Astérisque

GEORGES SKANDALIS

Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique [d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici]

Astérisque, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 739, p. 299-320

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__299_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Février 1991
43ème année, 1990-91, n° 739

APPROCHE DE LA CONJECTURE DE NOVIKOV PAR LA COHOMOLOGIE CYCLIQUE

[d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici]

par Georges SKANDALIS

0. INTRODUCTION

Toutes les variétés que nous considérons dans cet exposé sont supposées compactes (sans bord), orientées de classe C^∞.

La formule de Hirzebruch [24] calcule la signature d'une variété orientée V de dimension $n = 4k$, c'est-à-dire la signature (différence entre le nombre de signes $+$ et le nombre de signes $-$) de la forme quadratique associée à la forme d'intersection sur $H^{2k}(V;\mathbf{R})$). On obtient :

$$\mathrm{sign}(V) = \langle L(V), [V]\rangle$$

où $[V] \in H_n(V;\mathbf{Z})$ désigne le cycle fondamental de la variété orientée V et $L(V) \in H^*(V;\mathbf{Q})$ est un polynôme en les classes de Pontrjagin de V, parfois appelé "classe caractéristique de Pontrjagin-Hirzebruch". En particulier, le nombre $\langle L(V), [V]\rangle$ est un invariant d'homotopie. Dans le cas des variétés simplement connexes, la signature est la seule classe caractéristique invariante d'homotopie.

Supposons à présent que la variété V n'est pas simplement connexe. Notons Γ le groupe fondamental de V et $f : V \to B\Gamma$ l'application classifiante du revêtement universel. Pour une classe de cohomologie rationnelle $x \in H^*(B\Gamma;\mathbf{Q})$, appelons "haute signature" de V le nombre $\langle L(V) \cup f^*(x), [V]\rangle$. La conjecture de Novikov ([39]) énonce l'invariance par homotopie de toutes les hautes signatures, c'est-à-dire l'égalité

$$\langle L(W) \cup (f \circ g)^*(x), [W]\rangle = \langle L(V) \cup f^*(x), [V]\rangle$$

pour toute équivalence d'homotopie $g : W \to V$ de variétés compactes orientées.

À l'aide de la dualité de Poincaré, on trouve qu'une manière équivalente d'énoncer cette conjecture est l'invariance par homotopie de la classe d'homotopie $f_*(L(V) \cap [V]) \in H_*(B\Gamma; \mathbf{Q})$.

Enfin, l'énoncé le plus naturel de cette conjecture a lieu dans la K-homologie à supports compacts (la théorie homologique duale de la K-théorie - *cf.* [30]) de $B\Gamma$: l'opérateur de signature de V a une classe notée σ_V dans le groupe de K-homologie $K_0(V)$ dont l'image par l'isomorphisme de Chern Ch : $K_0(V) \otimes \mathbf{Q} \to H_*(V; \mathbf{Q})$ est $L(V) \cap [V]$. La conjecture de Novikov énonce donc l'invariance par homotopie de l'image de σ_V dans $K_0(B\Gamma) \otimes \mathbf{Q}$, c'est-à-dire l'égalité, modulo la torsion, de $(f \circ g)_*(\sigma_W)$ avec $f_*(\sigma_V)$, pour toute équivalence d'homotopie $g : W \to V$ de variétés compactes orientées.

Cette conjecture reste ouverte après une vingtaine d'années. Cependant, grâce aux efforts conjugués de nombreux mathématiciens (*cf.* [7, 15, 25, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 41, 43, 44...]), cette conjecture est maintenant établie pour de nombreuses classes de groupes Γ. La conjecture de Novikov a récemment connu de nombreux développements connexes (variétés lipschitziennes, cas équivariant pour une action de groupe compact, variétés à bord...). Citons surtout un analogue en K-théorie algébrique de la conjecture de Novikov qui vient d'être démontré par Bökstedt, Hsiang et Madsen [4]. On consultera à propos des principaux développements récents l'article d'exposition [45] de Weinberger.

Dans cet exposé, nous examinerons une approche nouvelle de cette conjecture à l'aide de la cohomologie cyclique de Connes. Les résultats que nous discuterons s'énoncent :

THÉORÈME A [13].— *La conjecture de Novikov est vraie pour les groupes hyperboliques de Gromov.*

THÉORÈME B [12].— *Tout "fibré presque plat" détermine un invariant d'homotopie.*

Le théorème B permet de redémontrer la conjecture de Novikov dans tous les cas précédemment connus, ainsi que le théorème A.

De plus, cette approche est intéressante à plus d'un titre :

a) elle est basée sur des théorèmes de l'indice très puissants et esthétiques ;

b) les méthodes développées peuvent certainement démontrer la conjecture de Novikov dans de nombreux autres cas et, en tous cas, posent des questions intéressantes ;

c) enfin, la même démarche s'applique à la conjecture de Gromov-Lawson et se transpose dans le cas où les groupes discrets sont remplacés par des feuilletages.

NOTATIONS

Soient Γ un groupe et A un anneau. Rappelons que l'ensemble des sommes finies $\sum_{g\in\Gamma} a_g g$ ($a_g \in A$) est muni d'une structure d'anneau pour laquelle on a $(ag)(bh) = (ab)(gh)$ ($a, b \in A$ et $g, h \in \Gamma$). L'anneau ainsi obtenu est noté $A[\Gamma]$.

On note $\ell^2(\Gamma)$ l'espace hilbertien formé des applications $g \to a_g$ de Γ dans $\mathbf{C}$ telles que $\sum_{g\in\Gamma} |a_g|^2 < +\infty$. À l'opération de Γ par translation (à gauche) dans l'espace hilbertien $\ell^2(\Gamma)$ correspond une opération de l'anneau $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans le même espace ;; la $\mathbf{C}^*$-algèbre $\mathbf{C}^*(\Gamma)$ du groupe Γ est l'adhérence (normique) de $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans la $\mathbf{C}^*$-algèbre des opérateurs continus de $\ell^2(\Gamma)$.

Signalons que l'algèbre que nous notons $\mathbf{C}^*(\Gamma)$ dans cet exposé est la $\mathbf{C}^*$-algèbre réduite du groupe Γ qui se note traditionnellement $\mathbf{C}^*_r(\Gamma)$.

