Astérisque

JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

# Polynômes quadratiques et attracteur de Hénon

*Astérisque*, tome 201-202-203 (1991), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 734, p. 143-165

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1990-1991__33__143_0>

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI novembre 1990
43ème année, 1990-91, n° 734

# POLYNÔMES QUADRATIQUES ET ATTRACTEUR DE HÉNON

par **Jean-Christophe YOCCOZ**

## 0. INTRODUCTION

Nous énonçons (§1) trois résultats importants sur les systèmes dynamiques démontrés ces dernières années. Ces résultats sont, grosso modo, du type suivant : dans certaines familles d'applications (polynômes quadratiques, fractions rationnelles, famille de Hénon), on a, avec probabilité positive sur les paramètres, une dilatation exponentielle (non uniforme) en dépit de la présence d'une zone "critique" fortement contractante.

Nous indiquons ensuite (§2, 3, 4) le contexte dans lequel se situent ces résultats.

La méthode de démonstration est commune aux trois résultats (bien que les difficultés techniques soient de degré très varié) : après avoir garanti, par une bonne localisation des paramètres, une forte dilatation pour les premiers itérés, on montre qu'avec forte probabilité dans la zone de paramètres considérée, les retours dans la zone critique, qui sont inévitables, ne sont ni trop précis ni trop fréquents pour détruire la dilatation acquise. C'est une récurrence assez compliquée sur le nombre d'itérations, mais dont le principe semble extrêmement fécond, et devrait, une fois bien compris, ouvrir la voie à de nombreux autres résultats significatifs.

Nous esquissons au §5 une démonstration du résultat le plus simple, et indiquons au §6 quelles sont dans les deux autres résultats les difficultés supplémentaires rencontrées.

## 1. LES RÉSULTATS

**1.1.** Pour $a \in \mathbf{R}$, nous considérons l'itération du polynôme quadratique réel :

$$P_a(x) = x^2 + a.$$

Pour $a \leq \frac{1}{4}$, nous notons $\beta_a$ le plus grand point fixe de $P_a$.

**THÉORÈME 1.** [M. Jakobson] ([1], [2], [3], [4]).— *Soient* $1 < \lambda < 2$ *et* $\delta > 0$. *Il existe* $a_0 \in ]-2, \frac{1}{4}[$ *et un ensemble* $A \subset [-2, a_0]$ *possédant les propriétés suivantes* :

a) $|A| \geq (1-\delta)(a_0+2)$ ;

b) *Soit* $a \in A$ ;

(i) *on a* $|DP_a^n(a)| \geq \lambda^n$, *pour* $n \geq 0$ ;

(ii) *pour presque tout* $x \in [-\beta_a, \beta_a]$, *il existe* $c(x) > 0$ *tel qu'on ait* :

$$|DP_a^n(x)| \geq c(x)\lambda^n \qquad \text{pour } n \geq 0\,;$$

(iii) *le polynôme* $P_a$ *possède une (unique) mesure invariante ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

La propriété b) (iii) implique qu'il existe une fonction positive $h_a \in L^1([-\beta_a, \beta_a])$ telle qu'on ait, pour $-\beta_a \leq s < t \leq \beta_a$ et presque tout $x \in [-\beta_a, \beta_a]$ :

$$\operatorname*{Lim}_{n \to +\infty} \frac{1}{N} \#\{n \in [0, N[\,,\, P_a^n(x) \in [s,t]\} = \int_s^t h_a(u)du.$$

La propriété b) (ii) signifie que l'exposant de Lyapounov, et donc aussi l'entropie métrique, de $P_a$ relatif à la mesure de (iii) est au moins égal à $\operatorname{Log} \lambda$.

**1.2.** Pour $d \geq 2$, considérons l'espace $\mathcal{R}_d$ des fractions rationnelles irréductibles de degré $d$. C'est un ouvert de Zariski de $\mathbf{C}P(2d+1)$. Chaque fraction rationnelle $R \in \mathcal{R}_d$ définit une application holomorphe de $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même.

On dit qu'une fraction rationnelle $R$ est *strictement prépériodique* si tout point critique de $R$ a une orbite finie mais n'est pas périodique.

