algèbre de Steenrod associé à m via le théorème 6.3, on déduit l'existence d'un morphisme φ_n tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{MGL} \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \arrow[r, "\tilde{\tau}"] \arrow[d] & T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \arrow[d, "u"] \\
\mathbf{MGL} \wedge \Phi_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d] & \Phi_n \arrow[d, "v"] \\
\mathbf{MGL} \wedge \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} \arrow[r, "\tilde{\tau}"] & \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif dans $\mathcal{SH}(F)$.

Fixons $\mathcal{Y} \in \mathcal{SH}(F)$, un morphisme $\mathcal{Y} \xrightarrow{p} S^0$, un entier d et $\rho \in \mathbf{MGL}_{2d,d}(\mathcal{Y})$. Pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}$, on a un homomorphisme

$$\pi(\rho) : \tilde{\Phi}^{*,*}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}) \to \tilde{\Phi}^{*-2d,*-d}(\mathcal{X})$$

qui envoie l'élément de $\tilde{\Phi}^{*,*}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X})$ donné par le morphisme

$$\alpha : \mathcal{Y} \wedge \mathcal{X} \to \Phi_n(*)[*]$$

sur l'élément de $\tilde{\Phi}^{*-2d,*-d}(\mathcal{X})$ donné par la composition

$$T^d \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{\rho \wedge Id} \mathbf{MGL} \wedge \mathcal{Y} \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{Id \wedge \alpha} \mathbf{MGL} \wedge \Phi_n(*)[*] \xrightarrow{\varphi_n(*)[*]} \Phi_n(*)[*]$$

où φ_n est comme dans le diagramme ci-dessus. On a :

PROPOSITION 7.7 ([48, prop. 3.24]). — *Avec les notations ci-dessus, supposons que $d = l^n - 1$ et que $t_{\mathbf{C}}(p_*\rho) \in \mathbf{MU}_{2(l^n-1)}(pt)$ soit un (v_n, l)-élément. Alors il existe $c \in (\mathbf{Z}/l)^*$ tel que, pour tout $\mathcal{X} \in \mathcal{SH}(F)$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Phi}_n^{*,*}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{\Phi}_n^{*,*}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}) \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi(\rho)} \\ \tilde{H}^{*,*}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) & \xrightarrow{cu} & \tilde{\Phi}^{*-2(l^n-1),*-(l^n-1)}(\mathcal{X}) \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. En introduisant les "spectres fonctionnels" $RHom(\mathcal{Y}, \Phi_n)$ et $RHom(T^{l^n-1}, \Phi_n)$, l'énoncé peut être réinterprété de la manière suivante : le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi_n & \xrightarrow{p^*} & RHom(Y, \Phi_n) \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi(\rho)} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{Z}/l} & \xrightarrow{cu} & RHom(T^{l^n-1}, \Phi_n) \end{array} \tag{11}$$

est commutatif à homotopie près. Les deux composés de ce diagramme définissent des éléments de

$$Hom_{\mathcal{SH}(F)}(\Phi_n, RHom(T^{l^n-1}, \Phi_n)) = Hom_{\mathcal{SH}(F)}(T^{l^n-1} \wedge \Phi_n, \Phi_n).$$

D'après le théorème 6.2 et la définition de Φ_n, ce groupe est cyclique d'ordre l et s'injecte dans le groupe correspondant $Hom_{\mathcal{SH}}(S^{2(l^n-1)} \wedge t_{\mathbf{C}}(\Phi_n), t_{\mathbf{C}}(\Phi_n))$. Il suffit donc de démontrer la commutativité du diagramme (11) après lui avoir appliqué le foncteur $t_{\mathbf{C}}$, et ceci résulte d'un calcul facile (*cf.* [48, lemme 3.6]). □

Fin de la démonstration du théorème 7.6. On applique la proposition 7.7 à $\mathcal{X}$, avec $\mathcal{Y} = \Sigma_T^\infty(X_+)$, p la projection naturelle et ρ l'antécédent d'un (v_n, l)-élément de I_X. On a $\Sigma_T^\infty(X_+) \wedge \mathcal{X} = 0$: cela résulte de l'exemple 5.1. La commutativité du diagramme implique donc que le composé

$$\tilde{\Phi}^{p,q}(\mathcal{X}) \xrightarrow{v} \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}/l) \xrightarrow{cu} \tilde{\Phi}^{*-2(l^n-1),*-(l^n-1)}(\mathcal{X})$$

est identiquement nul pour tout (p, q), ce qui est équivalent à l'énoncé du théorème 7.6.□