1. LES INVARIANTS DE MISHCHENKO ET KASPAROV

a) L'invariant de Mishchenko

Un outil essentiel dans toutes les constructions liées à la conjecture de Novikov est la signature symétrique de Mishchenko :

Soit V une variété compacte (sans bord) orientée de classe C^∞ de dimension $4n$ de groupe fondamental Γ ; alors V est naturellement munie d'un fibré plat E de fibre $\mathbf{C}[\Gamma]$ obtenu par linéarisation du revêtement universel. Donnons-nous une triangulation de V. Mishchenko a montré que la forme d'intersection sur les simplexes de dimension $2n$, à coefficients dans le fibré plat E, définit un élément d'un groupe de Wall $L(\mathbf{C}[\Gamma])$ de l'anneau $\mathbf{C}[\Gamma]$ appelé signature symétrique de V et a prouvé que cet élément est invariant par homotopie ([34]).

b) L'indice dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$, *cf.* [13]

Notons $\mathcal{R} = \{(a_{m,n})_{m,n\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}\,,\, a_{m,n} \in \mathbf{C} \,/\, \forall k \in \mathbf{N}\,,\, \sum_{m,n}(1+m+n)^k\,|a_{m,n}| < +\infty\}$ l'algèbre des matrices infinies à décroissance rapide.

Soit V une variété compacte (sans bord) de classe C^∞. L'algèbre des noyaux régularisants sur V est l'espace $C^\infty(V\times V)$ des fonctions de classe C^∞ sur $V\times V$ muni du produit de convolution $(h*k)(x,y) = \int h(x,z)k(z,y)\,dz$[1] pour $h,k \in C^\infty(V\times V)$, $x,y\in V$. Cette algèbre est isomorphe à $\mathcal{R}$. En particulier, elle est indépendante de la variété V. Si E est un fibré vectoriel complexe de classe C^∞ sur V, on forme de même l'algèbre des noyaux régularisants à coefficients dans les endomorphismes de E, qui est encore isomorphe à $\mathcal{R}$.

Soient Γ le groupe fondamental et $\widetilde{V}$ le revêtement universel de V. Le groupe Γ opère librement et proprement sur $\widetilde{V}\times\widetilde{V}$ par l'action diagonale ; notons W la variété quotient $\widetilde{V}\times\widetilde{V}/\Gamma$ et $p : \widetilde{V}\times\widetilde{V}\to W$ l'application quotient. L'espace $C_c^\infty(W)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact sur W est naturellement muni d'une structure d'algèbre : pour $h,k\in C_c^\infty(W)$ et $x,y\in\widetilde{V}$, on pose $(h*k)(p(x,y)) = \int h(p(x,z))k(p(z,y))\,dz$[2]

Il n'est pas difficile de démontrer que l'algèbre des noyaux régularisants Γ-invariants $C_c^\infty(W)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{R}[\Gamma] = \mathcal{R}\otimes\mathbf{C}[\Gamma]$. Cet isomorphisme n'est pas canonique. Cependant, on peut construire une

(1) L'intégrale est prise sur V et dz désigne une mesure régulière sur V.

(2) L'intégrale est prise sur $\widetilde{V}$ et dz désigne une mesure régulière Γ-invariante sur $\widetilde{V}$.

équivalence de Morita canonique entre les algèbres $C_c^\infty(W)$ et $\mathcal{R}[\Gamma]$. De ce fait, les groupes $K_0(C_c^\infty(W))$ et $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ sont canoniquement isomorphes.

Si E est un fibré vectoriel complexe de classe C^∞ sur V, on forme de même l'algèbre des noyaux régularisants Γ-invariants à coefficients dans les endomorphismes de E, qui est encore isomorphe à $\mathcal{R}[\Gamma]$.

Soient E_+ et E_- deux fibrés vectoriels complexes de classe C^∞ sur la variété V et $D : C^\infty(V; E_+) \to C^\infty(V; E_-)$ un opérateur pseudodifférentiel elliptique, où $C^\infty(V; E_\pm)$ désigne l'espace des sections de classe C^∞ du fibré $E_\pm$. On peut alors relever D et sa parametrix Q en des opérateurs Γ-invariants $\widetilde{D}$ et $\widetilde{Q}$ agissant sur le revêtement universel $\widetilde{V}$ de V (*cf.* [1, 13]). Alors $\widetilde{D}$ et $\widetilde{Q}$ sont inverses l'un de l'autre modulo l'algèbre des noyaux régularisants Γ-invariants à coefficients dans les endomorphismes de $E_\pm$. On associe alors à D l'élément de $K_0(C_c^\infty(W)) = K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ représenté par l'idempotent

$$P_D = \begin{bmatrix} (1-\widetilde{Q}\widetilde{D})^2 & (1-\widetilde{Q}\widetilde{D})(2-\widetilde{Q}\widetilde{D})\widetilde{Q} \\ \widetilde{D}(1-\widetilde{Q}\widetilde{D}) & 1-(1-\widetilde{D}\widetilde{Q})^2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} L^{-1} \in M_2(A)$$

où

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -\widetilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \widetilde{D} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\widetilde{Q} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et A désigne l'algèbre $\mathcal{R}[\Gamma]$ avec une unité adjointe. Rappelons que si l'algèbre A est obtenue en adjoignant une unité à une algèbre sans unité J, $K_0(J)$ est le quotient de $K_0(A)$ par l'image de $K_0(\mathbf{C})$.

Remarque : Les relevés $\widetilde{D}$ et $\widetilde{Q}$ ne sont uniquement déterminés que si D et Q sont "suffisamment locaux". En général, ils ne sont déterminés qu'à un noyau régularisant Γ-invariant près. L'addition d'un tel noyau ne change pas la classe de l'idempotent P_D dans $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$.

c) Le théorème de l'indice de Kasparov et Mishchenko

Rappelons que le spectre d'un élément autoadjoint d'une C^*-algèbre A est inclus dans $\mathbf{R}$. Il s'ensuit que les groupes de L et K-théorie coïncident *i.e.* $L(A) = K_0(A)$.

L'algèbre $\mathcal{R}$ est une sous-algèbre de la C^*-algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert séparable. Or, pour toute C^*-algèbre A, le produit tensoriel C^*-algèbrique $\mathcal{K} \otimes A$ a la même K-théorie que A.

L'image par inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \to C^*(\Gamma)$ de l'idempotent P_D associé à l'opérateur de signature définit un élément $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$.