**THÉORÈME 2.** [M. Rees] ([5]).— *Il existe une partie $A$ de $\mathcal{R}_d$ ayant les propriétés suivantes :*

a) *$A$ est de mesure positive (pour la classe de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{R}_d$) et toute fraction rationnelle strictement prépériodique est un point de densité de $A$ ;*

b) *Soit $R \in A$ ;*

(i) *il existe $\lambda = \lambda(R) > 1$ et pour presque tout $x \in \overline{\mathbf{C}}$ un réel $c(x) > 0$ tels que :*

$$\|T_x R^n\| \geq c(x)\,\lambda^n \quad , \quad \forall n \geq 0 \ ;$$

(ii) *$R$ possède une mesure invariante ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

D'après b) (i), l'ensemble de Julia de $R \in A$ est égal à $\overline{\mathbf{C}}$.

**1.3.** La famille de Hénon ([6], [7]) est définie par :

$$P_{a,b}(x,y) = (x^2 + a + y, bx) \quad , \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Pour $b = 0$, $P_{a,b}$ dégénère en le polynôme quadratique $P_a$ sur $\mathbf{R} \times \{0\}$. Pour $b \neq 0$, $P_{a,b}$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$, de jacobien constant égal à $-b$.

Pour $a \leq \frac{1}{4}(1-b)^2$, notons $\alpha_{a,b}$ la plus petite racine de $x^2 + a + (b-1)x = 0$ et $p_{a,b} = (\alpha_{a,b}\,,\, b\alpha_{a,b})$ le point fixe de $P_{a,b}$ correspondant.

**THÉORÈME 3.** [M. Benedicks, L. Carleson] ([8], [9]).— *Soient $1 < \lambda < 2$, et $\delta > 0$. Il existe $a_0 \in [-2, 0]$, $b_0 > 0$, et, pour $0 < |b| < b_0$, un ensemble $A_b \subset [-2, a_0]$ ayant les propriétés suivantes :*

a) $|A_b| \geq (1-\delta)(a_0 + 2)$ ;

b) *Soient $0 < |b| < b_0$, $a \in A_b$ ; notons $\Lambda = \Lambda_{a,b}$ l'adhérence de la variété instable du point fixe hyperbolique $p_{a,b}$ de $P_{a,b}$ ;*

(i) *on a $\Lambda \subset [-3, 3] \times [-3b, +3b]$ ;*

(ii) *il existe un point $z_0 \in \Lambda$, d'orbite dense dans $\Lambda$, vérifiant*

$$\|DP^n_{a,b}(z_0\| \geq \lambda^n \quad , \quad \forall n \geq 0\,;$$

(iii) *il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbf{R}^2$ tel qu'on ait :*

$$\operatorname*{Lim}_{n \to +\infty} d(P^n_{a,b}(x), \Lambda) = 0$$

*pour tout* $x \in U$.

Ce théorème représente un progrès majeur dans la compréhension des difféo-morphismes dissipatifs des surfaces (*cf.* §4). On aimerait obtenir dans la partie b) une information plus complète, du type de celle contenue dans les parties b) des théorèmes 1 et 2.

## 2. POLYNÔMES QUADRATIQUES

**2.1.** Pour $a > \frac{1}{4}$, on a $\mathrm{Lim}_{n\to+\infty} P_a^n(x) = +\infty$ pour tout réel $x$.

Pour $a \leq \frac{1}{4}$, notons $K_a$ l'ensemble des réels $x$ dont l'orbite par $P_a$ est bornée. On a :

$$K_a = \{\cap_{n\geq 0} P_a^{-n}([-\beta_a, \beta_a])\}\,.$$

Pour $a < -2$, on a $P_a(0) = a < -\beta_a$ ; il est élémentaire de voir qu'il existe un homéomorphisme $h_a$ de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sur $K_a$ qui conjugue le décalage $\sigma$ à $P_{a/K_a}$. L'ensemble de Cantor $K_a$ est *dilaté par* $P_a$ : $\exists c > 0$, $\lambda > 1$ tels que :

$$\forall x \in K_a\ ,\ \forall n \geq 0 \quad |DP_a^n(x)| \geq c\lambda^n\,.$$

La dimension de Haussdorff de $K_a$ dépend analytiquement de $a \in ]-\infty, -2[$ ([10]) ; on contrôle très bien dans ce cas tous les aspects de la dynamique de $P_a$.

**2.2.** Si $a \in \left[-2, \frac{1}{4}\right] = J$, on a $K_a = [-\beta_a, \beta_a]$. Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble dénombrable discret des valeurs de $a$ pour lesquelles le point critique 0 est périodique.