Démonstration du théorème 6.6. Il faut voir que I_X contient un (v_i, l) élément pour tout $i \leq n-2$ dès que X satisfait les hypothèses du théorème 4.15. En utilisant les opérations de Landweber-Novikov sur $\mathbf{MU}_*$, on peut montrer que si I_X contient un (v_i, l)-élément, il contient un (v_j, l)-élément pour tout $j \leq i$. Comme X est par hypothèse une (v_{n-1}, l)-variété, il suffit de voir que la classe de bordisme de $X(\mathbf{C})$ est dans I_X. Cela résulte du théorème plus précis suivant :

THÉORÈME 7.8 ([48, th. 3.22]). — *Soit X une variété projective et lisse de dimension d sur un sous-corps F de $\mathbf{C}$. Il existe un élément $\varphi_X \in \mathbf{MGL}_{2d,d}(X)$ tel que l'image $t_{\mathbf{C}}(\varphi_X)$ de φ_X dans $\mathbf{MU}_{2d}(X(\mathbf{C}))$ soit la classe fondamentale de $X(\mathbf{C})$ en $\mathbf{MU}$-homologie.*

Remarque 7.9. — Dans le cas où $l = 2$, on peut éviter le recours aux opérations de Landweber-Novikov mentionnées juste avant l'énoncé : en effet, le théorème 7.8 implique que l'idéal $I_{Q_{\underline{a}}}$ contient les classes de toutes les variétés Y telles que $Hom_F(Y, Q_{\underline{a}}) \neq \emptyset$. Or l'exemple 7.5 montre qu'une section plane de dimension $2^i - 1$ de $Q_{\underline{a}}$ est une (v_i, l)-variété.

Indications sur la démonstration (F. Morel) : il faut construire un morphisme

$$T^d \to \mathbf{MGL} \wedge X_+$$

associé à X. On procède comme en topologie algébrique, avec quelques complications dues à la géométrie algébrique. Soit ν_X le fibré normal de X, vu comme l'opposé de son fibré tangent dans $K_0(X)$. Rappelons qu'il lui est associé canoniquement une classe de spectre $\mathbf{M}(\nu_X) \in \mathcal{SH}(F)$. Il suffit de construire des morphismes dans $\mathcal{SH}(F)$

$$T^d \to \mathbf{M}(\nu_X)$$
$$\mathbf{M}(\nu_X) \to \mathbf{M}(\nu_X) \wedge X_+$$

et

$$\mathbf{M}(\nu_X) \wedge X_+ \to \mathbf{MGL} \wedge X_+.$$

Le dernier morphisme provient d'un morphisme $\mathbf{M}(\nu_X) \to \mathbf{MGL}$, lui-même obtenu à partir d'un morphisme $X \to Gr$ classifiant le fibré (virtuel) ν_X, où Gr est la grassmannienne infinie [26]. Le deuxième est simplement le morphisme de spectres de Thom associé au pull-back par la diagonale du fibré $\nu_X \boxplus 0$ sur $X \times_F X$.

Enfin, pour définir le premier morphisme, on se ramène d'abord au cas où $X = \mathbf{P}^n_F$. On a le lemme suivant, qui généralise le théorème 7.1 (et s'en déduit) :

LEMME 7.10. — *Soient $i : Z \to X$ une immersion fermée de F-variétés lisses, U l'ouvert complémentaire, ν_i le fibré normal de i et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X. Alors la cofibre homotopique du morphisme évident*

$$Th(\mathcal{E}_{|U}) \to Th(\mathcal{E})$$

s'identifie canoniquement dans $\mathcal{H}_\bullet(F)$ à $Th(i^*\mathcal{E} \oplus \nu_i)$.

