Astérisque

FRANÇOIS LOESER

Polytopes secondaires et discriminants

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 742, p. 387-420

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__387_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Juin 1991
43ème année, 1990-91, n°742

POLYTOPES SECONDAIRES ET DISCRIMINANTS

par François LOESER

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est d'expliquer pourquoi dans $4p^3 + 27q^2$ on a $4 = 2^2$ et $27 = 3^3$. A la suite de leurs travaux sur les fonctions hypergéométriques associées à des variétés toriques [G-K-Z 1], Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont introduit un nouvel objet combinatoire associé à un ensemble fini de n points A dans $\mathbf{R}^k$: le polytope secondaire $QQ(A)$, décrit à l'aide des triangulations * de A et plongé dans $\mathbf{R}^n$. Un de leur résultat principal [G-K-Z 2], que nous allons décrire dans cet exposé, est que $QQ(A)$ est le polyèdre de Newton d'un discriminant associé à A. De plus ils donnent une formule explicite pour les coefficients des monômes extrémaux de ce discriminant. En particulier ce sont toujours, au signe près, des produits d'entiers de la forme N^N. Récemment, Kapranov, Sturmfels et Zelevinsky [K-S-Z] ont donné une présentation plus conceptuelle de ces résultats en terme de dégénérescences toriques et de formes de Chow.

Le plan est le suivant. La section 1 est consacrée à la description du polytope secondaire, de ses sommets et de ses arètes. Dans la section 2 on énonce les principaux résultats sur les polyèdres de Newton des discriminants. On donne quelques exemples classiques (pour lesquels

* de telles triangulations avaient été considérées antérieurement par O. Viro, en géométrie algébrique réelle (cf. [V]).

S.M.F.
Astérisque 201-202 - 203 (1991)

les résultats sont cependant nouveaux) en 3. Dans la section suivante, plus technique, on donne une interprétation géométrique du discriminant, qui permet dans la section 5 de présenter la démonstration de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky. On expose brièvement (section 6) le lien avec les fonctions hypergéométriques. Les sections suivantes sont consacrées à l'approche récente de Kapranov, Sturmfels et Zelevinsky. Dans la section 7, on expose des généralités concernant les dégénérescences toriques et les polytopes de Chow, et dans la suivante les résultats de Sturmfels sur les idéaux toriques et les éventails de Gröbner. Ceci nous permet de présenter dans la section 9 les résultats de Kapranov, Sturmfels et Zelevinsky concernant le polytope de Chow d'une variété torique, desquels on déduit, dans la section 10, une autre démonstration des résultats principaux.

N.B. La théorie de l'élimination, des résultants et des formes de Chow a une longue histoire. Faute de compétence nous ne tenterons pas de la retracer ici. C'est donc par choix délibéré que les références données sont exclusivement modernes. Signalons cependant que l'interprétation du résultant comme déterminant d'un complexe de Koszul (cf.7.5) semble remonter, au moins en partie, à Cayley, et qu'elle a été développée dans un cadre général par E.Fischer (Über die Cayley'sche Eliminations-methode, Math. Z. 26 (1927), 497-550).

0. CONVENTIONS ET NOTATIONS

Pour $k \geq 1$, on note $[k] = \{1, 2, \cdots, k\}$. Si $X \subset \mathbf{R}^k$, on note $Q(X)$ l'enveloppe convexe de X.

Si M est un réseau de rang r dans $\mathbf{R}^n$, la forme volume associée à M sur $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ est la mesure de Lebesgue normalisée de telle sorte que le volume d'une maille du réseau soit r !, c'est-à-dire que le volume d'un simplexe standard soit 1.

1. POLYTOPES SECONDAIRES

1.1 Rappelons qu'un éventail dans $\mathbf{R}^n$ est une famille finie $(C_\alpha)_{\alpha\in I}$ de cônes
polyédraux telle que :

(i) Si C est une face de C_α, on a $C = C_\beta$ pour un $\beta \in I$.

(ii) Quels que soient α et β dans I, $C_\alpha \cap C_\beta$ est une face de C_α et C_β.

Un éventail $(C_\alpha)_{\alpha\in I}$ est complet si $\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha = \mathbf{R}^n$. A un polytope K dans $\mathbf{R}^n$ on associe un éventail complet $F(K)$ de la manière suivante. Pour tout point p de K, soit

$$C(K,p) = \{v \in \mathbf{R}^n \ ; \ \forall y \in K \quad \langle v,p\rangle \leq \langle v,y\rangle\},$$

($\langle\ ,\ \rangle$ désignant le produit scalaire euclidien usuel). Si τ est une face de K, on définit $C(K,\tau)$ comme étant égal à $C(K,p)$, pour p un point de l'intérieur relatif de τ. L'éventail $F(K)$ est la famille des $C(K,\tau)$, τ décrivant l'ensemble des faces de K.

1.2 Soit $A = \{a_1,\cdots,a_n\}$ un ensemble de n points distincts de $\mathbf{R}^k$ et $Q(A)$ l'enveloppe convexe de A, que l'on suppose de dimension $k-1$. Une triangulation de A est par définition une triangulation simpliciale T de $Q(A)$, telle que les sommets des simplexes de T appartiennent à A. On notera $\mathcal{T}(A)$ l'ensemble des triangulations de A. Plus précisément on voit un élément T de $\mathcal{T}(A)$ comme une famille $(\sigma)_{\sigma\in T}$ d'applications strictement croissantes, $\sigma : [k] \to [n]$. On associe à σ le simplexe $\bar\sigma$ enveloppe convexe des $a_{\sigma(i)}$. Que T soit une triangulation de $Q(A)$ est équivalent aux deux conditions suivantes :

(i) $\bigcup_{\sigma\in T} \bar\sigma = Q(A)$.

(ii) Si σ et σ' appartiennent à T, l'intersection $\bar\sigma \cap \bar\sigma'$ est soit vide, soit une face de $\bar\sigma$ et $\bar\sigma'$.

Plus loin on sera parfois amené, par abus de langage, à appeler les $\bar\sigma$ (et les σ) des simplexes de dimension maximale et les faces des $\bar\sigma$ (et des σ) des simplexes.

1.3 A une triangulation $T \in \mathcal{T}(A)$ on va associer, suivant [G-K-Z 2], un cône polyédral dans $\mathbf{R}^n$ de la façon suivante. On identifie tout d'abord $\mathbf{R}^n$ à $\mathbf{R}^A$ (si $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n) \in \mathbf{R}^n$, on écrit donc $\psi(a_i) = \psi_i$). Tout vecteur ψ de $\mathbf{R}^n$ détermine une fonction continue $g_{T,\psi} : Q(A) \to \mathbf{R}$, affine sur chacun des simplexes $\bar{\sigma}$, $\sigma \in T$, et telle que si a_i est sommet d'un simplexe $\bar{\sigma}$, $g_{T,\psi}(a_i) = \psi(a_i)$. On définit le cône $\mathcal{C}(A,T)$ comme l'ensemble des ψ tels que :

(i) La fonction $g_{T,\psi}$ soit convexe.

(ii) Pour tout $a_i \in A$, $g_{T,\psi}(a_i) \leq \psi(a_i)$.

(Un point de A n'est pas nécessairement un sommet de T.) On vérifie que $\mathcal{F}(A) = (\mathcal{C}(A,T))_{T \in \mathcal{T}(A)}$ est un éventail complet.

1.4 On définit les subdivisions polyédrales de $Q(A)$, ayant leurs sommets dans A de façon similaire aux triangulations; ce sont des complexes polyédraux au lieu d'être des complexes simpliciaux. A tout vecteur ψ de $\mathbf{R}^n$ associons une subdivision polyédrale Q_ψ de $Q(A)$, ayant ses sommets dans A, comme suit. Soit P_ψ l'enveloppe convexe des points (a_i, ψ_i) dans $\mathbf{R}^{k+1}$; on obtient Q_ψ en projetant l'ensemble des faces compactes du convexe $P_\psi + \{0\}^k \times \mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}^k$. Une telle subdivision polyédrale est dite régulière. Pour ψ général, Q_ψ est une triangulation. Si T est une triangulation régulière, il est clair que l'ensemble des ψ tels que $Q_\psi = T$ est égal à l'intérieur du cône $\mathcal{C}(\mathcal{A},T)$. On vérifie que, réciproquement, si $\mathcal{C}(A,T)$ est d'intérieur non vide, T est régulière. En général une subdivision polyédrale est régulière si et seulement si il existe une fonction continue sur $Q(A)$, affine sur chacun des polytopes de la subdivision et strictement convexe (en un sens évident).

On notera $\mathcal{T}^0(A)$ l'ensemble des triangulations régulières de A.

1.5 Tous les éventails complets ne sont pas nécessairement de la forme $F(K)$, avec K un polytope. Nous allons voir que c'est cependant le cas de l'éventail $\mathcal{F}(A)$. Notons $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. On va définir, suivant [G-K-Z 2], un nouvel objet associé à A : le polytope secondaire $QQ(A)$.

DÉFINITION 1.5.1 [G-K-Z 2].—
(i) Si $T \in \mathcal{T}(A)$, on note ϕ_T le vecteur

$$\phi_T = \sum_{\sigma \in T} \mathrm{vol}(\bar{\sigma})(e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(k)}).$$

(ii) On définit $QQ(A)$ comme l'enveloppe convexe des ϕ_T, $T \in \mathcal{T}(A)$.