THÉORÈME 1.1.—*Soit V une variété compacte orientée de groupe fondamental Γ. Notons $t_V \in K_0(C^*(\Gamma)) = L(C^*(\Gamma))$ l'image par inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \to C^*(\Gamma)$ de l'invariant de Mishchenko et $a_V \in K_0(\mathcal{K} \otimes C^*(\Gamma)) = K_0(C^*(\Gamma))$ l'image par l'inclusion $i : \mathbf{C}[\Gamma] \to C^*(\Gamma)$ de l'idempotent P_D associé à l'opérateur de signature. On a $a_V = t_V$.*

Ce théorème est énoncé dans [29] et démontré dans [30]. L'égalité $a_V = t_V$ modulo la torsion est aussi énoncée dans [36] et démontrée dans [37]. Pour une démonstration directe, *cf.* [27].

Rappelons que l'opérateur de signature de V détermine un élément noté $f_*(\sigma_V)$ du groupe de K-homologie à supports compacts $K_0(B\Gamma)$. Il existe un homomorphisme naturel $\beta : K_0(B\Gamma) \to K_0(C^*(\Gamma))$ ("assembly map" en K-théorie topologique) tel que $\beta(f_*(\sigma_V)) = a_V$. Comme par le théorème 1.1, l'élément a_V est un invariant d'homotopie, il en résulte :

COROLLAIRE 1.2.— *Si l'homomorphisme $\beta : K_0(B\Gamma) \to K_0(C^*(\Gamma))$ est rationnellement injectif, la conjecture de Novikov est vérifiée pour le groupe Γ.*

On dit que le groupe satisfait à la "conjecture de Novikov forte" (terminologie de J. Rosenberg [42]) si l'homomorphisme β est rationnellement injectif. Signalons que tous les groupes pour lesquels la conjecture de Novikov est établie satisfont à la conjecture de Novikov forte.

Il est aussi clair que tout homomorphisme $\phi : K_0(C^*(\Gamma)) \to \mathbf{C}$ détermine un invariant d'homotopie. C'est en grande partie cette remarque qui a conduit Kasparov à construire la K-théorie bivariante pour les C^*-algèbres.

2. COHOMOLOGIE CYCLIQUE ET COHOMOLOGIE DE GROUPES

Cohomologie cyclique

Pour une exposition de la cohomologie cyclique, nous renvoyons à [9], [16], [8]. Contentons-nous ici de rappeler les définitions qui nous seront utiles.

Soit A une algèbre sur $\mathbf{C}$. Rappelons qu'une n-cochaîne sur A est une application multilinéaire $\phi : A^{n+1} \to \mathbf{C}$. Le bord de Hochschild d'une n-cochaîne ϕ est la $n+1$-cochaîne $b\phi$ donnée par la formule

$$b\phi(a_0, a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \, \phi(a_0, \cdots, a_j a_{j+1}, \cdots, a_{n+1}) + (-1)^{n+1} \, \phi(a_{n+1} a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

DÉFINITION.— *Soit A une algèbre sur $\mathbf{C}$. Une n-cochaîne cyclique sur A est une application multilinéaire $\phi : A^{n+1} \to \mathbf{C}$ telle que :*

$$\forall (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in A^{n+1} \quad , \quad \phi(a_1, \cdots, a_n, a_0) = (-1)^n \, \phi(a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

On note $C^n_\lambda(A)$ l'espace des n-cochaînes cycliques sur A.

Un n-cocycle cyclique sur A est une n-cochaîne cyclique ϕ telle que $b\phi = 0$.

On note $Z^n_\lambda(A)$ l'espace des n-cocycles cycliques sur A.

On vérifie sans peine que le bord de Hochschild d'une cochaîne cyclique est un cocycle cyclique. La cohomologie cyclique $H^n_\lambda(A)$ de A est la cohomologie du complexe des cochaînes cycliques muni du bord de Hochschild, autrement dit $H^n_\lambda(A) = Z^n_\lambda(A)/bC^{n-1}_\lambda(A)$.

Accouplement avec la K-théorie

Soit n un nombre pair et ϕ un n-cocycle cyclique sur une algèbre A. Soit B l'algèbre obtenue à partir de A en adjoignant une unité. Rappelons que B est isomorphe à $A \times \mathbf{C}$ comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel et que le produit est défini par $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ $(a, b \in A, \ \lambda, \mu \in \mathbf{C})$.

Alors ϕ définit un cocycle cyclique encore noté ϕ sur B par la formule $\phi((a_0,\lambda_0),(a_1,\lambda_1),\cdots(a_n,\lambda_n)) = \phi(a_0,a_1\cdots,a_n)$.

Notons $M_k(B)$ l'algèbre des matrices $k\times k$ à coefficients dans B. En utilisant la trace de $M_k(\mathbf{C})$, on étend le cocycle cyclique ϕ à $M_k(B)$. Soit e un idempotent de $M_k(B)$. Le nombre $\phi(e,e,\cdots,e)$ ne dépend que de la classe de e dans $K_0(A)$ et de celle de ϕ dans $H^n_\lambda(A)$. On définit un accouplement entre $K_0(A)$ et $H^n_\lambda(A)$ en posant

$$\langle[\phi],[e]\rangle = c_n\,\phi(e,e,\cdots,e)$$

où $c_n\in\mathbf{C}$ est une constante de normalisation $\left(c_{2m}=\frac{1}{(2\pi i)^m m!}\right)$.

Normalisation des cocyles de groupes

Soit Γ un groupe. Un n-cocycle de groupe c sur Γ sera dit normalisé si $c(g_1,\cdots,g_n)=0$ si $g_1\cdots g_n=0$.

Par un argument de résolution projective, on démontre sans peine (*cf.* [6], [13]) :

PROPOSITION 2.1.— *Dans toute classe de cohomologie de $H^n(\Gamma,\mathbf{C})$, il y a au moins un cocycle normalisé.*

Soit c un cocycle normalisé sur le groupe Γ. On associe à c un cocycle cyclique ϕ_c sur $\mathbf{C}[\Gamma]$ qui est décrit sur la base Γ de $\mathbf{C}[\Gamma]$ par :

$$\phi_c(g_0,g_1,\cdots g_n) = c(g_1,\cdots g_n)\,\text{si}\,g_0g_1\cdots g_n = 1\,\text{et}\,\phi_c(g_0,g_1,\cdots g_n)=0\,\text{sinon.}$$

Remarque : En fait, on a un plongement de $H^n(\Gamma,\mathbf{C})$ dans $H^n_\lambda(\mathbf{C}[\Gamma])$. La cohomologie cyclique de $\mathbf{C}[\Gamma]$ a été calculée par Burghelea (*cf.* [6]).