En appliquant ce lemme à l'immersion fermée $\mathbf{P}^n_F \xrightarrow{\Delta} \mathbf{P}^n_F \times_F \mathbf{P}^n_F$ et à $\mathcal{E} = p_1^*\nu_{\mathbf{P}^n_F}$, où p_1 est la première projection, on obtient un morphisme $Th(p_1^*\nu_{\mathbf{P}^n_F}) \to Th(\nu_{\mathbf{P}^n_F} \oplus \nu_\Delta)$, qui se traduit après projection de $\mathbf{P}^n_F$ sur le point en un morphisme dans $\mathcal{SH}(F)$

$$D : \mathbf{M}(\nu_{\mathbf{P}^n_F}) \wedge (\mathbf{P}^n_F)_+ \to T^n.$$

On montre alors par dévissage que l'adjoint de D

$$M(\nu_{\mathbf{P}_F^n}) \to RHom((\mathbf{P}_F^n)_+, T^n)$$

est un isomorphisme, en filtrant $\mathbf{P}_F^n$ par les $\mathbf{P}_F^i$, $i \leq n$. Le morphisme cherché correspond maintenant au morphisme $T^n \to RHom((\mathbf{P}_F^n)_+, T^n)$ induit par la projection de $(\mathbf{P}_F^n)_+$ sur S^0. Le lecteur au courant aura reconnu au passage la S-dualité … □

8. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.16

Dans cette section, on suppose $l = 2$.

8.1. Le motif de Rost

Soient $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (F^*)^n$, $\varphi = \ll a_1, \dots, a_n \gg$ la n-forme de Pfister associée, et soient $X_{\underline{a}}$ (*resp.* $Q_{\underline{a}}$) la quadrique projective d'équation $\varphi = 0$ (*resp.* d'équation $\ll a_1, \dots, a_{n-1} \gg \perp < -a_n >= 0$). On a $\dim X_{\underline{a}} = 2d$ (*resp.* $\dim Q_{\underline{a}} = d$), avec

$$d = 2^{n-1} - 1.$$

L'énoncé qui suit est une réinterprétation par Voevodsky d'un théorème de Rost, dans le langage de la catégorie $DM^{eff}(F)$:

THÉORÈME 8.1 ([48, th. 4.5]). — *Il existe un facteur direct $M_{\underline{a}}$ de $M(Q_{\underline{a}})$, muni de deux morphismes*

$$\psi^* : \mathbf{Z}(d)[2d] \to M_{\underline{a}}$$
$$\psi_* : M_{\underline{a}} \to \mathbf{Z}$$

tel que :

(i) Les composés

$$\mathbf{Z}(d)[2d] \xrightarrow{\psi^*} M_{\underline{a}} \to M(Q_{\underline{a}})$$
$$M(Q_{\underline{a}}) \to M_{\underline{a}} \xrightarrow{\psi_*} \mathbf{Z}$$

sont respectivement la classe fondamentale et le morphisme canonique $M(Q_{\underline{a}}) \to M(\operatorname{Spec} F) = \mathbf{Z}$.

(ii) Pour toute extension K/F telle que $Q_{\underline{a}}(K) \neq \emptyset$, la suite

$$\mathbf{Z}(d)[2d] \xrightarrow{\psi^*} M_{\underline{a}} \otimes_F K \xrightarrow{\psi_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{0} \mathbf{Z}(d)[2d+1]$$

est un triangle distingué scindé dans $DM^{eff}(F)$.

Dans l'énoncé originel de Rost [35, th. 3], ces propriétés sont énoncées de la façon suivante : a) le morphisme canonique $\mathbf{Z} \to CH^0(M_{\underline{a}})$ est un isomorphisme ; b) le degré induit une injection $CH^d(M_{\underline{a}}) \to \mathbf{Z}$, d'image $2\mathbf{Z}$ (*resp.* $\mathbf{Z}$) si $Q_{\underline{a}}$ n'a pas de point rationnel (*resp.* a un point rationnel) ; c) si $Q_{\underline{a}}$ a un point rationnel, $M_{\underline{a}}$ se décompose canoniquement en $L^0 \oplus L^d$ (en tant que motif de Chow), où L est le motif de Lefschetz.

Rost construit $M_{\underline{a}}$ par récurrence sur n. Sa démonstration repose sur les techniques de [36] : il est impossible de l'exposer ici en détail. Nous nous bornerons à en donner le principe.

Définir $M_{\underline{a}}$ revient à construire un projecteur dans $End(M(Q_{\underline{a}}))$. Supposons construit le motif M' correspondant au symbole $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ et notons

$$\tilde{M} = \bigoplus_{i=1}^{d'} M' \otimes L^i,$$

où $d' = 2^{n-2} - 1$. Rost construit des morphismes

$$\tilde{M} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M(Q_{\underline{a}})$$

tels que $g \circ f$ soit inversible dans $End(\tilde{M})$. Le point clé de cette construction est :

Lemme 8.2 (Rost). — *Il existe $\theta \in CH_{2d'}(M(Q_{\underline{a}}) \otimes M')$ tel que*

$$\theta \otimes_F F_s \equiv h \times P + u \times (M \otimes_F F_s)$$

où P est un point fermé de $Q_{\underline{a}} \times_F F_s$, h est une section hyperplane de $Q_{\underline{a}}$ et $u = \frac{1}{2} h^{d'+1}$.