THÉORÈME 1.5.2 [G-K-Z 2].—
Les deux éventails $F(QQ(A))$ et $\mathcal{F}(A)$ sont égaux. Plus précisément, si $T \in \mathcal{T}(A)$, on a

$$C(QQ(A), \phi_T) = \mathcal{C}(A, T) \ .$$

Démonstration. Comme les deux éventails sont complets, il suffit de montrer que pour tout $T \in \mathcal{T}(A)$,

$$\mathcal{C}(A, T) \subset C(QQ(A), \phi_T) \ .$$

(Remarquons en passant que cette inclusion donne directement que $\mathcal{F}(A)$ est un éventail.) Il faut montrer que si $\psi \in \mathcal{C}(A, T)$, $\langle \psi \ , \ \phi_T \rangle \leq \langle \psi \ , \phi_{T'} \rangle$ pour tout $T' \in \mathcal{T}(A)$. Pour cela on remarque que, par définition même de $\mathcal{C}(A, T)$, on a $g_{T,\psi}(x) \leq g_{T',\psi}(x)$ si $T' \in \mathcal{T}(A)$ et $x \in Q(A)$. On a donc

$$\int_{Q(A)} g_{T,\psi}(x)dx \leq \int_{Q(A)} g_{T',\psi}(x)dx \ .$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \int_{Q(A)} g_{T,\psi}(x)dx &= \sum_{\sigma \in T} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} g_{T,\psi}(a_{\sigma(i)}) \right) \mathrm{vol}\ \bar{\sigma} \\ &= \frac{1}{k} \langle \psi \ , \ \phi_T \rangle \ , \end{aligned}$$

la même égalité valant pour T'. Ceci donne bien $\langle \psi \ , \ \phi_T \rangle \leq \langle \psi \ , \ \phi_{T'} \rangle$. □

On déduit de 1.5.2 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.5.3.— *Les sommets de $QQ(A)$ sont les ϕ_T , $T \in \mathcal{T}^0(A)$.*

Remarque 1.5.4. On peut étendre 1.5.3 aux faces de dimension quelconque de $QQ(A)$: les faces de $QQ(A)$ sont en bijection (en fait on a un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés) avec les subdivisions polyédrales régulières de A. Si P est une subdivision polyédrale de A on lui associe une cône $\mathcal{C}(A,P)$ défini comme pour les triangulations, et, quand P est régulière, $\mathcal{C}(A,P)$ coïncide avec le cône normal de la face de $QQ(A)$ correspondant à P ([G-K-Z-2], [B-F-S]).

1.6 Nous donnons ici une construction de $QQ(A)$ due à Billera, Filliman et Sturmfels ([B-F-S]).

A l'ensemble A on associe la matrice (n,k) dont la i-ème ligne est composée des coordonnées de a_i. Soit $\eta \in \Lambda^k\mathbf{R}^n$ le produit extérieur des colonnes. Si $\sigma : [k] \to [n]$ est strictement croissante on pose $e_\sigma = e_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(k)} \in \Lambda^k\mathbf{R}^n$. On étend $\langle\ ,\ \rangle$ à $\Lambda^k\mathbf{R}^n$, et on pose $\varepsilon(\sigma) =$ signe $\langle \eta\ ,\ e_\sigma\rangle$. Si $T \in \mathcal{T}(A)$ on pose

$$\varphi_T = \sum_{\sigma \in T} \varepsilon(\sigma) e_\sigma\ .$$

On note $U(A)$ l'enveloppe convexe des φ_T, $T \in \mathcal{T}(A)$. Si T et T' sont deux triangulations distinctes, on a

$$\langle \varphi_T\ ,\ \varphi_{T'}\rangle = |T \cap T'| < |T| = \langle \varphi_T\ ,\ \varphi_T\rangle\ ,$$

ce qui prouve que les sommets de $U(A)$ sont exactement les φ_T , $T \in T(A)$.

Considérons π :

$$\Lambda^k\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

$$\varphi \to \sum_{i=1}^{n} \langle (e_i \dashv \varphi) \wedge e_i\ ,\ \eta\rangle \quad e_i,$$

le produit intérieur $\dashv$ étant défini par $\langle a \wedge b, c\rangle = \langle a, b \dashv c\rangle$. Le lien entre $U(A)$ et $QQ(A)$ est donné par :

PROPOSITION 1.6.1 [B-F-S] .—

On a l'égalité $QQ(A) = \pi(U(A))$.

1.7 Description des arètes de $QQ(A)$

Les parties de A minimales parmi celles qui sont linéairement dépendantes sont appelées des circuits. Si Z est un circuit, $\mathcal{T}(Z)$ a exactement deux éléments notés, non canoniquement, $T_+(Z)$ et $T_-(Z)$. En effet, soit $\sum_{p\in Z} \alpha_p p = 0$ une relation linéaire non triviale entre les points de Z, $Z_+ = \{p \in Z \ ; \ \alpha_p > 0\}$ et $Z_- = \{p \in Z \ ; \ \alpha_p < 0\}$. On définit $T_+(Z)$, resp. $T_-(Z)$, comme formée des simplexes $Q(Z \setminus \{p\})$, $p \in Z_+$, resp. Z_- .

DÉFINITION 1.7.1.—

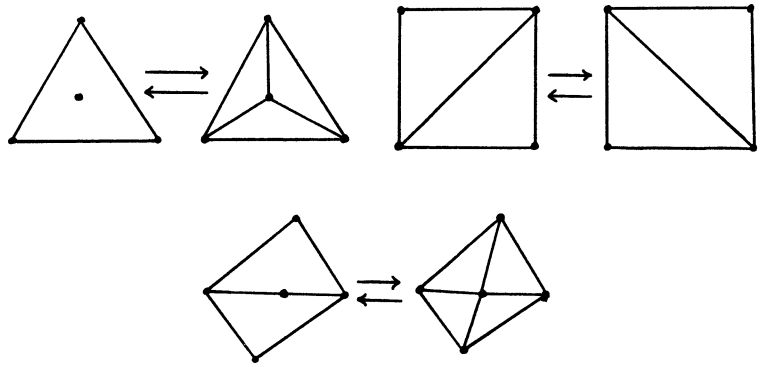
Soient $T \in \mathcal{T}(A)$, Z *un circuit. On dit que* T *s'appuie sur* Z *si*

(i) Les sommets de T *appartenant à* $Q(Z)$ *appartiennent à* Z.

(ii) Le polytope $Q(Z)$ *est union de faces de simplexes de* T.

(iii) Soit $Q(I)$ *un simplexe de dimension maximale de l'une des deux triangulations de* $Q(Z)$. *Si il existe* $J \subset A \setminus Z$ *tel que* $Q(I \cup J)$ *soit un simplexe de dimension maximale de* T, *alors pour tout autre simplexe de dimension maximale* I' *de la même triangulation de* $Q(Z)$, $Q(I' \cup J)$ *est un simplexe de* T.

Si T s'appuie sur Z, T induit une triangulation de Z, disons $T_+(Z)$. On obtient une nouvelle triangulation de A, $s_Z(T)$, de la façon suivante : on remplace les simplexes de la forme $Q(I \cup J)$ avec $I \in T_+(Z)$, $J \subset A \setminus Z$ par les simplexes $Q(I' \cup J)$ avec $I' \in T_-(Z)$. On a $s_Z(s_Z(T)) = T$. Les dessins suivants fournissent des exemples.



Le résultat suivant décrit les arètes de $QQ(A)$:

THÉORÈME 1.7.2 [G-K-Z 2].— *Soient T et T' deux triangulations régulières de A. Les sommets ϕ_T et $\phi_{T'}$ de $QQ(A)$ sont reliés par une arète si et seulement si il existe un circuit $Z \subset A$ sur lequel s'appuient T et T' tel que $T' = s_Z(T)$.*

On aura besoin en 2.5 de la définition suivante.

DÉFINITION 1.7.3.— *Si $T' = s_Z(T)$, on note $S(T,T')$ l'ensemble des parties J de $A \setminus Z$ telles qu'il existe $I \subset Z$, avec $Q(I)$ simplexe de dimension maximale d'une triangulation de Z et $Q(I \cup J)$ simplexe de dimension maximale de T.*

2. POLYÈDRES DE NEWTON DE DISCRIMINANTS

2.1. Dans cette section et dans les suivantes on suppose $A = \{a_1, \cdots, a_n\} \subset \mathbf{Z}^k$. Les hypothèses suivantes seront de plus supposées satisfaites par défaut.

($*1$) Il existe une forme linéaire $h : \mathbf{Z}^k \to \mathbf{Z}$ à coefficients entiers telle que $A \subset h^{-1}(1)$.

($*2$) Le groupe additif $M(A)$ engendré par A est égal à $\mathbf{Z}^k$.

On notera $S(A)$ le semi-groupe engendré par A, et M le réseau $\mathbf{Z}^k$.

2.2. Le discriminant Δ_A

On note V l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ muni de coordonnées $(c_1, \cdots, c_n)$. On identifiera V à l'espace vectoriel des polynômes $f = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i x^{a_i} \in \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_k]$. Soit ∇_A l'adhérence de Zariski du lieu des $f \in V$ tels qu'il existe $x_0 \in (\mathbf{C}^*)^k$ vérifiant :

$$f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0 \ .$$

Par définition le discriminant $\Delta_A \in \mathbf{Z}[c_1, \cdots, c_n]$ est le polynôme irréductible, défini au signe près, dont le lieu des zéros est égal à la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 de ∇_A. Cette définition sera inchangée si les conditions $(*)$ ne sont pas vérifiées.

2.3. Interprétation projective de Δ_A

L'interprétation d'un discriminant comme équation de variété duale est tout à fait classique. Nous allons la détailler dans le cas présent.

Nous noterons $V^\vee$ le dual de V et $(y_1, \cdots, y_n)$ les coordonnées duales.

On a un morphisme :

$$i_A \ : (\mathbf{C}^*)^k \to V^\vee$$

$$(x_1, \cdots, x_k) \to (x^{a_1}, \cdots, x^{a_n}).$$

Les hypothèses $(*)$ garantissent que i_A est une immersion. On note X_A^0 le tore $i_A((\mathbf{C}^*)^k)$ et X_A l'adhérence de Zariski de X_A^0 dans $V^\vee$. C'est une variété torique (non normale en général). En effet l'action de $(\mathbf{C}^*)^k$ sur X_A définie par $(y_1, \cdots, y_n) \to (x^{a_1} y_1, \cdots, x^{a_n} y_n)$ si $x \in (\mathbf{C}^*)^k$ prolonge l'action naturelle de $(\mathbf{C}^*)^k$ sur X_A^0 par multiplication. Algébriquement on peut voir X_A comme étant égale à Spec $\mathbf{C}[S(A)]$, le plongement de X_A dans $V^\vee$ étant donné par :

$$\iota_A \ : \mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n] \to \mathbf{C}[S(A)]$$
$$y_i \to x^{a_i}.$$

La normalisée X'_A de X_A est donnée par $X'_A = \text{Spec } \mathbf{C}[\mathbf{R}_+S(A) \cap M]$. On notera I_A le noyau de ι_A. C'est l'idéal définissant X_A dans $V^\vee$.

Comme X_A est conique d'après (*1), elle possède une variété duale $X_A^\vee \subset V$. L'énoncé suivant est essentiellement tautologique :

PROPOSITION 2.2.1.— *On a l'égalité* $X_A^\vee = \nabla_A$.