Extension à $\mathcal{R}[\Gamma]$. Premier théorème de l'indice

DÉFINITION 2.2.— *Soit c un n-cocycle normalisé sur le groupe Γ. On définit le cocycle cyclique ψ_c sur $\mathcal{R}[\Gamma]$ en posant :*

$$\psi_c(k_0g_0,k_1g_1,\cdots k_ng_n) = \mathrm{Tr}(k_0k_1\cdots k_n)\;\phi_c(g_0,g_1,\cdots g_n)$$

pour $(k_0 k_1 \cdots, k_n) \in \mathcal{R}^{n+1}$ *et* $(g_0, g_1, \cdots, g_n) \in \Gamma^{n+1}$ *où* Tr *désigne la trace sur l'algèbre* $\mathcal{R}$.

Les éléments de la forme kg ($k \in \mathcal{R}$, $g \in \Gamma$) engendrent $\mathcal{R}[\Gamma]$; on étend ψ_c à $\mathcal{R}[\Gamma]^{n+1}$ par linéarité. On vérifie sans peine que ψ_c est un cocycle cyclique. La trace Tr est donnée par la formule $\mathrm{Tr}((a_{m,n})_{m,n\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}) = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_{n,n}$.

Connes et Moscovici ont démontré le théorème de l'indice suivant :

THÉORÈME 2.3 (*cf.* [13]).—*Soient* V *une variété compacte,* Γ *son groupe fondamental,* $f : V \to B\Gamma$ *l'application classifiante et* D *un opérateur pseudodifférentiel elliptique sur* V. *Notons* $[D]$ *la classe de* D *dans le groupe de* K*-homologie* $K_0(V)$, $\mathrm{Ch}[D]$ *son image dans* $H_*(V)$ *par l'isomorphisme de Chern et* $[P_D]$ *l'indice de* D *dans* $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$. *Soit* c *un* n*-cocycle normalisé sur le groupe* Γ *; notons* x *sa classe dans* $H^n(B\Gamma; \mathbf{C}) = H^n(\Gamma; \mathbf{C})$. *On a alors* $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = d_n \langle f^*(x), \mathrm{Ch}[D] \rangle$.

Ici, d_n est une constante non nulle $\left(d_{2m} = \frac{1}{(2\pi i)^m (2m)!}\right)$.

Dans le cas du 0-cocycle $c = 1$, on retrouve comme cas particulier le théorème de l'indice à valeurs dans l'algèbre de von Neumann de Γ de ([1]).

La démonstration de ce théorème utilise les étapes suivantes :

a) Au cocycle de groupe c, on associe un cocycle d'Alexander-Spanier η sur V dont la classe de cohomologie est $f^*(x)$. En utilisant l'isomorphisme local entre les groupoïdes W et $V \times V$, on associe à tout cocycle ζ d'Alexander-Spanier un homomorphisme $f_\zeta : K_0(V) \to \mathbf{C}$ de sorte qu'on ait $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle = f_\eta([D])$.

b) On calcule l'homomorphisme f_η ci-dessus associé au cocycle d'Alexander-Spanier η en utilisant le calcul symbolique de Getzler ([17]).

La classe $[P_D]$ n'est *a priori* pas un invariant d'homotopie. Pour démontrer l'invariance par homotopie de la haute signature associée à x, il suffit de démontrer que le nombre $\langle [\psi_c], [P_D] \rangle$ ne dépend que de l'image de P_D dans $K_0(C^*(\Gamma))$, puisque, par le théorème 1.1, cette image est un invariant d'homotopie.

Or il n'est pas raisonnable d'espérer que le cocycle cyclique ϕ_c s'étende en un cocycle cyclique de $C^*(\Gamma)$. On peut cependant dans certains cas

étendre ce cocycle cyclique à une sous-algèbre de Banach de $C^*(\Gamma)$ ayant la même K-théorie que $C^*(\Gamma)$. Pour cela, on dispose du résultat "classique" (et simple) suivant :

Lemme 2.4 (*cf.* e.g. [28], p. 109, exerc. 6.15).—*Soit $\rho : A \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Banach unifères. Si l'image de ρ est dense dans B et que $A^{-1} = \rho^{-1}(B^{-1})$, alors ρ induit un isomorphisme en K-théorie.*

Si l'homomorphisme ρ vérifie les conditions du lemme et est de plus injectif, on dit parfois que A est une sous-algèbre pleine de B.

Un cas où cette méthode s'applique est :

THÉORÈME 2.5 ([13]).—*La conjecture de Novikov est vraie pour les groupes hyperboliques de Gromov.*

Nous renvoyons à [20] et [19] pour une description des groupes hyperboliques de Gromov. Deux propriétés de ces groupes sont utilisées dans le théorème 2.5 :

a) Gromov a démontré (*cf.*[20]) que, si Γ est un groupe hyperbolique, toute classe de cohomologie $x \in H^n(\Gamma, \mathbf{C})$ ($n \geq 2$), est représentée par un cocycle (normalisé) borné.

b) P. de la Harpe ([22]) a généralisé aux groupes hyperboliques un estimé sur la norme de $C^*(\Gamma)$[(3)] obtenu par Haagerup pour les groupes libres puis par Jolissaint pour les sous-groupes discrets des groupes de Lie de rang 1. On en déduit (*cf.*[26]) :

PROPOSITION 2.6.—*Soit Γ un groupe hyperbolique. Le complété de $\mathbf{C}[\Gamma]$ pour la norme N donnée par $N(\sum_{g\in\Gamma} a_g g) = \| \sum_{g\in\Gamma} |a_g| g \|$ est une sous-algèbre pleine A de $C^*(\Gamma)$.*

Ici, $\|\mathbf{a}\|$ désigne la norme de $\mathbf{a}$ dans $C^*(\Gamma)$.

Soient n un nombre pair et c un n-cocycle normalisé borné sur Γ. Posons $\phi = \phi_c$.

(3) Rappelons que $C^*(\Gamma)$ désigne ici la C^*-algèbre réduite du groupe Γ.