Soient $a_0 \in \mathcal{D}$, et $r$ la période de 0 pour $P_{a_0}$. Il existe un intervalle ouvert $I(a_0) = ]a_0^-, a_0^+[ \subset J$, contenant $a_0$, et une application analytique $\alpha^{a_0} : I(a_0) \to \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour $a \in I(a_0)$, $\alpha^{a_0}(a)$ est un point périodique de $P_a$, de période $n$ ;

(ii) $\alpha^{a_0}(a_0) = 0$ ;

(iii) l'application $a \to DP_a^n(\alpha^{a_0}(a))$ est un difféomorphisme analytique croissant de $I(a_0)$ sur $]-1, +1[$.

Pour $a \in I(a_0)$, posons

$$W_a = \{x \in \mathbf{R}\,,\ \mathrm{Lim}_{k\to\infty} P_a^{kn}(x) = \alpha^{a_0}(a)\}\,,$$
$$V_a = \bigcup_{i=0}^{n-1} P_a^{-i}(W_a)\,,\ J_a = K_a - V_a\,.$$

Les parties $V_a$, $W_a$ sont ouvertes, les points 0 et $\alpha^{a_0}(a)$ appartiennent à la même composante connexe de $W_a$, et le compact $J_a$ est dilaté par $P_a$.

Au voisinage de l'orbite périodique de $\alpha^{a_0}(a)$, la famille $P_a$ présente une bifurcation de type flip (doublement de période) en $a_0^-$, et de type flip ou selle-nœud en $a_0^+$.

**2.3.** La conjecture principale concernant la famille quadratique réelle est :

**CONJECTURE.**— *L'ouvert* $\cup_{a_0\in\mathcal{D}} I(a_0) = \mathcal{H}$ *est* dense *dans* $J$.

Pour $a \in J$, $a \notin \cup_{a_0\in\mathcal{D}} \overline{I(a_0)}$, toutes les orbites périodiques de $P_a$ sont répulsives. Mais $K_a$, contenant le point critique, ne peut évidemment pas être dilaté par $P_a$ dans le sens de §2.1.

Le théorème de Jakobson montre que $\mathcal{H}$ *n'est pas* de mesure de Lebesgue pleine dans $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$.

On dit que $P_a$ (avec $a \in J$) vérifie la condition de Misiurewicz si l'orbite postcritique $(P_a^n(0))_{n\geq 1}$ n'accumule pas 0. Le polynôme $P_a$ vérifie alors la conclusion b) du théorème 1 ([11]) (pour un certain $\lambda > 1$). Cependant la condition de Misiurewicz n'est presque jamais vérifiée par $P_a$.

**2.4.** Soit $a_0 \in \mathcal{D}$, $n$ la période de 0 pour $P_{a_0}$. Il existe un réel $\widetilde{a}_0^- < a_0^-$, une application continue $\beta_{a_0} : J \to \mathbf{R}^+$ et un homéomorphisme $\varphi_{a_0} : J \to J(a_0) = [\widetilde{a}_0^-, a_0^+]$ tels que pour tout $a \in J$, les restrictions $P_{a/K_a}$ et $P^n_{\varphi_{a_0}(a)/[-\beta_{a_0}(a),\beta_{a_0}(a)]}$ soient topologiquement conjuguées ([35]). Le réel $\widetilde{a}_0^-$ est déterminé par ces propriétés.

Une valeur $a \in J(a_0)$ du paramètre est dite $n$-renormalisable. Une valeur $a$ du paramètre est dite infiniment renormalisable (on note $a \in R^\infty$) si elle est $n$-renormalisable pour des entiers $n$ arbitrairement grands. Elle est infiniment renormalisable de type constant (on note $a \in R_c^\infty$) si elle est $n_k$-renormalisable pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers vérifiant $\mathrm{Sup}_{k\geq 0}\, n_{k+1}\, n_k^{-1} < +\infty$.

D'après les travaux de Sullivan ([12], [13]), on possède un bon contrôle de la dynamique de $P_a$ lorsque $a \in R_c^\infty$. En particulier, tout point de $R_c^\infty$ est adhérent à $\mathcal{H}$.

D'autre part, on sait ([14]) que $\overline{\mathcal{H}} \cup R^\infty = J$. Pour démontrer la conjecture 2.3, il reste à voir que toutes les composantes connexes de $R^\infty$ sont des points.

Les questions suivantes semblent intéressantes : soit $\mathcal{A} = (J - R^\infty \cup_{a_0 \in \mathcal{D}} \overline{I(a_0)})$ ; d'après le théorème 1, $\mathcal{A}$ est de mesure positive ; est-il vrai que, pour presque tout $a \in \mathcal{A}$, $P_a$ possède une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ? qu'on ait $\operatorname{Lim\,inf}_{n \to +\infty} |DP_a^n(x)|^{1/n} > 1$ pour presque tout $x$ ?