Rost pose alors

$$g_i = h^{i-1}\theta \in CH_{2d'+1-i}(M(Q_{\underline{a}}) \otimes M') = Hom(M' \otimes L^i, M(Q_{\underline{a}}))$$

$$f_i = {}^t g_{d'+1-i} \in CH_{2d'+1-i}(M' \otimes M(Q_{\underline{a}})) = Hom(M(Q_{\underline{a}}), M' \otimes L^i),$$

et enfin $f = (f_i), g = (g_i)$. □

Du théorème 8.1, Voevodsky déduit, de manière essentiellement formelle :

Théorème 8.3 ([48, th. 4.4]). — *Avec les notations ci-dessus, on a un triangle distingué dans $DM^{eff}(F)$*

$$M(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(d)[2d] \to M_{\underline{a}} \to M(\check{C}(Q_{\underline{a}})) \xrightarrow{\gamma} M(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(d)[2d+1].$$

Remarque 8.4. — On trouvera dans la section 9.1 une description du morphisme γ.

En prenant la cohomologie motivique de ce triangle, on obtient une suite exacte

$$H^0_B(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(1)) \to H^{2d+1}_B(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(d+1)) \to H^{2d+1}_B(M_{\underline{a}}, \mathbf{Z}(d+1)) \xrightarrow{N} H^1_B(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbf{Z}(1)).$$

Le premier groupe à partir de la gauche est nul, le quatrième s'identifie canoniquement à F^* et le troisième est facteur direct de $H^{2d+1}_B(Q_{\underline{a}}, \mathbf{Z}(d+1))$. Ce dernier groupe s'identifie, par la conjecture de Gersten pour la cohomologie motivique et les propriétés (C) et (G) de $\mathbf{Z}(d+1)$, au conoyau $A_0(Q_{\underline{a}}, K_1)$ de l'homomorphisme

$$\coprod_{x \in (Q_{\underline{a}})_{(1)}} K_2^M(F(x)) \xrightarrow{\partial} \coprod_{x \in (Q_{\underline{a}})_{(0)}} K_1(F(x))$$

où $(Q_{\underline{a}})_{(p)}$ désigne l'ensemble des points de $Q_{\underline{a}}$ de dimension p et ∂ est une collection d'homomorphismes résidus [15]. Pour $x \in (Q_{\underline{a}})_{(0)}$, l'extension $F(x)/F$ est finie ; la norme induit un homomorphisme

$$A_0(X, K_1) \xrightarrow{N} F^* \tag{12}$$

(cela résulte de la "réciprocité de Weil"), compatible avec celui de la suite exacte ci-dessus. Pour démontrer le théorème 4.16, on est donc ramené à démontrer :

THÉORÈME 8.5 ((Rost) [34]). — *L'homomorphisme* (12) *est injectif.*

Pour $n = 2$, ce résultat est dû à Suslin [41] ; pour $n = 3$, il avait été obtenu, antérieurement à [34], indépendamment par Rost [33] et Merkurjev-Suslin [21, prop. 2.2]. Sa démonstration est esquissée dans la section suivante.

8.2. Zéro-cycles à coefficients dans les unités

Le cas $n = 2$: $Q_{\underline{a}}$ est une conique. Comme indiqué ci-dessus, le théorème 8.5 est alors dû à Suslin : il utilise la K-théorie de Quillen. Une démonstration élémentaire, due à Merkurjev, n'utilise que le théorème de Riemann-Roch sur $Q_{\underline{a}}$ (une courbe de genre 0 !) [49, th. 2.5].

Le cas $n > 2$. La stratégie est de se ramener au cas $n = 2$. Pour toute F-variété projective et lisse X, notons $A_0(X, K_1)$ le conoyau de l'application analogue à (12). On montre que $A_0(X, K_1)$ est un invariant birationnel stable de X (stable signifie que $A_0(X \times \mathbf{P}^1_F, K_1) \to A_0(X, K_1)$ est un isomorphisme). On peut donc remplacer $Q_{\underline{a}}$ par $X_{\underline{a}}$ dans la démonstration du théorème 8.1. De plus, par un argument de transfert, on peut supposer que F n'a pas d'extensions de degré impair.