Pour $\mathbf{a}^i = \sum_{g\in\Gamma} a_g^i g$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, on a

$$\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^n) = \sum_{g_0 g_1 \cdots g_n = 1} a^0_{g_0}\, a^1_{g_1} \cdots a^n_{g_n}\, c(g_1, \cdots, g_n).$$

Donc

$$|\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^n)| \leq k \sum_{g_0 g_1 \cdots g_n = 1} |a^0_{g_0}|\, |a^1_{g_1}| \cdots |a^n_{g_n}| = k\tau(\mathbf{b}^0 \mathbf{b}^1 \cdots \mathbf{b}^n)$$

où $\mathbf{b}^i = \sum_{g\in\Gamma} |a_g^i| g$ et $\tau\left(\sum_{g\in\Gamma} a_g g\right) = a_1$.

Il s'ensuit que $|\phi(\mathbf{a}^0, \mathbf{a}^1, \cdots, \mathbf{a}^n)| \leq k \,\|\mathbf{b}^0 \mathbf{b}^1 \cdots \mathbf{b}^n\| \leq kN(\mathbf{a}^0)N(\mathbf{a}^1) \cdots N(\mathbf{a}^n)$. Donc le cocycle ϕ s'étend en un cocycle cyclique sur l'algèbre A ; il définit donc un homomorphisme de $K_0(A) = K_0(C^*(\Gamma))$ dans $\mathbf{C}$, d'où le théorème 2.5.

L'importance de ce théorème vient de l'abondance des groupes hyperboliques (*cf.* [20]).

La méthode de démonstration soulève aussi de nombreuses questions :

Question 1 : L'inclusion $A \to C^*(\Gamma)$ induit-elle un isomorphisme en K-théorie pour tout groupe Γ ?

Une réponse positive à cette question impliquerait la conjecture de Novikov pour tous les cocycles de groupe bornés. Cependant, l'égalité $A^{-1} = \rho^{-1}(C^*(\Gamma)^{-1})$ semble liée au "rang 1". La réponse à la question 1 est néanmoins positive pour les groupes résolubles comme l'a montré Bost ([5]). Remarquons que, pour un groupe moyennable, la norme N est la norme $\|\ \|_1$, de sorte que A est l'algèbre de Banach $\ell^1(\Gamma)$.

En fait, l'estimé de [22] permet de montrer que, si le groupe Γ est hyperbolique, le complété A_n de $\mathbf{C}[\Gamma]$ pour la norme N_n donnée par $N_n(\sum_{g\in\Gamma} a_g g) = \|\sum_{g\in\Gamma} |a_g|(1 + |g|)^n g\|$ est une sous-algèbre pleine de $C^*(\Gamma)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ici, $|g|$ désigne la longueur de g relativement à un système de générateurs de Γ.

Question 2 : L'inclusion $A_n \to C^*(\Gamma)$ induit-elle un isomorphisme en K-théorie pour tout groupe Γ ?

Comme on peut toujours étendre les cocycles à croissance polynomiale à l'algèbre A_n, une réponse positive à la question 2 impliquerait la conjecture de Novikov pour tous les cocycles de groupe à croissance polynomiale.

Une façon plus générale de procéder peut être la suivante (*cf.* [10]) : étant donné un cocycle de groupe normalisé c, construire une sous-algèbre A (pouvant dépendre de c) de $C^*(\Gamma)$, ayant la même K-théorie que $C^*(\Gamma)$ à laquelle le cocycle ϕ_c s'étend. Par exemple, à l'invariant de Godbillon-Vey, correspond un 2-cocycle (cocycle de Bott-Thurston) de tout groupe Γ agissant sur le cercle par difféomorphismes préservant l'orientation (*cf.* [18]). Connes a montré ([10]) que ce cocycle définit un homomorphisme de la K-théorie de $C^*(\Gamma)$ dans $\mathbf{C}$ d'où un invariant d'homotopie. De la même manière sont traitées toutes les classes "secondaires" de cohomologie de groupe.

3. "FIBRÉS PRESQUE PLATS"

À proprement parler, il n'y a pas de fibrés presque plats, mais des éléments de K-théorie presque plats :

DÉFINITION 3.1 ([12]).—*Soient $\alpha > 0$ un nombre réel, V une variété riemannienne compacte et E un fibré hermitien sur V. Soit ∇ une connexion unitaire sur E et $\theta = \nabla^2$ sa courbure. La connexion ∇ est dite α-plate si $\|\theta\| < \alpha$. S'il existe une connexion unitaire α-plate ∇ sur E, nous dirons que E est un fibré α-plat. Un élément de K-théorie $x \in K^0(V)$ est dit presque plat si, pour tout $\alpha > 0$, il existe des fibrés vectoriels α-plats $E_\pm$ tels que x soit égal à la différence des classes de E_+ et E_- dans $K^0(V)$.*

La courbure θ est une deux forme à valeurs dans les endomorphismes de E. Comme la dimension du fibré E croît quand α tend vers 0, il est important de préciser quelle est la norme de θ considérée : si X et Y sont deux vecteurs tangents en un point x de V, la courbure définit un endomorphisme $\theta_{X,Y}$ de l'espace hilbertien E_x ; désignons par $\|\theta_{X,Y}\|$ sa norme. On pose alors $\|\theta\| = \mathrm{Sup}\,\{\|\theta_{X,Y}\| \,/\, \|X\| \leq 1 \text{ et } \|Y\| \leq 1\}$.

On peut formuler une définition analogue pour K^1 : un élément de

$K^1(V)$ est dit presque plat si, pour tout $\alpha > 0$, il peut être représenté par une section u du fibré des automorphismes unitaires d'un fibré unitaire E muni d'une connexion unitaire α-plate ∇ tel que $\|\nabla u\| < \alpha$.

Il est clair que le produit de deux éléments presque plats de K-théorie est presque plat : si $x_i \in K^*(V_i)$ $(i = 1, 2)$ est presque plat, le produit tensoriel $x_1 \otimes x_2 \in K^*(V_1 \times V_2)$ est presque plat.

3.2 *Exemple* :Il est facile de décrire des éléments de K^1 presque plats :

Munissons le fibré trivial de dimension N sur le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de la connexion unitaire pour laquelle le transport parallèle $v_{[s,t]}$ le long du segment orienté $[s, t]$ de $\mathbf{R}$ soit donné, sur la base $(b_0, \cdots, b_{N-1})$, par $v_{[s,t]}(b_k) = e^{2i(k/N)\pi(t-s)}b_k$. Pour $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, notons u_t l'opérateur unitaire de $\mathbf{C}^N$ qui agit sur la base $(b_0, \cdots, b_{N-1})$ par $u_t b_k = b_{k-1}$ si $k \neq 0$, $u_t b_0 = e^{2i\pi t} b_{N-1}$. Alors la section $t \to u_t$ représente le générateur de $K^1(\mathbf{T})$; or, pour tout t, on a $v_{[0,t]} u_0 v_{[t,0]} = e^{-2i\pi t/N} u_t$ donc la section $t \to u_t$ est presque invariante par la connexion.