2.4. Le discriminant E_A

Dans la situation générale, les résultats de [G-K-Z 2] concernent les discriminants E_A que nous allons définir et non les Δ_A. Nous donnons ici une définition combinatoire des E_A. Une description géométrique en sera donnée dans la section 4. En 2.6 on expliquera comment passer de E_A à Δ_A.

2.4.1. Soit τ une face de $Q(A)$. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}\tau$ il y a deux réseaux naturels contenus l'un dans l'autre : le réseau $M(S(\tau))$ engendré par le semi-groupe $S(A) \cap \mathbf{R}\tau$ et $M \cap \mathbf{R}\tau$. On note $i(\tau, S(A))$ l'indice du premier dans le second.

Si $S \subset M$ est un semi-groupe de type fini contenant l'origine, tel que $\mathbf{R}_+S$ soit strictement convexe, engendrant un réseau $M(S)$, et tel que $S \to M(S)$ soit injectif, on note $K_-(S) = \mathbf{R}_+S \setminus Q(S \setminus \{0\})$. On définit l'entier $u(S)$ comme le volume de $K_-(S)$ relativement au réseau $M(S)$.

Si τ est une face de $Q(A)$, on note $S(A)/\tau$ l'image de $S(A)$ dans $\mathbf{R}^k/\mathbf{R}\tau$, et $M(S(A)/\tau)$ le réseau engendré. On définit $u(\tau, S(A))$ comme étant égal à $u(S(A)/\tau)$.

2.4.2 DÉFINITION.—

(i) Si τ est une face de $Q(A)$ on pose

$$m(\tau, S(A)) = i(\tau, S(A)) \cdot u(\tau, S(A)) \ .$$

(ii) Le discriminant E_A est le produit, défini au signe près,

$$E_A = \Pi \Delta_{A\cap\tau}^{m(\tau,S(A))} \ ,$$

τ parcourant l'ensemble des faces non-vides de $Q(A)$ (parmi lesquelles figure $Q(A)$).

2.5. Le résultat principal

On rappelle que si $F \in \mathbf{C}[c_1, \cdots, c_n]$ est un polynôme, $F = \sum_{p \in \mathbf{N}^n} \alpha_p c^p$, le polyèdre de Newton de F, noté $\mathrm{Nw}(F)$, est par définition l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^n$ des p tels que $\alpha_p \neq 0$. Le résultat principal de [G-K-Z 2] est le suivant.

THÉORÈME 2.5.1 [G-K-Z 2].—

1) *Le polyèdre de Newton du discriminant E_A, $\mathrm{Nw}(E_A)$, est égal au polytope secondaire $QQ(A)$.*

2) *Si $T \in \mathcal{T}^0(A)$, le coefficient du monôme c^{ϕ_T} dans E_A est égal à $\pm \prod_{\sigma \in T} (\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}}$.*

Ce résultat a le corollaire suivant, a priori assez surprenant : les coefficients des monômes extrémaux de E_A sont des produits d'entiers de la forme N^N avec N entier. Ceci généralise le fait que dans $4p^3 + 27q^2$, $4 = 2^2$ et $27 = 3^3$ (cf. §3).

En fait Gelfand, Kapranov et Zelevinsky ont même déterminé les changements de signe des coefficients des monômes extrémaux reliés par une arête. Avec les notations de 1.7, on a :

THÉORÈME 2.5.2 [G-K-Z 2].— *Si on choisit un signe pour E_A, on peut écrire dans le 2) du théorème précédent*

$$(-1)^{p(T)} \prod_{\sigma \in T} (\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}},$$

avec $p(T) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ vérifiant la propriété suivante : si T et T' appartiennent à $\mathcal{T}^0(A)$, et si ϕ_T et $\phi_{T'}$ sont reliés par une arête de $QQ(A)$, alors

$$p(T') - p(T) = \sum_{J \in S(T,T')} k(J \cup Z)(\mathrm{vol}\, Q(J \cup Z) + 1) \mod 2\,,$$

avec Z le circuit sur lequel s'appuient T et T' et $k(J \cup Z)$ l'indice dans $\mathbf{Z}^n$ du réseau engendré par $J \cup Z$.

Remarque : Dans [G-K-Z 2] la formule pour $p(T') - p(T)$ n'est pas correcte telle qu'elle est donnée ; en suivant la démonstration de [G-K-Z 2] on obtient la formule ci-dessus.

2.6. Passer de E_A à Δ_A

Si S est un semi-groupe comme en 2.4.1, on définit, suivant [K], l'entier $\nu(S) = \Sigma(-1)^{\text{codim } \tau} u(S \cap \tau)$, τ décrivant les faces du cône $\mathbf{R}_+S$. D'après [K], on a toujours $\nu(S) \geq 0$, et $\nu(S) = 0$ si et seulement si le semi-groupe S est isomorphe à $\mathbf{N}^r, r \geq 1$. Rappelons (cf. [D]) qu'une variété torique affine de la forme $X = \text{Spec } \mathbf{C}[C \cap \mathbf{Z}^r]$, avec C un cône polyédral de dimension r, ayant l'origine comme unique sommet, est lisse si et seulement si C est de la forme $\mathbf{R}_+v_1 + \cdots + \mathbf{R}_+v_r$ avec $(v_1, \cdots, v_r)$ une base de $\mathbf{Z}^r$. On déduit de cela immédiatement l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.6.1 [G-K-Z 2].— *Si la variété torique $X_A \subset V^\vee$ est un cône sur une variété lisse (i.e. $\mathbf{P}(X_A) \subset \mathbf{P}(V^\vee)$ est lisse), alors les $m(\tau, S(A))$ définis en 2.4 sont tous égaux à 1. Autrement dit :*

$$E_A = \pm \Pi \Delta_{A \cap \tau} ,$$

τ parcourant l'ensemble des faces non-vides de $Q(A)$.

Ce résultat va permettre, quand $\mathbf{P}(X_A)$ est lisse, de déterminer explicitement $\text{Nw}(\Delta_A)$ à partir de 2.5.

Si τ est une face de $Q(A)$, on note vol_τ la forme volume sur l'espace affine engendré par τ, normalisée par la trace du réseau $\mathbf{Z}^k$.

Si $T \in \mathcal{T}(A)$, on note $F_j(T)$ l'ensemble des simplexes σ de dimension j de T tels que $\bar{\sigma}$ soit contenu dans une face de dimension j de $Q(A)$, notée $\tau(\sigma)$.

On pose

$$\phi_{T,j} = \sum_{\sigma \in F_j(T)} \text{vol}_{\tau(\sigma)} \bar{\sigma} \ \ (e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(j)}) \ .$$

Ainsi $\phi_{T,k}$ coïncide avec ϕ_T défini précédemment. On pose

$$\Phi_T = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \phi_{T,j}.$$

DÉFINITION 2.6.2.— *On note $\tilde{\mathcal{T}}(A)$ le quotient de $\mathcal{T}(A)$ par la relation d'équivalence $T \sim T'$ si et seulement si $\Phi_T = \Phi_{T'}$, et on note $\tilde{\mathcal{T}}^0(A) \subset \tilde{\mathcal{T}}(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de triangulation régulières.*

On déduit de la proposition précédente et du théorème 2.5.2, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.6.3 [G-K-Z 2].— *Si $\mathbf{P}(X_A)$ est lisse alors*

1) $\mathrm{Nw}(\Delta_A)$ est l'enveloppe convexe des Φ_T , $T \in \mathcal{T}(A)$ et les sommets de $\mathrm{Nw}(\Delta_A)$ sont les Φ_T , $T \in \mathcal{T}^0(A)$.

2) Si $T \in \mathcal{T}^0(A)$, le coefficient du monôme c^{Φ_T} dans Δ_A est égal à

$$\pm \prod_{j=0}^{k} \prod_{\sigma \in F_j(T)} \left[(\mathrm{vol}\ \bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\ \bar{\sigma}}\right]^{(-1)^{k-i}} .$$

3. EXEMPLES

Dans tous ces exemples $\mathbf{P}(X_A)$ est lisse.

3.1 Discriminant d'un polynôme à une variable

Soit $P = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \cdots + c_0$ un polynôme d'une variable. Le discriminant $D(P)$ est défini classiquement comme

$$D(P) = c_r^{2r-2} \Pi_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ étant les racines de P dans une clôture algébrique. C'est un polynôme à coefficients entiers en les c_i.

Soit $A = \{a_0, \cdots, a_r\}$ avec $a_i = (i, 1) \in \mathbf{R}^2$. Il est clair (exercice) que $D(P) = \pm \Delta_A$. On voit que toutes les triangulations de A sont régulières et qu'elles sont décrites par les parties de $\{1, \cdots, r-1\}$. Si T est décrite par $\Omega = \{i_1, \cdots, i_s\} \subset \{1, \cdots, r-1\}$ avec $i_1 < \cdots < i_s$, ϕ_T est le point de coordonnées dans $\mathbf{R}^{r+1}$:

$$x_0 = i_1 \ , \ x_r = r - i_s \ , \ x_{i_k} = i_{k+1} - i_{k-1} \ , \ x_i = 0 \quad \text{sinon} \quad ,$$

avec la convention que $i_0 = 0$ et $i_{s+1} = r$.

D'après la proposition 2.6.1, $E_A = \pm c_0 c_r \Delta_A$. Les théorèmes 2.5.1 et 2.5.2 donnent maintenant directement le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1.1 [G-K-Z 3].— *Les sommets du polyèdre de Newton de $D(P)$ sont les points de coordonnées $x_0 = i_1 - 1$, $x_r = r - i_s - 1$, $x_{i_k} = i_{k+1} - i_{k-1}$, $x_i = 0$ sinon, avec $i_1 < \cdots < i_s$ décrivant l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, r-1\}$. Le coefficient du monôme associé à $i_1 < \cdots < i_s$ est $\prod_{0 \leq k \leq s} (-1)^{\ell_k(\ell_k-1)/2} \ell_k^{\ell_k}$, avec $\ell_k = i_{k+1} - i_k$, en convenant que $\ell_0 = i_1$ et $\ell_s = r - i_s$.*

Le lecteur trouvera dans l'article [G-K-Z 3] une description plus détaillée de
$\mathrm{Nw}(D(P))$. Le cas de polynômes "creux" est tout à fait similaire : nous laissons le lecteur s'amuser à retrouver que le discriminant de $x^3 + px + q$ est $-(4p^3 + 27q^2)$. Remarquons qu'une formule générale simple pour les coefficients des monômes non extrémaux de $D(P)$ ne semble pas connue.