On commence par montrer que $\mathrm{Im}(N) \subset D(\varphi)$, où $D(\varphi)$ est l'ensemble des valeurs non nulles de φ : cela résulte de la multiplicativité des formes de Pfister [16, ex. 10.2.4] et du principe de norme de Knebusch (*ibid.*, th. 7.5.1). On construit alors une application

$$\sigma : D(\varphi) \to A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$$

qui est une section surjective de N, ce qui termine la démonstration (et décrit du même coup l'image de N).

Pour construire σ, on note V l'espace sous-jacent à φ, on choisit $v_0 \in V$ tel que $\varphi(v_0) = 1$ et on écrit

$$V = Fv_0 \oplus V'$$

où V' est le supplémentaire orthogonal de v_0. Soit $b \in D(\varphi)$. Ecrivons $b = \varphi(xv_0 + yv')$ avec $x, y \in F$ et $v' \in V' - \{0\}$. On a donc

$$b = x^2 - ay^2$$

avec

$$a = -\varphi(v').$$

Ainsi

$$b \in N_{E/F}(E^*)$$

où $E = F(\sqrt{a})$.

Comme $< 1, -a >$ est une sous-forme de φ, on a $\operatorname{Spec} E \in (X_{\underline{a}})_{(0)}$. On peut maintenant poser

DÉFINITION 8.6. — $\sigma(b) = i_*(x + \sqrt{a}y) \in A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$, où i_* est induit par le plongement $E^* \hookrightarrow \coprod_{x \in (Q_{\underline{a}})_{(0)}} K_1(F(x))$.

Pour que cette définition ait un sens, il faut voir que $\sigma(b)$ ne dépend pas du choix de v', x, y. On note que, de toute façon,

$$N(\sigma(b)) = b. \tag{13}$$

Si on a une autre écriture

$$b = \varphi(\tilde{x}v_0 + \tilde{y}\tilde{v}'),$$

on note W le sous-espace de V engendré par $v_0, \tilde{v}$ et $\tilde{v}'$ et $\tilde{\sigma}(b)$ l'élément correspondant de $A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$. Pour simplifier, supposons W de dimension 3 (l'autre cas est plus facile). Si Y est la conique correspondant à la restriction de φ à W, on a

$$\sigma(b), \tilde{\sigma}(b) \in \operatorname{Im}(A_0(Y, K_1) \to A_0(X_{\underline{a}}, K_1)).$$

D'après (13) et le cas $n = 2$, il en résulte bien que $\sigma(b) = \tilde{\sigma}(b)$.

Pour voir que σ est surjective, soient $x \in X_{\underline{a}}$ un point fermé, $E = F(x)$ et $\lambda \in E^*$; notons λ_x l'image de λ dans $A_0(X_{\underline{a}}, K_1)$. Alors λ_x est (tautologiquement !) la norme de λ_x vu dans $A_0(X_{\underline{a}} \times_F E, K_1)$. Comme φ_E est isotrope, $A_0(X_{\underline{a}} \times_F E, K_1) \xrightarrow{N_E} D(\varphi_E)$ est bijective, ainsi que σ_E. La conclusion résulte donc du fait que les normes commutent à σ. Pour le voir, on remarque que par hypothèse toute extension finie de F est filtrée par des extensions quadratiques successives; on se ramène donc au cas d'une extension quadratique E/F. On remarque alors que $D(\varphi_E) = \bigcup D(\alpha_E)$ où α décrit les sous-formes ternaires de φ contenant le vecteur v_0, ce qui ramène de nouveau au cas connu $n = 2$. □

9. COMPLÉMENTS

Dans cette section, nous indiquons certains résultats annoncés par Voevodsky, qui réduisent la démonstration de la conjecture de Kato en général à un problème très spécifique.

9.1. Le motif de Rost-Voevodsky

Voevodsky a annoncé une construction indépendante du motif du théorème 8.1, qui offre l'intérêt de se généraliser au cas d'un nombre premier l quelconque. Ce qui suit est extrait de messages à Rost et au rédacteur, et reproduit avec son autorisation.