[On conjecture par ailleurs que $R^\infty$ est de mesure nulle, ce qui impliquerait évidemment la conjecture 2.3.]

**2.5.** Le théorème 1 a été étendu à des familles d'endomorphismes plus générales que la famille quadratique ([15]).

Dans une autre direction, M. Benedicks et L.S. Young ont prouvé une version du théorème 1 concernant l'itération de perturbations aléatoires d'un polynôme quadratique [16].

## 3. FRACTIONS RATIONNELLES

**3.1.** Soient $d \geq 2$ et $R : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ une fraction rationnelle (irréductible) de degré $d$. L'*ensemble de Julia* $J_R$ est le complémentaire dans $\overline{\mathbf{C}}$ du plus grand ouvert $U_R$ sur lequel la famille $(R^n)_{n \geq 0}$ est normale.

C'est une partie compacte, non vide, totalement invariante ($R^{-1}(J_R) = J_R$), égale à $\overline{\mathbf{C}}$ ou d'intérieur vide. Les points périodiques répulsifs de $R$ y sont denses.

L'ensemble de Julia joue, pour l'itération de $J$, le rôle de l'ensemble limite d'un groupe kleinien. Rappelons la :

**Conjecture 1.**— *Si $J_R \neq \overline{\mathbf{C}}$, $J_R$ est de mesure nulle.*

**3.2.** Une fraction rationnelle $R \in \mathcal{R}_d$ est dite *hyperbolique* si aucun des

points critiques de $R$ n'appartient à $J_R$. L'ouvert $U_R$ est alors constitué des bassins des orbites périodiques attractives de $R$ (celles-ci sont en nombre fini, non nul) ; l'ensemble de Julia $J_R$ est *dilaté* par $R$ (*cf.* §2.1), donc de mesure nulle dans ce cas.

Pour la description des composantes connexes de $U_R$ lorsque $R$ n'est plus nécessairement hyperbolique, voir[17], [18].

Une fraction rationnelle $R_0$ est *structurellement stable* s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $R_0$ dans $\mathcal{R}_d$ tel que tout $R$ dans $\mathcal{U}$ soit topologiquement conjugué à $R_0$.

Une fraction rationnelle $R_0$ est *J-stable* (ou $\Omega$-stable) s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $R_0$ dans $\mathcal{R}_d$ tel que, pour tout $R$ dans $\mathcal{U}$, $R$ et $R_0$ soient topologiquement conjugués au voisinage de leurs ensembles de Julia.

Une fraction rationnelle hyperbolique est $J$-stable. La deuxième conjecture importante dans le sujet est :

**Conjecture 2.**— *Une fraction rationnelle J-stable est hyperbolique.*

On sait qu'une fraction rationnelle $R$ $J$-stable qui ne serait pas hyperbolique doit vérifier $J_R = \overline{\mathbf{C}}$.

**3.3.** La conjecture précédente est à rapprocher du résultat fondamental de Mané-Sad-Sullivan ([19]) : les fractions rationnelles structurellement stables (ou $J$-stables) forment un ouvert dense de $\mathcal{R}_d$.

Le théorème de M. Rees implique que les fractions rationnelles qui *ne sont pas* structurellement stables forment une partie de $\mathcal{R}_d$ de mesure positive. On peut risquer la question (optimiste) suivante : est-il vrai que presque toute fraction rationnelle $R \in \mathcal{R}_d$ soit structurellement stable ou vérifie la conclusion b) du théorème 2 ?

**3.4.** M. Rees obtient en fait la conclusion plus précise suivante (il existe de même une version analogue du théorème de Mané-Sad-Sullivan). Soit $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles ; on suppose qu'il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $R_{\lambda_0}$ soit strictement prépériodique, et que la famille $(R_\lambda)$ vérifie en $\lambda_0$ la condition de transversalité suivante :

Pour tout point critique $c(\lambda)$ de $R_\lambda$, soient $k, n$ des entiers $> 0$ tels que

$R^k_{\lambda_0}(c(\lambda_0)) = R^{k+n}_{\lambda_0}(c(\lambda_0))$ ; on a :

$$D_\lambda(R^k_\lambda(c(\lambda)) - R^{k+n}_\lambda(c(\lambda)))_{|\lambda=\lambda_0} \neq 0.$$

Alors, $\lambda_0$ est point de densité d'une partie $A \subset \Lambda$ de mesure positive constituée de paramètres $\lambda \in \Lambda$ pour lesquels $R_\lambda$ vérifie la conclusion b) du théorème 2.