3.2. Résultant de deux polynômes à une variable

Soient m et $n \geq 1$, et $P(x) = a_0 x^m + \cdots + a_m$, $Q(x) = b_0 x^n + \cdots + b_n$ deux polynômes à une variable. Le résultant $R(P, Q)$ est par définition égal à $a_0^n b_0^m \Pi(\alpha_i - \beta_j)$, les α_i (resp. β_j) étant les racines de P (resp. Q) dans une clôture algébrique. C'est un polynôme à coefficients entiers en les a_i, b_j.

On pose $A = \{(i, 0)\ ,\ (j, 1)\ \ ;\ i \in \{0, \cdots, m\}\ ,\ j \in \{0, \cdots, n\}\}$. On vérifie aisément que $R(P, Q) = \pm \Delta_A$. La relation d'équivalence $\sim$ introduite en 2.6.2 sur les triangulations admet la description suivante dans le cas présent : c'est la relation d'équivalence engendrée par $T \approx T'$ si T' est obtenue à partir de T en subdivisant un triangle en deux triangles. De plus on vérifie que toutes les triangulations sont régulières. Une triangulation est dite basique si la réunion de deux triangles n'est pas un triangle. Chaque classe d'équivalence dans $\widetilde{\mathcal{T}}^0(A)$ a donc un unique représentant basique. Notons $B(A)$ l'ensemble des triangulations basiques. Si $T \in B(A)$, on vérifie que le vecteur Φ_T est égal à $(p(T), q(T))$ avec $p(T) \in \mathbf{Z}^{m+1}, q(T) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ définis comme suit : $p_i(T) = |b - c|$ s'il existe un triangle de T de sommets $(i, 0)$, $(b, 1)$ et $(c, 1)$; sinon $p_i(T) = 0$. De même $q_j(T) = |b - c|$ s'il y a un triangle de T de sommets $(j, 1)$, $(b, 0)$

et $(c,0)$; sinon $q_j(T)=0$. On déduit du théorème 2.6.3 le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.1 [G-K-Z 3].—

L'application $T \to (p(T),q(T))$ *est une bijection entre* $B(A)$ *et l'ensemble des sommets de* $\mathrm{Nw}(R(P,Q))$. *Les coefficients des monômes correspondants sont égaux à* ± 1.

On peut voir l'ensemble des $(p(T),q(T))$, $T \in B(A)$ comme l'ensemble des "chemins monotones" sur le réseau $\mathbf{Z}^2$ reliant $(0,0)$ à (m,n) (cf [G-Z-K 3]). On peut calculer les signes des coefficients des monômes extrémaux de $R(P,Q)$: d'après ([G-K-Z 3] prop. 15) le coefficient du monôme associé à T est $(-1)^{p_1+2p_2+\cdots+mp_m}$, si $p(T)=(p_0,\cdots,p_m)$. On peut déduire ce résulat du théorème 2.5.2, mais la preuve dans [G-K-Z 3] est directe. En fait dans [G-K-Z 3] est donnée une formule pour tous les coefficients des monômes de $R(p,q)$ en terme de fonctions combinatoires associées au groupe symétrique.

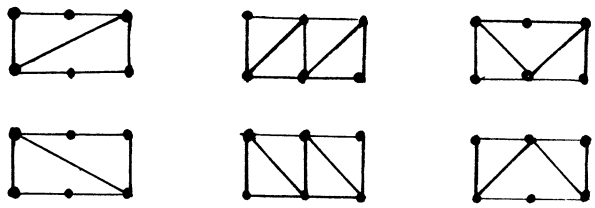
A titre d'illustration traitons explicitement le cas $m=n=2$. On a

$$R(P,Q)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_0^2b_2^2 + a_0a_2b_1^2 - a_0a_1b_1b_2 + a_1^2b_0b_2 + a_2^2b_0^2$$

$$-a_1a_2b_0b_1 - 2a_0a_2b_0b_2 \ .$$

Excepté le dernier, tous les monômes sont des sommets de $Nw(R(P,Q))$. Il y a exactement six triangulations basiques de A qui correspondent respectivement aux monômes $a_0^2b_2^2$, $a_0a_1b_1b_2, a_1^2b_0b_2$, $a_2^2b_0^2$, $a_1a_2b_0b_1$ et $a_0a_2b_1^2$ (voir la figure).



3.3. Déterminants

Notons $(e_1, \cdots, e_m)$ la base canonique de $\mathbf{R}^m$, $(f_1, \cdots, f_n)$ celle de $\mathbf{R}^n$. Soit $A = \{(e_i, f_j); i \in [m], j \in [n]\}$. On vérifie facilement que le polynôme $E_A(f)$ est égal au signe près au produit des mineurs de tout ordre de la matrice (c_{ij}) si $f = \Sigma c_{ij} x_i y_i \in \mathbf{C}[x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n]$. Si $m = n$, $\Delta_A(f)$ est égal (au signe près) au déterminant de la matrice carrée (c_{ij}). Cette remarque permet de définir, à la suite de Cayley, "l'hyperdéterminant d'une matrice de dimension d" [G-K-Z 5] : si A est la famille des $(e_{1,i_n}, \cdots, e_{d,i_d}) \in \mathbf{R}^{n_1+\cdots+n_d}, i_k \in [n_k]$, $(e_{k,i_k})_{i_k \in [n_k]}$ étant la base canonique de $\mathbf{R}^{n_k}$, et $C = (c_{i_1,\cdots,i_d})_{i_k \in [n_k]}$, on pose Det $C = \pm\Delta_A(f_C)$, f_C étant la forme multilinéaire associée à C. On montre (cf [G-K-Z 5]) que $\Delta_A(f_C) \neq \pm 1$ si et seulement si $n_k \leq \sum_{j \neq k} n_j - d$, pour tout k.

4. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE E_A

4.1. Rappels sur det et Div [Kn-M]

Dans cette section on rappelle brièvement des constructions développées dans l'article [Kn-M], dans un cadre moins général que celui de l'article, mais plus que suffisant pour le présent exposé.

DÉFINITION 4.1.1.— *Un complexe parfait sur un schéma X est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules qui est, localement sur X, quasi-isomorphe à un complexe borné de $\mathcal{O}_X$-modules libres de type fini. On note* Parf_X *la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules dont les objets sont les complexes parfaits.*

D'après Grothendieck, Ferrand et Knudsen-Mumford [Kn-M], il existe un foncteur "déterminant" naturel qui à un objet $\mathcal{F}^\cdot$ de Parf_X associe un $\mathcal{O}_X$-module libre de rang 1 noté $\det(\mathcal{F}^\cdot)$.

On suppose dans ce qui suit que X est irréductible et régulier.

Soit $\lambda : \mathcal{E}_1^\cdot \to \mathcal{E}_2^\cdot$ un morphisme de complexes bornés de $\mathcal{O}_X$-modules libres de type fini. On suppose que λ est un quasi-isomorphisme au point générique de X et on note $U(\lambda)$ l'ouvert sur lequel λ est un quasi-isomorphisme. En choisissant des bases des $\mathcal{E}_i^j$ on obtient des isomorphismes

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \det(\mathcal{E}_1^\cdot) \quad \text{et} \quad \det(\mathcal{E}_2^\cdot) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X.$$

En composant avec $\det(\lambda) : \det(\mathcal{E}_1^\cdot) \to \det(\mathcal{E}_2^\cdot)$ on obtient un morphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ qui est un isomorphisme sur $U(\lambda)$. Il détermine donc une section s de $\Gamma(U(\lambda), \mathcal{O}_X^*)$ et $s = 0$ définit un diviseur de Cartier sur X, noté $\mathrm{Div}\,(\lambda)$, indépendant des choix.

Cette construction s'étend aux morphismes $\lambda : \mathcal{F}^\cdot \to \mathcal{G}^\cdot$ dans Parf_X qui sont des quasi-isomorphismes au point générique de X. En particulier si $\mathcal{F}^\cdot \in \mathrm{Parf}_X$ est exact au point générique de X, en appliquant ce qui précède à l'application nulle $0 \to \mathcal{F}^\cdot$, on obtient un diviseur $\mathrm{Div}\,\mathcal{F}^\cdot = \mathrm{Div}(0 \to \mathcal{F}^\cdot)$. Les propriétés de Div sont détaillées dans [Kn-M]. Une des plus importantes est la suivante :

PROPOSITION 4.1.2 [Kn-M].—

Soit $\mathcal{F}^{\cdot}$ un complexe parfait de $\mathcal{O}_X$-modules, exact au point générique de X. Pour tout diviseur irréductible D dans X notons $\mathcal{O}_{X,D}$ l'anneau localisé de X en D et i_D : Spec $\mathcal{O}_{X,D} \to X$. L'anneau $\mathcal{O}_{X,D}$ est un anneau de valuation discrète de rang 1, et les $i_D^*(H^i(\mathcal{F}^{\cdot}))$ sont des $\mathcal{O}_{X,D}$-modules de torsion ; notons $m_D^i(\mathcal{F}^{\cdot})$ leur longueur et $m_D(\mathcal{F}^{\cdot}) = \Sigma(-1)^i m_D^i(\mathcal{F}^{\cdot})$. On a $\mathrm{Div}(\mathcal{F}^{\cdot}) = \Sigma\, m_D(\mathcal{F}^{\cdot})D$.

4.2. On assouplit ici les hypothèses $(*)$ de 2.1. On se donne un sous-ensemble fini A de $\mathbf{Z}^k, A = (a_1, \cdots, a_n)$. On suppose qu'il existe une forme $\mathbf{Q}$-linéaire h : $\mathbf{Q}^k \to \mathbf{Q}$ telle que $A \subset h^{-1}(1)$. On se donne un semi-groupe $S \subset \mathbf{Z}^k$, de type fini contenant l'origine tel que :

(i) Si $s \in S$ est non nul $h(s) \geq 1$.

(ii) A est contenu dans $S \cap h^{-1}(1)$ et $\mathbf{R}_+A = \mathbf{R}_+S$.

(iii) Le réseau $M(S)$ engendré par S est tel que $\mathbf{Z}^k/M(S)$ soit libre.