Commençons par décrire le morphisme γ du théorème 8.3. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 4.12, on établit facilement une suite exacte (sous les hypothèses de ce lemme) :

$$0 \to H^n(\check{C}(X), \mathbf{Z}/l(n-1)) \to H^n_{\text{ét}}(F, \mu_l^{\otimes(n-1)}) \to H^n_{\text{ét}}(F(X), \mu_l^{\otimes(n-1)}).$$

En identifiant $\mu_l^{\otimes(n-1)}$ à $\mu_l^{\otimes n}$ par le choix d'une racine primitive l-ième de l'unité de F (supposé en contenir), on en déduit un élément

$$\xi \in H^n(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbf{Z}/l(n-1))$$

correspondant à $(a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n) \in H^n_{\text{ét}}(F, \mu_l^{\otimes n})$. Pour $l = 2$, on montre que γ est donné par le cup-produit par $\tilde{Q}_{n-2} \ldots \tilde{Q}_1 \tilde{\beta}(\xi)$, où $\tilde{\beta}$ et les $\tilde{Q}_i$ sont comme dans le corollaire 6.5.

Dans le cas général, le même opérateur donne un triangle distingué dans $DM^{eff}(F)$

$$M'_{\underline{a}} \to M(\check{C}(X_{\underline{a}})) \xrightarrow{\gamma} M(\check{C}(X_{\underline{a}})(l^{n-1}-1)[2l^{n-1}-1] \to M'_{\underline{a}}[1]$$

où $X_{\underline{a}}$ est une variété de déploiement pour $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vérifiant les hypothèses (i) et (ii) de la définition 4.7 et $M'_{\underline{a}}$ est simplement défini comme la fibre de γ. Voevodsky a annoncé :

THÉORÈME 9.1. — *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, supposons que F soit un sous-corps de $\mathbf{C}$, sans extensions de degré premier à l. Supposons de plus que X soit une (v_{n-1}, l)-variété. Posons*

$$M_{\underline{a}} = S^{l-1}(M'_{\underline{a}}),$$

où S^{l-1} dénote la puissance symétrique $(l-1)$-ième dans $DM^{eff}(F)$. Alors $M_{\underline{a}}$ est facteur direct autodual de $M(X_{\underline{a}})$.

En particulier, $M_{\underline{a}}$ est un motif pur, canoniquement associé à $\underline{a}$ d'après l'exemple 5.1.

En utilisant ce fait et le théorème 4.15, Voevodsky obtient alors :

THÉORÈME 9.2. — *Supposons $H90(n-1,l)$ vrai. Supposons que, pour tout sous-corps F de $\mathbf{C}$ et tout $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in(F^*)^n$, il existe une variété de déploiement $X_{\underline{a}}$ pour $\{a_1,\ldots,a_n\}\in K_n^M(F)/l$ telle que*

(i) $X_{\underline{a}}$ soit une (v_{n-1},l)-variété ;
(ii) la norme $A_0(X_{\underline{a}},K_1)\xrightarrow{N}F^*$ soit injective.

Alors $H90(n,l)$ est vrai.

Cet énoncé donne une nouvelle démonstration du théorème de Merkurjev-Suslin (le cas $n=2$, l quelconque) modulo (ii), qui est démontré dans [20, cor. 8.7.2] pour la variété de Severi-Brauer d'une algèbre centrale simple de degré l. Dans le cas $l=3$, Rost a annoncé une démonstration de (ii) pour la variété de l'exemple 4.3 (2) (b) (sa démonstration utilise une F-forme du plan projectif de Cayley), ce qui donne $K(3,3)$, ainsi que pour une variété convenable de dimension 26, ce qui donne $K(4,3)$ ...

Dans les autres cas, on ne dispose pas pour $X_{\underline{a}}$ de candidats aussi géométriques que précédemment. Voevodsky en a proposé une construction récursive, mais il n'a pour l'instant que des résultats partiels sur les variétés obtenues.

9.2. (v_n,l)-variétés et variétés de déploiement génériques

Voevodsky a également annoncé des résultats qualitatifs sur les variétés de déploiement, qui clarifient grandement la situation et que nous ne résistons pas à l'envie d'exposer.