**3.5.** Fornaess et Sibony ([20]) ont démontré une version du théorème 2 concernant l'itération de perturbations aléatoires d'une fraction rationnelle.

## 4. LA FAMILLE DE HÉNON. BIFURCATIONS HOMOCLINIQUES

Nous indiquons ci-dessous le rôle de la famille de Hénon (et ses généralisations) dans l'étude des difféomorphismes polynômiaux de $\mathbf{R}^2$. Nous expliquons ensuite comment le résultat de Benedicks-Carleson (généralisé par Mora-Viana) s'inscrit dans la compréhension de la dynamique des difféomorphismes (dissipatifs) des surfaces.

### 4.1. Difféomorphismes polynômiaux de $\mathbf{R}^2$ [21]

Notons $G$ le groupe des difféomorphismes polynômiaux de $\mathbf{R}^2$, $A$ le sous-groupe des automorphismes affines, $S$ le sous-groupe (résoluble) constitué des difféomorphismes de la forme :

$$(x, y) \mapsto (\alpha x + p(y)\,,\ \beta y + \gamma)\,,$$

avec $(\alpha, \beta \in \mathbf{R}^*,\ \gamma \in \mathbf{R},\ p \in \mathbf{R}[x])$.

Le groupe $G$ est isomorphe au produit amalgamé de $A$ et $S$ le long de $A \cap S$ ([22]).

Une *application de Hénon généralisée* est un difféomorphisme polynômial de la forme :

$$(x, y) \mapsto (p(x) + y, bx)\,,$$

avec $b \in \mathbf{R}^*$, $p \in \mathbf{R}[x]$, $d^0 p \geq 2$.

**THÉORÈME** (Friedland-Milnor).— *Tout difféomorphisme polynômial de* $\mathbf{R}^2$ *est conjugué dans* $G$ *à :*

- *ou bien un élément de* $A \cup S$ ;
- *ou bien la composition* $H_1 \circ \cdots \circ H_m$ $(m \geq 1)$ *d'applications de Hénon généralisées* $H_i(x,y) = (y + p_i(x), b_i x)$.

La dynamique des difféomorphismes de $A \cup S$ est élémentaire et sans grand intérêt. Dans le second cas, la décomposition $H_1 \circ \cdots \circ H_m$ est essentiellement unique : en particulier, l'entier $m$ et les degrés $d_i$ des polynômes $p_i$ sont parfaitement déterminés. L'étude dynamique de la famille de Hénon constitue donc le premier cas non trivial de la dynamique des difféomorphismes polynômiaux de $\mathbf{R}^2$ : le cas général consiste en l'itération cyclique d'un nombre fini d'applications de Hénon généralisées.

### 4.2. Hyperbolicité ([23], [24])

Soit $M^n$ une variété riemannienne compacte de classe $C^\infty$, $f : M \to M$ un difféomorphisme de classe $C^\infty$.

Une partie compacte $K$ de $M$ invariante par $f$ est *hyperbolique* s'il existe $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ et une décomposition $TM_{/K} = E^s \oplus E^u$ en sous-fibrés invariants par $Tf$ tels qu'on ait :

$$\|Tf^n{}_{/E^s}\| \leq c\lambda^n \,,$$
$$\|Tf^{-n}{}_{/E^u}\| \leq c\lambda^n \,, \quad \forall n \geq 0 \,.$$

Les variétés stables $W^s(x) = \{y \in M \,,\, Lim_{n\to+\infty} d(f^n y, f^n x) = 0\}$ et instables $W^u(x) = \{y \in M \,,\, Lim_{n\to-\infty} d(f^n y, f^n x) = 0\}$ sont alors, pour $x \in K$, les images d'immersions injectives de $E^s_x$, $E^u_x$ respectivement.

Une partie compacte invariante hyperbolique $K$ de $M$ est un *ensemble basique* si $f_{|K}$ a une orbite dense et s'il existe un voisinage $U$ de $K$ tel que $K = \cap_{n\in\mathbf{Z}} f^n(U)$. Les points périodiques de $f_{|K}$ sont alors denses dans $K$.

Pour un ensemble basique $K$, définissons :

$$W^s(K) = \{y \in M \,,\, \operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} d(f^n y, K) = 0\} \,,$$
$$W^u(K) = \{y \in M \,,\, \operatorname*{Lim}_{n\to-\infty} d(f^n y, K) = 0\} \,.$$

On a $W^s(K) = \cup_{x\in K} W^s(x)$, $W^u(K) = \cup_{x\in K} W^u(x)$. On dit que $K$ est un *attracteur hyperbolique* si $W^s(K)$ est ouvert.