On notera $S_i = S \cap h^{-1}(i)$ et M le réseau $\mathbf{Z}^k$. Pour i entier positif et $p \in \mathbf{Z}$ on note

$$\Lambda^i(p) = (\Lambda^{i+k}(\mathbf{C}^k))^{S_{i+k+p}}.$$

Si $a \in A$, on a une différentielle d_a : $\Lambda^i(p) \to \Lambda^{i+1}(p)$ définie par

$$(d_a\gamma)(u) = a \wedge \gamma(u - a)$$

avec la convention $\gamma(u-a) = 0$ si $u - a \notin S_{i+k+p}$. Si $f = \sum_{j\in[n]} c_j x^{a_j}$ appartient à V, on pose $d_f = \sum_{j\in[n]} c_j d_{a_j}$. Pour chaque p, on a ainsi un complexe borné de $\mathcal{O}_V$-modules libres de type fini $\Lambda^{\cdot}(p)_V$ sur V. En fait, comme on a une structure entière sur $\Lambda^i(p)$ en posant $\Lambda^i(p)_{\mathbf{Z}} = (\Lambda^{i+k}(M))^{S_{i+k+p}}$, on définit de même un complexe borné de $\mathcal{O}_{V_{\mathbf{Z}}}$-modules libres de type fini, $\Lambda^{\cdot}(p)_{V_{\mathbf{Z}}}$ sur $V_{\mathbf{Z}} = \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}[c_j]$. Ces complexes dépendant de A, S, M, on les notera $\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}}, ...$, si besoin est.

4.3 Dans cette section on interprète géométriquement E_A comme l'équation d'un Div associé à $\Lambda^{\cdot}(p)$:

THÉORÈME 4.3.1 [G-K-Z 2].—

Supposons que A vérifie les conditions $(*)$. Alors, pour p grand, $\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)V_{\mathbf{Z}}$ est exact au point générique de $V_{\mathbf{Z}}$, et $\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbf{Z}}})$ *est le diviseur d'équation $E_A = 0$.*

Démonstration :

1) On montre que pour p grand, $\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_V$ est exact au point générique de V et que son Div a pour équation $E_A = 0$. (Cette partie de la démonstration est valide même si A ne vérifie pas $(*)$, en remplaçant M par le réseau engendré $M(A)$.) On peut voir $\Lambda^i = \oplus \Lambda^i(p)$ comme un module sur l'anneau $\mathbf{C}[S(A)]$. Il lui est donc associé un faisceau $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ sur $X_A = \mathrm{Spec}\ \mathbf{C}[S(A)]$. Soit $\pi : X'_A \to X_A$ la normalisation de X_A ($X'_A = \mathrm{Spec}\ \mathbf{C}[\mathbf{R}_+ S(A) \cap M]$). Notons Z le fermé $X_A \setminus X_A^0$ (c'est la réunion des $(\mathbf{C}^*)^k$-orbites de codimension ≥ 1) et $Z' = \pi^{-1}(Z)$. Sur la variété torique normale X'_A on dispose du faisceau des i-formes différentielles (algébriques) à pôles logarithmiques le long de Z' (défini par exemple dans [D]) noté $\Omega^i_{X'_A}(\log Z')$. On pose $\Omega^i_{X_A}(\log Z) = \pi_* \Omega^i_{X'_A}(\log Z')$. D'après la description de $\Omega^i_{X'_A}(\log Z')$ donnée dans [D] on trouve que $\Omega^i_{X_A}(\log Z)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ sur $X_A \setminus \{0\}$ et que la graduation sur les sections de $\mathcal{F}(\Lambda^i)$ correspond à celle sur $\Omega^i_{X_A}(\log Z)$ provenant de la structure conique de X_A. De plus la différentielle d_f correspond au produit extérieur par df. Comme on voit directement que si $E_A(f) \neq 0$, $(\Omega^{\cdot}_{X_A}(\log Z), df\wedge)$ est acyclique sur $X \setminus \{0\}$, on obtient que pour p grand, $\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_V$ est exact au point générique de V et que le Div associé est indépendant de p. De plus ceci donne que les composantes irréductibles du Div sont de la forme $\Delta_{A\cap\tau}$ avec τ une face de $Q(A)$. On peut donc écrire pour p grand :

$$\mathrm{Div}\ (\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_V) = \Pi \Delta_{A\cap\tau}^{\mu(\tau)}\ .$$

Il reste à montrer que $\mu(\tau) = m(\tau, S(A))$. Pour cela on voit $(\Omega^{\cdot}_X(\log Z), df\wedge)$ comme un complexe de faisceaux sur $V^\vee \times V$, que l'on note $\Omega^{\cdot}$. A toute face τ de $Q(A)$ est associée une sous-variété torique $X(\tau)$ dans $X_A \subset V^\vee$ définie par les équations $y_i = 0$ si $a_i \notin \tau$. On note T^*_τ

son espace conormal contenu dans le cotangent $T^*V^\vee$ (par définition T^*_τ est l'adhérence du conormal aux points lisses de $X(\tau)$). On voit T^*_τ comme contenu dans $V^\vee \times V$ en identifiant $V^\vee \times V$ à $T^*V^\vee$. Des considérations standard de multiplicités, jointes à la proposition 4.1.2, permettent de montrer que $\mu(\tau)$ est égal à la somme alternée des multiplicités des $H^i(\Omega^\cdot)$ au point générique de T^*_τ. L'étape finale consiste à utiliser les D-modules. Notons $D_{V^\vee}$ l'anneau des opérateurs différentiels algébriques sur $V^\vee$ et F la filtration par l'ordre des opérateurs. On peut munir $\Omega^\cdot_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}$ d'une différentielle naturelle d qui prolonge la différentielle extérieure $d : \Omega^\cdot_{X_A}(\log Z) \to \Omega^{\cdot+1}_{X_A}(\log Z)$. On munit $\Omega^\cdot_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}$ de la filtration

$$F_m(\Omega^i_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}) = \Omega^i_{X_A}(\log Z) \otimes F_{i+m}D_{V^\vee}.$$

La remarque cruciale est que $\mathrm{gr}^F_\cdot(\Omega^\cdot_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee})$ s'identifie naturellement au complexe $\Omega^\cdot$. Ceci donne que $\mu(\tau)$ est égale à la multiplicité de T^*_τ dans le cycle caractéristique du complexe de $D_{V^\vee}$-modules à droite $\Omega^\cdot_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{V^\vee}} D_{V^\vee}$, que l'on notera $M^\cdot$. D'autre part le complexe de De Rham analytique $\mathcal{DR}M^\cdot$ s'identifie naturellement au complexe $\Omega^\cdot_{X_A}(\log Z) \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \mathcal{O}^{an}_{X_A}$ qui est quasi-isomorphe au faisceau pervers $\mathbf{R}_{i_{A^*}}\underline{\mathbf{C}}_{X^0_A}$. On vérifie que le complexe $M^\cdot$ est à cohomologie holonome régulière. On en déduit que le cycle caractéristique de $M^\cdot$ est égal à celui de $\mathbf{R}_{i_{A^*}}\underline{\mathbf{C}}_{X^0_A}$. Pour calculer le cycle caractéristique de $\mathbf{R}_{i_{A^*}}\underline{\mathbf{C}}_{X^0_A}$ on emploie la méthode des cycles évanescents (cf J.-L. Brylinski, Séminaire Bourbaki, exposé n°585, th.4.2.8 ou V. Ginsburg, Invent. math. 84, 327-402 (1986)). La multiplicité $\mu(\tau)$ s'obtient comme suit : on prend $g : V^\vee \to \mathbf{C}$ linéaire qui s'annule sur $X(\tau)$ (la restriction de g à X_A est de la forme $\Sigma c_i x^{a_i}$ avec $c_i = 0$ si $a_i \notin \tau$) ; alors $\mu(\tau)$ est égale à la caractéristique d'Euler de la fibre du faisceau des cycles évanescents $\Phi_g(\mathbf{R}_{i_{A^*}}\underline{\mathbf{C}}_{X^0_A})$ au point général de $X(\tau)$. Le fait que $\mu(\tau) = m(\tau, S(A))$ est alors essentiellement conséquence du théorème de D.Bernstein, Kouchnirenko et Hovansky (cf [K]) exprimant la caractéristique d'Euler d'une hypersurface en position générale dans une variété torique en fonction de volumes de polytopes.

2) Pour passer du résultat sur $\mathbf{C}$ au résultat sur $\mathbf{Z}$, il reste à montrer que $\mathrm{Div}\,(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbf{Z}}})$ n'a pas de composante au-dessus d'une place finie pour $p \gg 0$. Pour cela il suffit de montrer que, avec des notations évidentes, pour tout corps fini F, $\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_F}$ est acyclique pour $p \gg 0$ au point générique de V_F. La démonstration est la même que celle sur $\mathbf{C}$ donnée au début de 1) (on utilise cependant ici de façon essentielle que A vérifie les conditions $(*)$). □

4.4 Nous aurons besoin dans la section 5 des propriétés suivantes de $\mathrm{Div}\,(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}})$ quand on change S ou M.

PROPOSITION 4.4.1.— *Pour $p \gg 0$, on a :*

1) Si $M(S)$ est de rang $r < k$, $\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}}) = \emptyset$.

2) Si $M(S)$ est de rang k, $\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbf{Z}}})$
$= [M : M(A)]^{\mathrm{vol}Q(A)} + \mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M(A))_{V_{\mathbf{Z}}})$.

3) Si $M(S)$ est de rang k, $\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}})$
$= [M : M(A)]\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S(A), M)_{V_{\mathbf{Z}}})$.

Démonstration :

1) Si on filtre $\Lambda^i M$ par $F_m(\Lambda^i M) = \Lambda^{i-m}(M(S)) \wedge \Lambda^m M$ on trouve que

$$\mathrm{gr}_m^F \Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M) \simeq \Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M(S))^{\binom{k-r}{m}}[m]$$

où $[m]$ désigne un décalage du complexe de m à droite, et le résultat découle de
$(1-1)^{k-r} = 0$.

2) Il suffit de calculer directement l'influence du changement de réseau.