Si X,Y sont deux F-variétés, notons $X\le_l Y$ s'il existe un morphisme $\rho: M(X)\to M(Y)$ dans $DM^{eff}(F,\mathbf{Z}_{(l)})$ (motifs à coefficients dans $\mathbf{Z}_{(l)}$) tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & M(Y) \arrow[d] \\ \mathbf{Z}_{(l)} \arrow[r, "c"] & \mathbf{Z}_{(l)} \end{tikzcd}$$

soit commutatif pour un $c\in\mathbf{Z}_{(l)}^*$ convenable. C'est une relation de préordre; si X et Y sont propres et lisses, $X\le_l Y$ si et seulement si il existe un revêtement $Z\to X$ de degré premier à l et un morphisme $Z\to Y$. Notons $\cong_l$ la relation d'équivalence associée : c'est la *l-équivalence*. Voevodsky a alors annoncé :

THÉORÈME 9.3. — *Soient X une (v_n, l)-variété et Y une variété non l-triviale (c'est-à-dire non l-équivalente à* $\operatorname{Spec} F$*). Alors tout morphisme $M(X) \to M(Y)$ est non trivial sur la classe fondamentale de X à coefficients $\mathbf{Z}/l$. En particulier, on a :*

(i) $X \leq_l Y \Rightarrow \dim X \leq \dim Y$;

(ii) *Si* $X \leq_l Y$ *et* $\dim X = \dim Y$, *alors* $X \cong_l Y$.

THÉORÈME 9.4. — *Supposons $H90(n-1, l)$ vrai. Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in (F^*)^n$, et soit X une variété de déploiement pour $\{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(F)/l$ qui est une (v_{n-1}, l)-variété. Alors, toute autre variété de déploiement Y vérifie $Y \leq_l X$.*

COROLLAIRE 9.5. — *Sous les hypothèses du théorème* 9.4, *toute (v_{n-1}, l)-variété de déploiement pour un symbole $\{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(F)/l$ est générique (cf. définition* 4.1*). Deux (v_{n-1}, l)-variétés de déploiement pour $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sont l-équivalentes.*

COROLLAIRE 9.6. — *Supposons que $\{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(F)/l$ admette une (v_{n-1}, l)-variété de déploiement. Alors toute variété de déploiement générique pour $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est de dimension $\geq l^{n-1} - 1$; si elle est propre et lisse de dimension $l^{n-1} - 1$, c'est une (v_{n-1}, l)-variété.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Arason *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Alg. **36** (1975), 448–491.

[2] M. Artin *Brauer-Severi varieties*, Lect. Notes in Math. **917**, Springer, 1982, 194–210.

[3] A. Borel Linear algebraic groups (2^e édition), Springer, 1991.

[4] A. Bousfield, E. Friedlander *Homotopy theory of Γ-spaces, spectra and bisimplicial sets*, Lect. Notes in Math. **658**, Springer, 1978, 80–130.

[5] H. Bass, J. Tate *The Milnor ring of a global field*, Lect. Notes in Math. **342**, Springer, 1973, 349–428.

[6] S. Bloch Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Lectures Series, 1982.

[7] S. Bloch, K. Kato *p-adic étale cohomology*, Publ. Math. I.H.E.S. **63** (1986), 107–152.

[8] F. Châtelet *Variations sur un thème de H. Poincaré*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **61** (1944), 249–300.

[9] M. Demazure *Automorphismes et déformations des variétés de Borel*, Invent. Math. **39** (1977), 179–186.

[10] E. Devinatz, M. Hopkins, J. Smith *Nilpotence and stable homotopy theory, I*, Ann. of Math. **128** (1988), 207–241.

[11] D. Elman, T. Y. Lam *Pfister forms and K-theory of fields*, J. Alg. **23** (1972), 181–213.

[12] E. Friedlander, V. Voevodsky *Bivariant cycle cohomology*, prépublication, 1995.

[13] J.-P. Jouanolou *Une suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie algébrique*, Lect. Notes in Math. **341**, Springer, 1973, 293–316.

[14] K. Kato *A generalization of higher class field theory by using K-groups, I*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo **26** (1979), 303–376.

[15] K. Kato *Milnor K-theory and the Chow group of zero cycles*, Contemp. Math. **55** (I), AMS, 1986, 241–253.

[16] T.Y. Lam The algebraic theory of quadratic forms (2ème édition), Benjamin, 1980.

[17] M. Knebusch *Generic splitting of quadratic forms, I*, Proc. London Math. Soc. **33** (1976), 65–93.