L'*ensemble récurrent par chaînes* $C(f)$ de $f$ est constitué des points $x$ pour lesquels il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite finie $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = x$ ($n \geq 1$) avec $d(f(x_\ell), x_{\ell+1}) < \varepsilon$ pour $0 \leq \ell < n$. C'est la plus petite partie compacte invariante contenant tous les phénomènes de récurrence de $f$.

On dit que $f$ est *$C$-hyperbolique* si $C(f)$ est hyperbolique. Si $f$ est $C$-hyperbolique, $C(f)$ admet une partition (dite spectrale) en ensembles basiques disjoints $C_1, \cdots, C_r$ tels que $W^s(C_i) \cap W^u(C_j) = \emptyset$ pour $i < j$ et $W^u(C_i) \cap W^s(C_i) = C_i$.

Un difféomorphisme $C$-hyperbolique $f$ a la propriété de *transversalité forte* si $W^s(x)$ et $W^u(y)$ sont transverses pour tous $x, y \in C(f)$.

Si $f$ est $C$-hyperbolique, alors $f$ est $C^1$ $C$-stable : pour tout difféomorphisme $g$ $C^1$-voisin de $f$, il existe un homéomorphisme $h : C(f) \mapsto C(g) \subset M$, proche de l'injection canonique, conjuguant $f_{|C(f)}$ à $g_{|C(g)}$.

Si de plus $f$ a la propriété de transversalité forte, $f$ est $C^1$-structurellement stable : tout difféomorphisme $C^1$-proche de $f$ est topologiquement conjugué à $f$ ([25], [26]).

Un résultat remarquable de Mané ([27]) affirme qu'inversement la $C^1$-stabilité structurelle implique $C$-hyperbolicité et transversalité forte. Ceci a été généralisé par Palis [28] ($C^1$ $C$-stabilité $\Rightarrow$ $C$-hyperbolicité) et est totalement ouvert pour la $C^2$-stabilité structurelle.

### 4.3. Bifurcations homocliniques

Supposons que $M$ soit une surface compacte. Même dans ce cas, on ne dispose pratiquement pas d'outils permettant d'étudier la dynamique du difféomorphisme le plus général de $M$. Par exemple, on ne sait pas si les difféomorphismes ayant au moins une orbite périodique forment une partie dense de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^2)$ : c'est, sous sa forme la plus simple, le problème du "closing lemma" ; les seuls résultats généraux connus concernent la $C^1$-topologie (Pugh, [29]).

Pour contourner ce problème (et d'autres), une approche qui s'est avérée fructueuse est la suivante. On considère des familles lisses $(f_t)_{t\in[-1,1]}$ de difféomorphismes tels que $f_t$ soit $C$-hyperbolique pour $t < 0$, mais $f_0$ ne le soit pas. L'étude de la dynamique des $f_t$, pour $0 \leq t \ll 1$ a permis d'exhiber des phénomènes nouveaux et très intéressants. La façon proba-

blement la plus intéressante de traverser la frontière de l'ouvert formé par les difféomorphismes $C$-hyperboliques est à travers une *bifurcation homoclinique* : le difféomorphisme $f_0$ présente une *tangence homoclinique*, c'est-à-dire une intersection tangentielle (quadratique) entre les variétés stables et instables d'un point périodique hyperbolique ; cette intersection n'existait pas pour $t < 0$, et se déploie génériquement avec $t$ (voir Figure 1).

À ce propos, Palis a formulé la :

**Conjecture.**— *Tout difféomorphisme de la surface compacte $M$ qui n'est pas $C$-hyperbolique peut être perturbé (dans la $C^\infty$-topologie) de façon à exhiber une tangence homoclinique.*

Les bifurcations homocliniques ne sont assez bien comprises que dans le cas dissipatif : on demande par exemple, dans le cas le plus simple où la tangence se produit pour un point *fixe* hyperbolique $p$, que $|\mathrm{Det}\, T_p f_0| < 1$.