Il en résulte que l'élément de Bott sur $\mathbf{T}^2$ est un élément de K-théorie presque plat.

Les éléments de K-théorie presque plats proviennent du groupe fondamental. En effet, on démontre assez facilement :

PROPOSITION 3.3.—*Soit V une variété riemannienne simplement connexe. Toute classe de K-théorie presque plate de V est triviale. Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ tel que tout fibré α-plat sur V soit trivial.*

THÉORÈME 3.4 ([12]).—*Soient V une variété compacte orientée et $x \in K^*(V)$ un élément de K-théorie presque plat. Alors, pour toute équivalence d'homotopie $f : W \to V$, on a $\langle \sigma_V, x \rangle = \langle \sigma_W, f^*(x) \rangle$ où σ_V (*resp.* σ_W) désigne la classe de l'opérateur de signature de V (*resp.* W) dans le groupe de K-homologie $K_*(V)$ (*resp.* $K_*(W)$).*

Il est possible de donner une démonstration directe de ce théorème : si $f : W \to V$ est une équivalence d'homotopie préservant l'orientation et E un fibré suffisamment plat sur V, on peut comparer directement les opérateurs de signature de V et W à coefficients dans les fibrés E et f^*E

et démontrer qu'ils ont même indice (*cf.* [23]).

La démonstration originale de ce théorème décrite dans [12] est moins directe, mais développe des idées très intéressantes :

- à un fibré presque plat, on associe une "presque représentation" du groupe fondamental Γ ;

- on définit l'image par une presque représentation de la signature symétrique de Mishchenko : c'est une matrice inversible autoadjointe ;

- on démontre enfin un théorème de l'indice qui stipule l'égalité entre la signature à coefficients dans le fibré presque plat du départ et la signature de cet opérateur autoadjoint.

Expliquons brièvement chacune de ces idées :

Presque représentation associée à un fibré presque plat

Soit V une variété riemannienne. Choisissons un point base x de V et, pour chaque élément du groupe fondamental Γ de V, un lacet qui le représente. Donnons-nous un fibré unitaire E sur V, muni d'une connexion unitaire ∇. Le transport parallèle le long de ces représentants donne une application u de Γ dans le groupe des transformations unitaires de E_x. Si la connexion ∇ est plate, l'application u est une représentation. Si la connexion ∇ est α-plate, avec α suffisamment petit, l'application u est presque une représentation : étant donnés $\varepsilon > 0$ et une partie finie F de Γ, il existe $\alpha > 0$ tel que si u est l'application associée à une connexion α-plate, on ait pour tout $x, y \in F$, $\|u(xy) - u(x)u(y)\| < \varepsilon$. On dit alors que l'application u est une (F, ε)-représentation.

Pour des raisons qui vont apparaître ci-dessous, on considère des presque représentations telles que $u(g^{-1}) = u(g)^*$ pour tout $g \in \Gamma$. Pour cela, on remplace u par l'application $g \to \frac{1}{2}(u(g) + u(g^{-1})^*)$. Alors u n'est plus unitaire mais reste une presque représentation (donc est presque unitaire).

Remarque : Réciproquement, on peut facilement construire une partie finie F de Γ possédant la propriété suivante : pour tout $\alpha > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, à toute (F, ε)-représentation, on peut associer un fibré α-plat. On obtient ainsi une autre façon de démontrer que l'élément de Bott de $\mathbf{T}^2$ est

presque plat. Enfin, soit u la (F,ε)-représentation associée à un fibré α-plat E. Alors le fibré associé est isomorphe à E. (Ceci généralise la proposition 3.3.)

Image de l'invariant de Mishchenko par une "presque représentation"

L'invariant de Mishchenko est un élément du groupe de Wall $L(\mathbf{C}[\Gamma])$ et est donc représenté par un élément autoadjoint inversible $x \in M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$.

Soit u une application de Γ dans $M_N(\mathbf{C})$ telle que $u(g^{-1}) = u(g)^*$ pour tout $g \in \Gamma$. On déduit de u une application linéaire encore notée u de $\mathbf{C}[\Gamma]$ dans $M_N(\mathbf{C})$ en posant $u(\sum_{g\in\Gamma} a_g g) = \sum_{g\in\Gamma} a_g u(g)$. Remarquons que u est autoadjointe *i.e.* que $u(x^*) = u(x)^*$ pour tout $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$. Enfin, on étend u aux matrices ; on obtient ainsi une application linéaire encore notée u de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$ dans $M_{nN}(\mathbf{C})$.

On démontre sans peine le résultat suivant :

Lemme 3.5.— a) *Soit x un élément autoadjoint et inversible de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$. Il existe une partie finie F de Γ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que l'image $u(x)$ par toute (F,ε)-représentation u soit inversible dans $M_{nN}(\mathbf{C})$.*

b) *Soient x et y deux éléments autoadjoints et inversibles de $M_n(\mathbf{C}[\Gamma])$. Si x et y définissent le même élément de $L(\mathbf{C}[\Gamma])$, il existe une partie finie F de Γ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $u(x)$ et $u(y)$ ont même signature par toute (F,ε)-représentation u.*

Le a) résulte de ce que $u(x^{-1})\,u(x)$ est proche de 1. Le b) résulte sans difficulté de la définition du groupe $L(\mathbf{C}[\Gamma])$. (Ici, il s'agit de la signature de l'élément autoadjoint inversible $u(x) \in M_{nN}(\mathbf{C})$, *i.e.* le nombre de valeurs propres positives moins le nombre de valeurs propres négatives.)

Le théorème 3.4 résulte alors du théorème suivant :

THÉORÈME 3.6 ([12]).—*Soient V une variété riemannienne compacte orientée, Γ son groupe fondamental. Notons σ_V la classe de l'opérateur de signature V dans le groupe de K-homologie $K_0(V)$. Soit $x \in \mathbf{C}[\Gamma]$ un représentant de l'invariant de Mishchenko. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour*

tout fibré α-plat E, on ait $\langle \sigma_V, [E] \rangle = \text{Signature}(u(x))$, où u désigne la presque représentation associée à E.