3) est plus délicat (voir [G-K-Z 2] Prop. 2B11). □

COROLLAIRE 4.4.2.— *Si $A = (a_1, \cdots, a_k)$ est l'ensemble des sommets d'un simplexe de volume v, et si S engendre M, alors l'équation de* $\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A, S, M)_{V_{\mathbf{Z}}})$, *pour $p \gg 0$, est $\pm v^v c_1^v \cdots c_k^v$.*

5 PREMIÈRE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5.1

Dans cette section on expose la preuve du théorème 2.5.1. donnée dans [G-K-Z 2]. Le point essentiel est la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1.— *Soient* $T \in \mathcal{T}^0(A)$ *et* $\psi : A \to \mathbf{Z}$ *appartenant à l'intérieur du cône* $\mathcal{C}(A,T)$. *Soient* $f = \sum_{1\leq i\leq n} c_i x^{a_i} \in V$, *et* $f_t = \sum_{1\leq i\leq n} c_i t^{-\psi(a_i)} x^{a_i}$. *On note* $E_{A,\sigma}$ *l'équation, définie au signe près, de* $\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A\cap\sigma, S(A)\cap \mathbf{R}_+\bar{\sigma}\ ,\ M)_{V_{\mathbf{Z}}})$ *pour* $p \gg 0$. *Alors*

$$\lim_{t\to 0} \frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma\in T} E_A(f_{t/A\cap\sigma})} = \pm 1\ .$$

Expliquons comment on déduit le théorème de la proposition. D'après le corollaire 4.4.2, on a

$$\prod_{\sigma\in T} E_A(f_{t/A\cap\sigma}) = \pm \prod_{\sigma\in T} \left[(\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}} (\prod_{1\leq i\leq k} c_{\sigma(i)} t^{-\psi(a_i)})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}} \right]$$

$$= \pm \prod_{\sigma\in T} (\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}} (c(t))^{\phi_T}$$

avec $c(t) = (c_i t^{-\psi(a_i)})$.

On a donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma\in T} (\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}} (c(t))^{\phi_T}} = \pm 1\ ,$$

quels que soient les c_i et quel que soit ψ appartenant à l'intérieur de $\mathcal{C}(A,T)$. On en déduit que si $U(T) = \{(c_1,\cdots,c_n)\ ;(\log|c_1|,\cdots,\log|c_n|) \in \mathcal{C}(A,T)\}$, quand $(c_1,\cdots,c_n)$ tend vers l'infini dans le domaine $U(T)$, le quotient $\frac{E_A(f_t)}{\prod_{\sigma\in T} (\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}} c^{\phi_T}}$ a pour limite ± 1. Ceci entraîne directement que ϕ_T est un sommet de $\mathrm{Nw}(E_A)$, de coefficient $\pm\prod_{\sigma\in T} (\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}}$, et que $\mathcal{C}(A,T)$ est contenu dans $C(\mathrm{Nw}(E_A),\phi_T)$. Mais comme la réunion des cônes $\mathcal{C}(A,T)$, $T \in \mathcal{T}^0$, est égale à $\mathbf{R}^n$, nécessairement $\mathrm{Nw}(E_A) = QQ(A)$.

Démonstration de la proposition 5.1 : On considère l'anneau des séries de Laurent formelles $\mathbf{Z}((t)) = \bigcup_{m\in\mathbf{Z}} F^m\mathbf{Z}((t))$ avec $F^m\mathbf{Z}((t))$ l'ensemble des séries $\sum_{i=m}^{+\infty} \alpha_i t^i$,
$\alpha_i \in \mathbf{Z}$. On a $\mathrm{gr}_F^{\cdot}\mathbf{Z}((t)) = \mathbf{Z}[t,t^{-1}]$. Soit $\Lambda^{\cdot}(p)(A,S(A),M)((t)) = \Lambda^{\cdot}(p)(A,S(A),M)\otimes\mathbf{Z}((t))$ muni de la différentielle tordue $\sum_{1\leq j\leq n} c_j d_{a_j} \otimes t^{-\psi(a_j)}$. Le Div du complexe de faisceau correspondant sur $V_{\mathbf{Z}((t))}$ est égal à $\pm E_A(f_t)$. On note $G_{T,\psi} : \mathbf{R}_+A \to \mathbf{R}$ la fonction homogène de degré 1 qui coïncide avec $g_{T,\psi}$ sur $Q(A)$. On filtre $\Lambda^i(p)(A,S(A),M)((t))$ par

$$F^m = \bigoplus_{u\in S_{i+p}} F^{m-G_{T,\psi}(u)}\mathbf{Z}((t))\otimes\Lambda^i(\mathbf{Z}^k).$$

Cette filtration est compatible avec la différentielle.

D'après (une variante d') un théorème de Kouchnirenko ([K]), le complexe de $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$-modules $\mathrm{gr}_F^{\cdot}(\Lambda^{\cdot}(p)(A,S(A),M)((t)))$ a une résolution dont le d-ième terme est la somme sur tous les simplexes σ de codimension d de T, non contenus dans une face de $Q(A)$ de la même dimension, des $\Lambda^{\cdot}(p)(A\cap\bar{\sigma},\mathbf{R}_+\bar{\sigma}\cap S,M)[t,t^{-1}]$ munis de la différentielle $d_{f_t/A\cap\bar{\sigma}}$. On en déduit, en utilisant 4.4.1. 1) et l'additivité de Div, que le Div associé à $\mathrm{gr}_F^{\cdot}(\Lambda^{\cdot}(p)(A,S(A,M)((t)))$ est égal à $\sum_{\sigma\in T}\mathrm{Div}(\Lambda^{\cdot}(p)(A\cap\bar{\sigma},\mathbf{R}_+\bar{\sigma}\cap S,M)$ pour p grand, les $\Lambda^{\cdot}$ étant munis des différentielles $d_{ft/A\cap\bar{\sigma}}$. Avec un peu de réflexion on en tire l'énoncé de la proposition. □

6. RELATION AVEC LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

6.1 Il semble que la découverte du polytope $QQ(A)$ et de son lien avec les discriminants trouve son origine dans l'article [G-K-Z 1], où à une triangulation régulière de $Q(A)$ est associée une base de fonctions hypergéométriques, plus précisément une base de l'espace des solutions $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H^{an}_{\gamma,A}\ ,\ \mathcal{O}_V)$ pour γ général, $H_{\gamma,A}$ étant le D-module hypergéométrique défini en 6.2.

6.2 Soit A vérifiant les conditions $(*)$. On note $L(A) \subset \mathbf{Z}^n$ le réseau des relations linéaires entières entre les éléments de A. Si $\alpha \in L(A)$ est une relation non triviale, $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i a_i = 0$, on lui associe l'opérateur différentiel

$$\Gamma_\alpha = \prod_{\alpha_i > 0} (\frac{\partial}{\partial c_i})^{\alpha_i} - \prod_{\alpha_i < 0} (\frac{\partial}{\partial c_i})^{-\alpha_i}$$

sur V.

Pour $i \in [k]$, on définit

$$Z_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j^i c_j \frac{\partial}{\partial c_j},$$

a_j^i étant la i-ème coordonnée de a_j.

DÉFINITION 6.2.1.— *Pour $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k) \in \mathbf{C}^k$, le système hypergéométrique associé à A et à γ est le D-module $H_{\gamma,A} = D_V/I$, où I est l'idéal engendré par les Γ_α , $\alpha \in L(A)$, et les $Z_i - \gamma_i$, $i \in [k]$.*

6.3 Au vecteur γ on associe un système local $\mathcal{L}_{-\gamma}$ sur le tore $(\mathbf{C}^*)^k$ de monodromie $-\gamma_i$ autour de $x_i = 0$, pour $i \in [k]$. Un des résultats principaux de l'article [G-K-Z 4] est que pour γ générique, le complexe des solutions holomorphes de $H_{\gamma,A}$, $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H^{an}_{\gamma,A}$, $\mathcal{O}_V)$ coïncide avec les solutions usuelles $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(H^{an}_{\gamma,A}$, $\mathcal{O}_V)$ et est égal au transformé de Fourier-Sato de $i_{A!}\mathcal{L}_{-\gamma}$. On en déduit (cf [G-K-Z 4]) que le cycle caractéristique de $H_{\gamma,A}$, pour γ générique, coïncide avec celui calculé en 4.3.

7. DÉGÉNÉRESCENCES TORIQUES ET POLYTOPES DE CHOW

(d'après [K-S-Z])

7.1. Soit H le tore $(\mathbf{C}^*)^n$. On considère une représentation linéaire rationnelle $\rho : H \to GL(V)$, avec V un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $\rho(H)$ contient les homothéties. Si $v \in V$ est un vecteur non nul, on note $\underline{v}$ son image dans la projectif $\mathbf{P}(V)$, $\overline{Hv}$ l'adhérence de l'orbite de v et $\overline{H\underline{v}}$ l'image de $\overline{Hv}$ dans $\mathbf{P}(v)$. On identifie $\mathbf{Z}^n$ au groupe des caractères de H de telle sorte que $a = (a_1, \cdots, a_n)$ corresponde à $(t_1, \cdots, t_n) \to \Pi t_i^{a_i}$. L'espace V est somme directe des $V_a = \{v \in V \ ; \forall t \in H \ , \ \rho(t)v = t^a v\}$. Pour $v \in V$, on note $A(v)$ l'ensemble des poids a tels que v ait une composante non nulle sur V_a. Comme $A(v)$ ne dépend que de $\underline{v}$ on peut écrire $A(\underline{v})$.

7.2. Un point $\underline{w}$ de $\mathbf{P}(V)$ est une dégénérescence torique de $\underline{v}$ s'il existe un sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbf{C}^* \to H$ tel que, avec des abus de notation évidents, $\underline{w} = \lim_{t \to \infty} \rho(\lambda(t))\underline{v}$. Identifions λ au vecteur $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{Z}^n$, avec $\lambda(t) = (t^{\lambda_1}, \cdots, t^{\lambda_n})$, et notons $\tilde{\lambda} : Q(A(\underline{v})) \to \mathbf{R}$ la forme linéaire $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i$. On peut alors décrire les dégénérescences toriques de $\underline{v}$ de la façon suivante. Si σ est une face de $Q(A(\underline{v}))$, on relève $\underline{v}$ en $v = \sum_{a \in A(\underline{v})} v_a$ et on définit $\underline{v}_\sigma$ comme l'image de $\sum_{a \in A(\underline{v}) \cap \sigma} v_a$ dans $\mathbf{P}(V)$. On a alors $\underline{v}_\sigma = \lim_{t \to \infty} \rho(\lambda(t))\underline{v}$ si et seulement si la forme linéaire $\tilde{\lambda}$ atteint son maximum sur la face σ. De plus l'ensemble des $\underline{v}_\sigma$, σ décrivant l'ensemble des faces de $Q(A(\underline{v}))$, est exactement l'ensemble des dégénérescences toriques de $\underline{v}$. On dit qu'une dégénérescence torique est maximale si elle correspond à un sommet de $Q(A(\underline{v}))$.