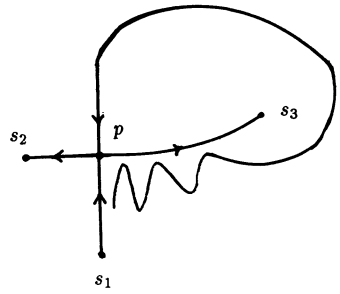
Mentionnons quelques résultats obtenus (pour les familles génériques) sur la dynamique des $f_t$ $(0 < t \ll 1)$ :

- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle non trivial $J \subset [0, \varepsilon]$, et une partie $R$ $G_\delta$-dense dans $J$, tels que pour $t \in R$ le difféomorphisme $f_t$ ait une infinité d'orbites périodiques attractives (Newhouse [30], [31]) ;
- si l'ensemble basique qui contient $p$ a une dimension de Haussdorff strictement inférieure à 1, alors avec forte probabilité sur $t \in [0, \varepsilon]$ le difféomorphisme $f_t$ a de bonnes propriétés d'hyperbolicité (Newhouse-Palis-Takens [32], Palis-Takens [33]).

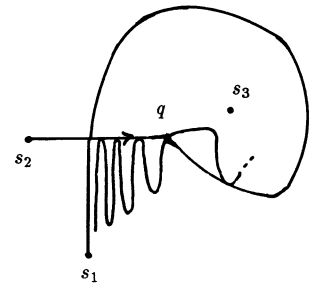
Le rôle de la famille de Hénon (ou plutôt de familles de "type Hénon") dans ce contexte est le suivant (voir Figure 2) : soit $q$ un point de tangence pour $f_0$, $N$ un entier assez grand ; on s'intéresse aux points situés au voisinage de $q$ qui reviennent pour la première fois dans ce voisinage en $N$ itérations de $f_t$. Un calcul montre alors que, dans un système de coordonnées approprié, et pour des valeurs du paramètre $t \in [t_N^-, t_N^+]$, l'application de retour $F_t = f_t^N$ a des propriétés semblables à celles des applications de Hénon $P_{a,b}$ (le paramètre $a$ se déduisant de $t$ par une application affine, et le paramètre $b$ étant essentiellement constant de l'ordre de $[\mathrm{Det}\,(T_p f_0)]^N$) : voir [9] pour la définition précise de ces familles "de type Hénon".

Mora et Viana ([9]) ont étendu le résultat de Benedicks et Carleson à ce cadre : ils ont ainsi démontré qu'avec probabilité strictement positive sur le paramètre $t \in [0, \varepsilon]$, le difféomorphisme $f_t$ exhibe un "attracteur étrange" : une partie compacte invariante $\Lambda$, possédant une orbite dense $\mathcal{O}(z_0)$ d'exposant de Lyapounov positif ($\mathrm{Lim\,inf}_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Log}\, \|T_{z_0} f^n\| > 0$), et dont le bassin $W^s(\Lambda) = \{y \in M\,,\, \mathrm{Lim}_{n\to+\infty}$ $d(f^n(y), \Lambda) = 0\}$ soit d'intérieur non vide. Il est à noter que $\Lambda$ ne peut être un attracteur hyperbolique au sens de 4.1 (*cf.* [34]). La démonstration, adaptée de celle de Benedicks-Carleson, ne fournit malheureusement pas, dans son état actuel, beaucoup d'informations sur la géométrie de $\Lambda$.