Ici, $[E]$ désigne la classe du fibré E dans $K^0(V)$.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème de l'indice plus général où l'opérateur de signature est remplacé par n'importe quel opérateur elliptique E. On regarde alors l'indice de D dans le groupe $K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ au lieu de $L(\mathbf{C}[\Gamma])$. On peut encore définir l'image de $x \in K_0(\mathcal{R}[\Gamma])$ par une presque représentation comme dans le lemme 3.5. La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 2.3 ci-dessus. On utilise ici la cohomologie cyclique entière, qui est une généralisation naturelle de la cohomologie cyclique.

Importance du théorème 3.4.

D'après [12], on peut construire suffisamment de fibrés presque plats pour redémontrer la conjecture de Novikov dans les cas suivants :

a) si Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie connexe ou le groupe fondamental d'une variété complète de courbure sectionnelle négative ou nulle [30] ;

b) si Γ est un sous-groupe discret d'un groupe algébrique sur un corps local ([32]).

De plus, ce théorème permet de donner une nouvelle démonstration de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques.

Remarques : La construction de tous les fibrés presque plats utilisés pour établir les corollaires du théorème 3.4 passe par des applications lipschitziennes propres de Γ dans $\mathbf{R}^n$. Or on peut faire correspondre à une telle application un élément de K-homologie de $C^*(\Gamma)$[4], donc lui associer un invariant d'homotopie. L'avantage de cette façon de procéder, outre sa simplicité est qu'elle établit en plus la conjecture de Novikov forte.

[4] Cette construction m'a été signalée par A. Connes. Elle n'est pas encore publiée, mais devrait faire partie de la version "détaillée" de [12].

4. COMPLÉMENTS

Conjecture de Gromov-Lawson.

Commençons par énoncer cette conjecture :

Conjecture (*cf.* [21]) : *Soit V une variété compacte spinorielle de courbure scalaire strictement positive. Notons Γ le groupe fondamental de V et $f : V \to B\Gamma$ l'application classifiante. Alors, pour tout $x \in H^*(B\Gamma; \mathbf{C})$, $\langle \alpha_V, f^*(x) \rangle = 0$ où $\alpha_V \in H_*(V; \mathbf{Q})$ désigne le genre $\widehat{A}$ de V, i.e. l'image de la classe de K-homologie de l'opérateur de Dirac de V par l'isomorphisme de Chern.*

On a :

a) La conjecture de Gromov-Lawson est vraie pour les groupes hyperboliques.

b) Soient V une variété compacte spinorielle de courbure scalaire strictement positive. L'indice de l'opérateur de Dirac à coefficients dans une classe de K-théorie presque plate est nul.

En fait, la conjecture de Gromov-Lawson est une conséquence de la conjecture de Novikov forte (*cf.* [42]), d'où le a). Le b) est presque immédiat.

Feuilletages : Conjecture de Baum-Connes

On peut transposer les méthodes décrites ci-dessus dans d'autres cadres (*cf.* [2]). Dans le cas des feuilletages par exemple, on s'intéresse à la généralisation suivante de la conjecture de Novikov (*cf.* [3]) :

Soit (V, F) une variété compacte feuilletée de classe C^∞. Le groupoïde d'homotopie de (V, F) est le groupoïde différentiable des classes d'homotopie des chemins tracés dans les feuilles de (V, F). Rappelons qu'une homotopie feuilletée est une homotopie $(h_t)_{t\in[0,1]} : W \to V$ telle que pour tout point $x \in W$, $h_t(x)$ reste sur une même feuille de V.

Soient (V, F) et (W, H) deux variétés compactes feuilletées de classe C^∞.

Une application $f : W \to V$ de classe C^∞ est appelée une équivalence d'homotopie feuilletée s'il existe une application $g : V \to W$ telle que :

a) l'image par f (*resp.* g) de toute feuille de W (*resp.* V) est contenue dans une feuille de V (*resp.* W) :

b) Il existe des homotopies feuilletées reliant $g \circ f$ et $f \circ g$ à l'identité de V et W.

La conjecture de Baum-Connes s'énonce :

Conjecture (*cf.* [3]) : *Soient V une variété compacte orientée, de dimension paire et F un feuilletage sur V ; notons BG l'espace classifiant du groupoïde d'homotopie G de (V, F) et $h : V \to BG$ l'application classifiante. Alors l'image par h de σ_V dans $K_0(BG) \otimes \mathbf{Q}$ est un invariant d'homotopie feuilletée.*

Rappelons que σ_V désigne la classe dans le groupe de K-homologie $K_0(V)$ de l'opérateur de signature de V. Cette conjecture signifie que si $f : (W, H) \to (V, F)$ est une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation, on a l'égalité de $(h \circ f)_*(\sigma_W)$ avec $h_*(\sigma_V)$ modulo la torsion.

Les deux méthodes décrites ci-dessus s'appliquent à ce cadre :

a) Un élément de $H^*(BG; \mathbf{C})$ définit un cocycle cyclique sur une algèbre (notée $C_c^\infty(G)$) qui joue dans ce cadre le rôle de $\mathcal{R}[\Gamma]$. On obtient une démonstration de cette conjecture pour les cocycles qui peuvent être étendus à une sous-algèbre pleine de la C^*-algèbre du feuilletage. Cette méthode est développée dans [10] où de nombreuses classes de cohomologie sont traitées (en particulier les classes de cohomologie de Gel'fand Fuchs).

b) Soient (V, F) et (W, H) deux variétés riemanniennes feuilletées orientées. Soit $f : W \to V$ une équivalence d'homotopie feuilletée préservant l'orientation. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout fibré hermitien E sur V α-plat le long de F, les signatures de V à coefficients dans E et de W à coefficients dans f^*E sont égales (*cf.* [23]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH - *Elliptic operators discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32-33** (1976), 43-72.

[2] P. BAUM and A. CONNES - *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, preprint I.H.E.S. (1982).

[3] P. BAUM and A. CONNES - *Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes.* **in** Foliations, Advanced Studies in Pure Mathematics **5** (1985), 1-14.

[4] M. BÖKSTEDT, W.C. HSIANG et I. MADSEN - En préparation. Voir l'exposé de BÖKSTEDT au Congrès (ICM) de Kyoto (1990).

[5] J.-B. BOST - *K-théorie des produits croisés et principe d'Oka*, C.R.A.S. Paris **301**, Ser. I (1985), n° 5, 189-192.

[6] D. BURGHELEA - *The cyclic homology of groups*, Comment. Math. Helvetici **60** (1985), 354-365.