Exemple 7.2.1 Le groupe $GL_n(\mathbf{C})$ agit naturellement sur l'espace $V = S^d(\mathbf{C}^n)$ des polynômes homogènes de degré d en n variables. On en déduit une action de $(\mathbf{C}^*)^n$ sur V pour laquelle $Q(A(\underline{f}))$ n'est autre que le polyèdre de Newton de f.

7.3 Soit $G(k,d,n)$ l'ensemble des cycles effectifs (purement) de dimension $k-1$ et de degré d dans $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-1}$. On munit $G(k,d,n)$ d'une structure de variété algébrique projective (variété de Chow). On note $G(n-k,n)$ la grassmannienne des sous espaces linéaires de dimension $n-k-1$ dans $\mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-1}$. Si $X \subset \mathbf{P}^{n-1}$ est irréductible de dimension $k-1$, on note $\mathcal{Z}(X) \subset G(n-k,n)$ la variété des sous espaces linéaires qui intersectent X. C'est une hypersurface irréductible dans $G(n-k,n)$. Considérons le plongement de Plücker $G(n-k,n) \hookrightarrow \mathbf{P}(V)$ avec $V = \Lambda^k((\mathbf{C}^n)^\vee)$, qui à un plan de codimension k associe le produit extérieur de k formes linéaires le définissant. Soit B l'anneau des coordonnées homogènes de $G(n-k,n)$ plongé dans $\mathbf{P}(V)$. L'application $\mathbf{C}[V] \to B$ est surjective, autrement dit, B est engendrée comme algèbre graduée par les crochets de Plücker $[i_1 i_2 \cdots i_k]$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. La forme de Cayley de X est l'équation $R_X \in B$ de $Z(X)$, définie à une constante non nulle près. Si $X = \Sigma n_i X_i$ est un cycle, les X_i étant irréductibles, on définit R_X par $R_X = \Pi R_{X_i}^{n_i}$.

On va définir maintenant le polytope de Chow de $X \in G(k,d,n)$. De l'action naturelle de $GL_n(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^{n-1}$ on déduit une action de $H = (\mathbf{C}^*)^n$ sur $G(k,d,n)$. D'autre part $GL_n(\mathbf{C})$, et donc H, agit également sur B. Le morphisme $X \to R_X$ étant H-équivariant, on peut définir $A(R_X)$ comme en 7.2. Le polytope de Chow de X est par définition le polytope $\mathrm{Ch}(X) = Q(A(R_X))$.

Exemples 7.3.1.

1) Si X est une hypersurface définie par une équation $f = 0$ de degré minimal, $\mathrm{Ch}(X)$ coïncide (à translation près) avec $\mathrm{Nw}(f)$.

2) Si X est le point de coordonnées homogènes $[x_1, \cdots, x_n]$, $\mathrm{Ch}(X)$ est l'enveloppe convexe des vecteurs de base e_i tels que $x_i \neq 0$.

On déduit directement de 7.2 l'énoncé suivant :

PROPOSITION 7.3.2.— *L'ensemble partiellement ordonné des faces de* $\mathrm{Ch}(X)$ *est isomorphe à celui des dégénérescences toriques de* X *dans* $G(k,d,n)$.

7.4 Pour $\sigma = (i_1, \cdots, i_\ell)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n$, on note L_σ le plan engendré par les vecteurs de base e_{i_j} dans $\mathbf{C}^n$ et $\underline{L}_\sigma = \mathbf{P}(L_\sigma)$. On vérifie facilement l'énoncé suivant (cf. [K-S-Z]).

LEMME 7.4.1.— *Une sous-variété irréductible $X \subset \mathbf{P}^{n-1}$ vérifie* $\dim \mathrm{Ch}(X) = 0$ *si et seulement si X est de la forme $X = \underline{L}_\sigma$.*

Compte-tenu de 7.3.2 on en déduit directement la proposition suivante.

PROPOSITION 7.4.2.— *Soit $X \in G(k, d, n)$. Les sommets du polytope de Chow* $\mathrm{Ch}(X)$ *sont en bijection avec les dégénérescences toriques de X de la forme* $\sum_{|\sigma|=k}$
$m_\sigma \underline{L}_\sigma$. *Le sommet de* $\mathrm{Ch}(X)$ *correspondant à un tel cycle est égal à*

$$a = \sum_{|\sigma|=k} m_\sigma \left(\sum_{i \in \sigma} e_i \right) .$$

De plus, la composante de R_X associée à a , $R_{X,a}$, est de la forme

$$R_{X,a} = C_{X,a} \prod_{|\sigma|=k} [\sigma]^{m_\sigma},$$

$C_{X,a}$ étant une constante non nulle, et $[\sigma]$ le crochet de Plücker $[i_1 \cdots i_k]$, si $\sigma = (i_1, \cdots, i_k)$.

Remarque 7.4.3. On peut voir (cf. [K-S-Z] Th.2.8) que les variétés irréductibles X de dimension $k-1$ avec $\dim \mathrm{Ch}(X) = 1$ sont de la forme suivante : il existe $\sigma = (i_1, \cdots, i_{k+1})$, des entiers $a_1, \cdots, a_{k+1}$ premiers entre eux dans leur ensemble, vérifiant
$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = 0$, tels que X soit une hypersurface dans $\underline{L}_\sigma$ d'équation

$$\prod_{a_i > 0} X_i^{a_i} - C \prod_{a_i < 0} X_i^{-a_i} = 0$$

avec C une constante non nulle.

7.5. Formes de Chow et résultants

7.5.1. Notons $M_{n,k}$ les matrices complexes (n,k) et $M^0_{n,k}$ celles de rang k. On a une application naturelle $p : \mathbf{P}(M^0_{n,k}) \to G(n-k,k)$ qui à une matrice associe le sous-espace linéaire défini par les équations associées aux colonnes. Notons (c_{ij}) les coordonnées sur $M^0_{n,k}$. On a alors $p^*[i_1 \cdots i_k] = \det(c_{i_\ell j})$. On note $\tilde{R}_X = p^* R_X$. Les auteurs de [K-S-Z] appellent $\tilde{R}_X$ le X-résultant ; nous l'appellerons forme de Chow. Il est facile de voir que $\tilde{R}_X = 0$ est l'équation de la variété duale de $X \times \mathbf{P}^{k-1}$ (via le plongement de Segre). Dans [K-S-Z] $\tilde{R}_X$ est exprimé comme définissant le Div d'un certain complexe de Koszul. Nous allons faire le lien avec une construction de Knudsen-Mumford [Kn-M].

7.5.2. Si Y est un schéma noethérien régulier, E un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang n, $\mathbf{P}$ le fibré projectif associé, $\pi : \mathbf{P} \to Y$ la projection, $\mathbf{P}^\vee$ le fibré dual, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ (resp $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^\vee}(1)$) le fibré tautologique sur $\mathbf{P}$ (resp $\mathbf{P}^\vee$) , $H \subset \mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$ l'hyperplan universel défini par l'annulation de δ où $\delta \in \Gamma(Y, E \otimes E^\vee) = \Gamma(\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee , p_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^\vee}(1))$ correspond à $1 \in \Gamma(\mathcal{O}_Y)$ via le morphisme $\mathcal{O}_Y \to E \otimes E^\vee$ Sur $\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$, le complexe $K^{\cdot}_{(1)}$:

$$0 \to p_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^\vee}(-1) \xrightarrow{\otimes \delta} \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee} \to 0$$

normalisé par $K^0_{(1)} = \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathbf{P}^\vee}$, est une résolution de $\mathcal{O}_H$.

Sur $\mathbf{P} \times_Y (\mathbf{P}^\vee)^k$ on considère le complexe

$$K^{\cdot}_{(k)} = \bigotimes_{i=1}^{k} p_{1,i}^* (K^{\cdot}_{(1)})$$

avec $p_{1,i}$ la i-ème projection sur $\mathbf{P} \times_Y \mathbf{P}^\vee$. Soit X un sous-schéma irréductible de dimension $k-1$ de $\mathbf{P}$ et plat sur Y. Le faisceau d'idéaux définissant X, I_X, est un complexe parfait. On pose $\mathcal{F}^{\cdot}(r) = Lp_1^* I_X(r) \otimes^L K^{\cdot}_{(k)}$. On voit facilement que pour tout r les $\mathrm{Div}(Rp_{2*}\mathcal{F}^{\cdot}(r))$ sont définis et sont égaux. Ils définissent un diviseur sur $(\mathbf{P}^\vee)^k$ noté Chow

(X). Quand $Y = \operatorname{Spec} \mathbf{C}$, l'image inverse d'une équation de Chow (X) par le morphisme $\mathbf{P}(M^0_{n,k}) \to (\mathbf{P}^\vee)^k$ coïncide (à constante près) avec $\tilde{R}_X$. On retrouve ainsi la description donnée dans [K-S-Z] : Notons $\mathbf{C}[X]_r = H^0(X, \mathcal{O}_X(r))$ et posons $K^i(r) = \mathbf{C}[X]_{i+k+r} \otimes \Lambda^{i+k}\mathbf{C}^k$. Etant donnés $\ell_1, \cdots, \ell_k \in (\mathbf{C}^n)^\vee = \mathbf{C}[X]_1$, on munit $K^\cdot(r)$ de la différentielle

$$\partial(f \otimes v) = \sum_{j=1}^{k} \ell_j f \otimes (e_j \wedge v).$$

On associe à ce complexe un complexe de faisceaux sur $\mathbf{P}(M^0_{n,k})$ (resp. $(\mathbf{P}^\vee)^k$) dont le Div a pour équation $\tilde{R}_X$ (resp. est égal à Chow (X)).

8. IDÉAUX TORIQUES ET ÉVENTAILS DE GRÖBNER (d'après Sturmfels [S])

8.1 Soit A vérifiant les conditions $(*)$ de 2.1. Rappelons que l'on note I_A l'idéal définissant la variété torique X_A dans $V^\vee$. C'est le noyau de

$$\mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n] \to \mathbf{C}[S(A)]$$
$$y_i \to x^{a_i}.$$

Rappelons également que $L(A)$ désigne le réseau des relations linéaires entières entre les a_i. Il est important d'observer que si α et β appartiennent à $\mathbf{N}^n$, $y^\alpha - y^\beta \in I_A$ si et seulement si $\alpha - \beta \in L(A)$.