[18] A.S. Merkurjev *Sur le symbole de résidu normique de degré* 2 (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **261** (1981), 542–547. Traduction anglaise : Soviet Math. Dokl. **24** (1981), 546–551.

[19] A.S. Merkurjev *On the norm residue homomorphism for fields*, Amer. Math. Soc. Transl. **174** (1996), 49–71.

[20] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin *$\mathcal{K}$-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de résidu normique* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **46** (1982), 1011–1046. Traduction anglaise : Math USSR Izv. **21** (1983), 307–340.

[21] A.S. Merkurjev, A.A. Suslin *L'homomorphisme de résidu normique de degré* 3 (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR **54** (1990), 339–356. Traduction anglaise : Math. USSR Izv. **36** (1991), 349–368.

[22] J. Milnor *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Invent. Math. **9** (1970), 315-344.

[23] J. Milnor An introduction to algebraic K-theory, Ann. Math. Studies **72**, Princeton University Press, 1971.

[24] J. Milnor, J. Stasheff Characteristic classes, Ann. Math. Studies **76**, Princeton University Press, 1974.

[25] F. Morel *Théorie de l'homotopie et motifs, I*, prépublication, 1995.

[26] F. Morel, V. Voevodsky *Homotopy category of schemes over a base*, en préparation.

[27] Y. Nisnevich *The completely decomposed topology on schemes and the associated descent spectral sequences in algebraic K-theory*, *in* Algebraic K-theory : connections with geometry and topology, (J.F. Jardine, V.P. Snaith, eds.), NATO ASI Series, Ser. C **279** (1989), 241–342.

[28] D. Orlov, A. Vishik, V. Voevodsky *Motivic cohomology of Pfister quadrics*, en préparation.

[29] D. Quillen Homotopical algebra, Lect. Notes in Math. **43**, Springer, 1967.

[30] D. Ravenel Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres, Acad. Press, 1986.

[31] D. Ravenel *The nilpotence and periodicity theorems in stable homotopy theory*, Séminaire Bourbaki, juin 1990, exposé n° 728, Astérisque **189–190** (1990), 399–428.

[32] D. Ravenel Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory, Ann. Math. Studies **128**, Princeton University Press, 1992.

[33] M. Rost *Hilbert's theorem 90 for K_3^M for degree-two extensions*, prépublication, 1986.

[34] M. Rost *On the spinornorm and $A_0(X, K_1)$ for quadrics*, prépublication, 1988.

[35] M. Rost *Some new results on the Chowgroups of quadrics*, prépublication, 1990.

[36] M. Rost *Chow groups with coefficients*, Documenta Math. **1** (1996), 319–393.

[37] D. Saltman *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Isr. J. Math. **47** (1984), 165–215.

[38] J.-P. Serre Cohomologie galoisienne (nouvelle édition), Lect. Notes in Math. **5**, Springer, 1994.

[39] C. Soulé *K_2 et le groupe de Brauer*, Séminaire Bourbaki, novembre 1982, exposé n° 601, Astérisque **105–106** (1983), 79–93.

[40] N. Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*, Compositio Math. **65** (1988), 121–154.

[41] A. Suslin *L'homomorphisme quaternionique pour le corps des fonctions d'une conique* (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR **265** (1982), 292–296. Traduction anglaise : Soviet Math. Dokl. **26** (1982), 72–77.

[42] A. Suslin, V. Voevodsky *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, prépublication, 1995.

[43] J. Tate *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

[44] V. Voevodsky *Homology of schemes, II*, prépublication, 1993.

[45] V. Voevodsky *Triangulated categories of motives over a field*, prépublication, 1994.

[46] V. Voevodsky *Bloch-Kato conjecture for $\mathbf{Z}/2$-coefficients and algebraic Morava K-theories*, prépublication, 1995.

[47] V. Voevodsky *Cohomological operations in motivic cohomology*, en préparation.

[48] V. Voevodsky *The Milnor conjecture*, prépublication, 1996.

[49] A. Wadsworth *Merkurjev's elementary proof of Merkurjev's theorem*, Contemp. Math. **55** (II), AMS, 1986, 741–776.

[50] S. Wang *On the commutator subgroup of a simple algebra*, Amer. J. Math. **72** (1950), 323–334.

Bruno KAHN

Institut de Mathématiques de Jussieu
Equipe Théories Géométriques
Université Paris 7
Case 7012
75251 Paris Cedex 05
France
Adresse électronique: `kahn@math.jussieu.fr`