[7] S.E. CAPPELL - *On homotopy invariance of higher signatures*, Invent. Math. **33** (1976), 171-179.

[8] P. CARTIER - *Homologie cyclique : Rapport sur des travaux récents de Connes, Karoubi, Loday, Quillen, ...*, Sém. Bourbaki, Février 1984, exposé n° 621, Astérisque **121-122** (1985), 123-146.

[9] A. CONNES - *Non commutative differential geometry. Chapter I : The Chern character in K-homology. Chapter II : De Rham homology and non commutative algebra*, Publ. Math. I.H.E.S. **62** (1986), 257-360.

[10] A. CONNES - *Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation*, **in** Geometric methods in operator algebras. H. Araki and E.G. Effros éd., Pitnam Research Notes in Math. Series **123**, Longman Wiley (1986), 52-144.

[11] A. CONNES - *Entire cyclic cohomology of Banach algebras and the character of θ-summable Fredholm modules*, K-theory **1** (1988), 519-548.

[12] A. CONNES, M. GROMOV et H. MOSCOVICI - *Conjecture de Novikov et fibrés presque plats*, C.R.A.S. Paris **310** Ser. I (1990), 273-277.

[13] A. CONNES and H. MOSCOVICI - *Cyclic cohomology, the Novikov*

conjecture and fundamental groups, Topology **29** (1990), 345-388.

[14] T. FACK - *K-théorie bivariante de Kasparov*, Sém. Bourbaki Février 1983, exposé n° 605, Astérisque **105-106** (1983), 149-166.

[15] F.T. FARRELL et W.C. HSIANG - *On Novikov's conjecture for non-positively curved manifolds.* I, Ann. Math. **113** (1981), 199-209.

[16] B.L. FEIGIN et B.L. TSYGAN - *Additive K-theory*

[17] E. GETZLER - *Pseudodifferential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Comm. Math. Phys. **92** (1983), 163-176.

[18] É. GHYS - *L'invariant de Godbillon-Vey*, Sém. Bourbaki, mars 1989, Exposé n° 706, Astérisque **177-178** (1989), 155-182.

[19] É. GHYS - *Les groupes hyperboliques*, Sém. Bourbaki Mars 1990, exposé n° 722, à paraître dans Astérisque **189-190**.

[20] M. GROMOV - *Hyperbolic groups*, **in** Essays in group theory. M.S.R.I. Publ. **8** (1987), 75-263.

[21] M. GROMOV et H.B. LAWSON - *Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Publ. Math. I.H.E.S. **58** (1983), 83-196.

[22] P. de la HARPE - *Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint*, C.R.A.S. Paris **307** Ser. I (1988), 771-774.

[23] M. HILSUM et G. SKANDALIS - *Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat (d'après Connes-Gromov-Moscovici)*, à paraître dans J. für Crelle und Ang. Math.

[24] F. HIRZEBRUCH - *Topological methods in algebraic geometry*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1965).

[25] W.C. HSIANG, H.D. REES - *Miscenko's work on Novikov's conjecture*, Contemp. Math. **72** (1982), 77-98.

[26] P. JOLISSAINT - *K-groups of reduced C^*-algebras and rapidly decreasing functions on groups*, K-theory **2** (1989), 723-735.

[27] J. KAMINKER and J.G. MILLER - *Homotopy invariance of the analytic signature operators over C^*-algebras*, J. Operator Theory **14** (1985), 113-127.

[28] M. KAROUBI - *K-theory, an introduction*, Grund. des Mat. Wis., Springer-Verlag (1978).

[29] G.G. KASPAROV - *Topological invariants of elliptic operators* I : *K-homology*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. **39** (1975), 796-838 ; English transl. in Math. U.S.S.R. Izv. **9** (1975), 751-792.

[30] G.G. KASPAROV - *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Inv. Math. **91** (1988), 147-201 ; (*cf.* aussi : *K-theory, group C*-algebras and higher signatures*, Conspectus Parts 1 and 2, preprint Chernogolovka (1981).

[31] G.G. KASPAROV - *Operator K-theory and its applications : elliptic operators, group representations, higher signatures, C*-extensions*, in Proc. I.C.M. conf. Warsaw 1983, PWN Elsevier (1984), 987-1000.

[32] G.G. KASPAROV and G. SKANDALIS - *Groups acting on buildings, Operator K-theory and Novikov's conjecture*, K-theory **4** (1991), 303-337.

[33] G. LUSZTIG - *Novikov's higher signature and families of elliptic operators*, J. of Diff. Geometry **7** (1971), 229-256.

[34] A.S. MISHCHENKO - *Homotopy invariance of non simply connected manifolds*, I : *Rational invariance*, Math. U.S.S.R. Izv. **4** (1970), 509-519, traduit de Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Math. **34** (1970), 501-514.

[35] A.S. MISHCHENKO - *Infinite dimensional representations of discrete groups and higher signatures*, Izv. Akad. S.S.S.R. Ser. Mat. **38** (1974), 81-106.

[36] A.S. MISHCHENKO - *C*-algebras and K-theory*, Springer Lect. Notes in Math. vol. **763** (1979), 262-274.

[37] A.S. MISHCHENKO and Yu.P. SOLOV'JEV - *Représentations of Banach algebras and Hirzebruch type formulae*, Mat. Sbornic **111** (1980), 209-226.

[38] H. MOSCOVICI - *Cyclic cohomology and invariants of non-simply connected manifolds*, Proc. I.C.M. Kyoto (1990), à paraître.

[39] S.P. NOVIKOV - *Analogues hermitiens de la K-théorie*, Actes, Congrès Intern. Math. **2** (1970), 39-45.

[40] M. PIMSNER - *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Inv. Math. **86** (1986), 603-634.

[41] H.D. REES - *Special manifolds and Novikov's conjecture*, Topology **22**

(1983), 365-378.

[42] J. ROSENBERG - *C^*-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture*, Publ. Math. I.H.E.S. **58** (1983), 409-424.

[43] Yu.P. SOLOV'EV - Uspekhi Matem. Nauk. **31** n° 1 (1976), 261-262.

[44] Yu.P. SOLOV'EV - Thèse. Université de Moscou (1976).

[45] S. WEINBERGER - *Aspects of the Novikov conjecture*, Contemp. Math. **105** (1990), 281-297.

Georges SKANDALIS

UNIVERSITÉ DE PARIS 7
UFR de Mathématiques
UA 212 du CNRS
Tour 45-55 - 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05