Si $\alpha \in \mathbf{R}^n$ on écrit $\alpha = \alpha_+ - \alpha_-$ avec α_+ et α_- des vecteurs à coefficients positifs et à supports disjoints. Le lemme suivant est classique (cf [S] lemme 2.5)

LEMME 8.1.1.— *L'idéal I_A est engendré par les $y^{\alpha_+} - y^{\alpha_-}$, $\alpha \in L(A)$.*

8.2 A tout vecteur non nul $\psi \in \mathbf{R}^n$ est associé un préordre $\leq_\psi$ sur $\mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n]$: si $P \in \mathbf{C}[y]$, on note $\tilde{\psi}(P)$ la borne supérieure des produits scalaires $\langle \psi \ , \ m \rangle$, m décrivant l'ensemble des exposants des monômes de P. On convient que $P \leq_\psi Q$ si et seulement si $\tilde{\psi}(P) \leq \tilde{\psi}(Q)$. D'autre part si $P \in \mathbf{C}[y]$, $\mathrm{init}_\psi P$ est la somme des monômes de P dont l'exposant m vérifie $\langle \psi \ , \ m \rangle = \tilde{\psi}(P)$. On note $I_{A,\psi}$ l'idéal engendré par les $\mathrm{init}_\psi P$, $P \in I_A$. Enfin on note $\mathcal{C}(I_{A,\psi}) = \{\psi' \in \mathbf{R}^n \ ; \ I_{A,\psi} = I_{A,\psi'}\}$.

A partir de ces cônes ouverts on obtient un éventail complet, l'éventail de Gröbner, noté $\mathcal{F}(I_A)$. Le résultat suivant, dû à B.Sturmfels, montre que l'éventail $\mathcal{F}(I_A)$ est plus fin que $\mathcal{F}(A)$.

THÉORÈME 8.2.1 [S].— *Soit $T \in \mathcal{T}^0(A)$ une triangulation régulière, et I_T l'idéal monomial (de Stanley-Reisner) associé à T : par définition I_T est engendré par les monômes $y_{\tau_1} \cdots y_{\tau_\ell}$ tels que $(\tau_1, \cdots, \tau_\ell)$ ne soit pas une face d'un simplexe de T, $\tau_1 < \cdots < \tau_\ell$. Alors, pour tout vecteur ψ appartenant à l'intérieur du cône $\mathcal{C}(A,T)$, I_T est égal au radical de l'idéal $I_{A,\psi}$.*

Démonstration : Montrons que I_T est contenu dans le radical de $I_{A,\psi}$. Considérons $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_\ell)$ qui n'est pas face d'un simplexe de T. Il existe alors une face d'un simplexe de T , $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_p)$ telle que $\overset{\circ}{\overline{\sigma}} \cap \overset{\circ}{\overline{\tau}} \neq \emptyset$, où les $\circ$ désignent les intérieurs relatifs. Par conséquent il existe des entiers strictement positifs, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ et $\mu_1, \cdots, \mu_\ell$, tels que $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i a_{\sigma_i} = \sum_{1 \leq i \leq \ell} \mu_i a_{\tau_i}$. Le binôme $y_\tau^\mu - y_\sigma^\lambda$ appartient donc à I_A. Comme σ est face d'un simplexe de T, et non τ, on a

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \psi_{\sigma_i} \lambda_i \leq \sum_{1 \leq i \leq \ell} \psi_{\tau_i} \mu_i \ ,$$

car ψ appartient à l'intérieur de $\mathcal{C}(A,T)$, et donc $y_\tau^\mu = \mathrm{init}_\psi f$, ce qui prouve que y_τ appartient au radical de $I_{A,\psi}$.

De même, pour tout binôme $y_\tau^\mu - y_\sigma^\lambda$ dans I_A, si $y_\sigma^\lambda <_\psi y_\tau^\mu$, τ ne peut être face d'un simplexe de T. On obtient ainsi, en utilisant le lemme 8.1.1, l'inclusion réciproque. □

Remarque 8.2.2. En général $\mathcal{F}(I_A)$ est strictement plus fin que $\mathcal{F}(A)$. Ceci est lié à ce que en général les monômes engendrant $I_{A,\psi}$ sont de la forme $y_{\tau_1}^{m_1} \cdots y_{\tau_\ell}^{m_\ell}$ avec des $m_i > 1$.

9. FORMES DE CHOW DES VARIETES TORIQUES

Soit $A \subset \mathbf{Z}^k$ vérifiant les conditions $(*)$ de 2.1. On note X_A la variété torique associée à A dans $V_{\mathbf{Z}}^\vee = \text{Spec } \mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n]$. En remplaçant $\mathbf{C}$ par $\mathbf{Z}$, on définit X_A sur $\mathbf{Z}$ de la même façon dans $V_{\mathbf{Z}}^\vee = \text{Spec } \mathbf{Z}[y_1, \cdots, y_n]$. On rappelle que X_A est un cône sur $\mathbf{P}(X_A) \subset \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{n-1}$. On note $Y_A = \mathbf{P}(X_A)$. La forme de Cayley R_{Y_A} et la forme de Chow $\tilde{R}_{Y_A}$ sont maintenant définies au signe près.

Le résultat suivant décrit le polytope de Chow de Y_A :

THÉORÈME 9.1 [K-S-Z].—

1) $\text{Ch}(Y_A) = QQ(A)$

2) Les dégénérescences toriques maximales (sur $\mathbf{C}$*) de* Y_A *sont les* $\sum_{\sigma \in T} \text{Vol}_{\bar{\sigma}} \underline{L}_\sigma$, $T \in \mathcal{T}^0(A)$.

3) La composante de R_{Y_A} *associée à* $T \in \mathcal{T}^0(A)$ *est le monôme* $\pm \prod_{\sigma \in T} [\sigma]^{\text{vol}_{\bar{\sigma}}}$.

Démonstration : 1) est conséquence directe de 2). Quant à 2) c'est une conséquence directe de 7.4.2 et 8.2.1, compte-tenu du lemme (facile) suivant.

LEMME 9.2.— *Soit* I *un idéal monomial (engendré par des monômes) de* $\mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n]$. *Les composantes irréductibles de dimension* $p-1$ *de* $\text{Spec } \mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n]/I$ *sont les* $\underline{L}_\sigma$ *avec* $|\sigma| = p$. *Soit* $\tau = \{1, \cdots, n\} - \sigma$, *et* $\gamma : \mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n] \to \mathbf{C}[y_i]_{i \in \tau}$ *obtenu en envoyant* $y_i, i \in \sigma$, *sur* 1. *La multiplicité de* $\underline{L}_\sigma$ *dans* $\text{Spec } \mathbf{C}[y_1, \cdots, y_n]/I$ *est égale au nombre de monômes en les* y_i , $i \in \tau$, *qui n'appartiennent pas à* $\gamma(I)$.

D'après 2), la composante de R_{Y_A} associée à $T \in \mathcal{T}^0(A)$ est de la forme

$C\prod_{\sigma\in T}[\sigma]^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}}$. On obtient $C=\pm 1$ en remarquant que 2) reste valide sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour p premier. □

10. DEUXIEME DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5.1.

Dans cette section on explique, suivant [K-S-Z], comment retrouver les résultats de la section 2 en utilisant ceux de la section précédente sur la forme de Chow.

En comparant les complexes de Koszul des sections 4 et 7, on trouve que

$$E_A=\pm\tilde{R}_{Y_A}(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,x_k\frac{\partial f}{\partial x_k})$$

(en fait, on peut retrouver cette relation directement). Maintenant remarquons que la matrice (n,k) des coefficients de $(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,x_k\frac{\partial f}{\partial x_k})$ a pour lignes les vecteurs c_ia_i. A un crochet de Plücker $[i_1\cdots i_k]$ dans R_{Y_A} correspond via p^* le mineur $\det(c_{i_tj})$ dans $\widetilde{R}_{Y_A}$ et donc le terme $\det(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})\,c_{i_1}\cdots c_{i_k}$ dans E_A. Comme $\det(a_{i_1},\cdots,a_{i_k})$ est le volume du simplexe $\bar{\sigma}$, avec $\sigma=(i_1,\cdots,i_k)$, on obtient $(\mathrm{vol}\bar{\sigma})c_\sigma$. On a ainsi une explication du coefficient $(\mathrm{vol}\bar{\sigma})^{\mathrm{vol}\bar{\sigma}}$ dans E_A : l'exposant intervient comme multiplicité, l'autre volume provenant d'un crochet de Plücker ! On obtient comme ceci le théorème 2.5.1 comme corollaire du théorème 9.1. Avec un peu plus de travail on peut obtenir le théorème 2.5.2 de façon similaire en utilisant la remarque 7.4.3.

RÉFÉRENCES :

[B-F-S] L. BILLERA, P. FILLIMAN, B. STURMFELS, *Constructions and complexity of secondary polytopes*, Advances in Mathematics **83**, 155-179 (1990).

[D] V.I. DANILOV, *Geometry of toric varieties*, Russian Math. Surv. **33**, 97-154 (1978).

[G-K-Z 1] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Hypergeometric functions and toric varieties*, Funktsional. Anal. i Prilozhen **23**, 12-26 (1989) (en russe).

[G-K-Z 2] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polytopes*, Algebra i analiz **2**, 1-62 (1990) (en russe).

[G-K-Z 3] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Newton polytopes and the classical resultant and discriminant*, Advances in Mathematics, **84**, 237-254 (1990).

[G-K-Z 4] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*, Advances in Mathematics, **84**, 255-271 (1990).

[G-K-Z 5] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Projectively dual varieties and hyperdeterminants*, Doklady **305**, 1294-1298 (1989) (en russe).

[K-S-Z] M.M. KAPRANOV, B. STURMFELS, A.V. ZELEVINSKY, *Chow polytopes and general resultants.* Preprint (1990).

[Kn-M] F. KNUSDEN, D. MUMFORD, *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div"*, Math. Scand. **39**, 19-55 (1976).

[K] A.G. KOUSHNIRENKO, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. **32**, 1-31 (1976).

[S] B. STURMFELS, *Gröbner bases of toric varieties*, Tohoku Math. J. (à paraître).

[V] O. VIRO, *Gluing algebraic surfaces, removing singularities, and constructing curves*, Proc. Leningrad Internat. Topology Conf. Nauka, 149-197 (1983).

Université Paris VI
URA 213 Tour 45-46
4 place Jussieu
75252 Paris cedex 05

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
URA 169
91128 Palaiseau cedex