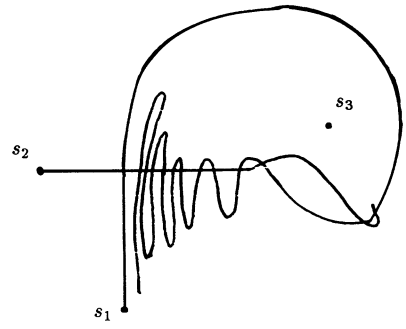
**Figure 1**




$t < 0$
$C(f_t) = \{s_1, s_2, s_3, p\}$

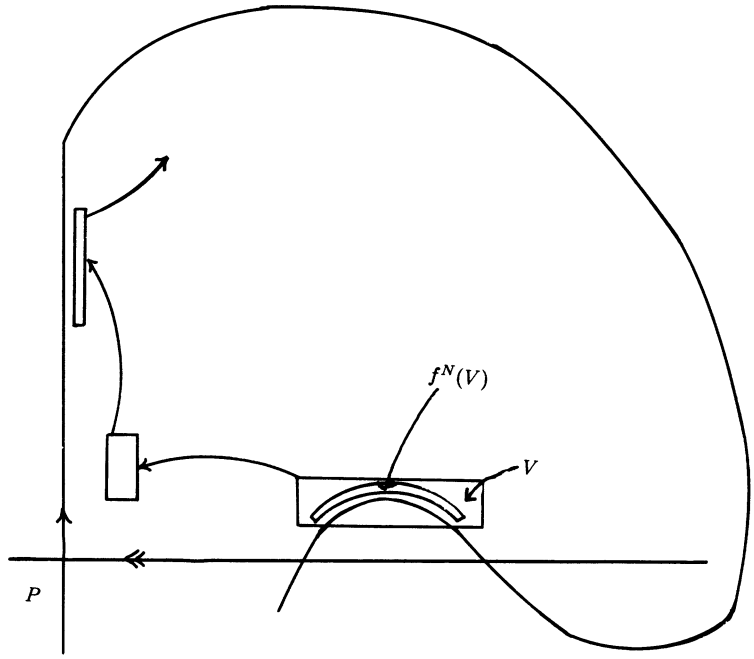



$t = 0$
$C(f_0) = \{s_1, s_2, s_3, p\} \cup \mathcal{O}(q)$




$t > 0$
$C(f_t) = ?$

**Figure 2**




## 5. ESQUISSE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

### 5.1. Mise sous forme normale

Un changement linéaire de variable et un changement de paramètre transforme la famille $(P_a)_{a\in[-2,0]}$ en la famille $(\widetilde{P}_s)_{s\in[0,1]}$, avec :

$$\widetilde{P}_s(x) = 2x^2 - 1 + s(1 - x^2)\,.$$

Notons $h$ l'homéomorphisme $x \mapsto \sin \frac{\pi}{2} x$ de $[-1, 1]$ dans lui-même. Posons

$$Q_s = h^{-1} \circ \widetilde{P}_s \circ h\ , \quad 0 \leq s \leq 1\,.$$

On a

$$Q_0(x) = 2|x| - 1\,,$$

$$\sin \frac{\pi}{2} Q_s(x) = \sin \frac{\pi}{2} Q_0(x) + s \cos^2 \frac{\pi}{2} x\,.$$

Nous nous intéressons à des valeurs du paramètre $s > 0$ très voisines de 0. En dehors d'un voisinage de l'origine, on a :

$$Q_s(x) = Q_0(x) + O(s)$$

en topologie $C^\infty$. Au voisinage de l'origine, on a :

$$(1 + Q_s(x))^2 = 4x^2 + \frac{8s}{\pi^2} + O(sx^2) + O(x^4)\,.$$

On a aussi $Q_s(1) = 1$, $DQ_s(1) = 2 + O(s)$.

**5.2.** Notons $\alpha(s)$ le point fixe de $Q_s$ différent de 1 (on a $\alpha(s) = -\frac{1}{3} + O(s)$). Pour $s$ petit, la valeur critique $c(s)$ de $Q_s$ appartient à $[-1, \alpha(s)[$.

On suppose qu'on a $Q_s^n(0) \neq \alpha(s)$ pour tout $n \geq 0$ ; ceci exclut un ensemble dénombrable de valeurs de $s$.

Posons $J^{(0)} = [\alpha(s), -\alpha(s)]$ ; pour $n \geq 1$, notons $J^{(n)}$, $J^{(-n)}$ les deux composantes de l'image réciproque par $Q_s$ de $J^{(n-1)}$, avec $J^{(n)} \subset [-\alpha(s), 1]$. On a

$$]-1, 1[ = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} J^{(n)}\,,$$

ces intervalles étant d'intérieurs disjoints.

Soit $n \geq 2$ ; les valeurs du paramètre $s$ pour lesquelles $c(s) \in J^{(-n)}$ forment un intervalle $K^{(n)}$. On fixe dorénavant un entier $n_0$, qu'on suppose assez grand, et on considère uniquement les valeurs du paramètre $s$ dans $K^{(n_0)}$. Posons $J_0 = J_1 = J^{(0)}$. Pour $2 \leq n \leq n_0$, notons $J_n^{(-1)}$, $J_n^{(1)}$ les deux composantes de $Q_s^{-1}(J^{(1-n)})$, avec $J_n^{(1)} \subset [0, -\alpha(s)]$. Posons aussi :

$$J_n = J_n^{(0)} = Q_s^{-1}\Big(\bigcup_{m>n} J_0^{(1-m)}\Big)\,.$$

On a donc, pour $2 \leq n \leq n_0$ :

$$J_{n-1} = J_n^{(-1)} \cup J_n^{(0)} \cup J_n^{(1)}\,,$$

ces intervalles étant d'intérieurs disjoints.

Posons $I_{n_0} = I_{n_0+1} = J^{(-n_0)}$, $g_{n_0} = g_{n_0+1} = \left(Q^{n_0}_{s/I_{n_0}}\right)^{-1}$ ; pour $2 \leq n \leq n_0$, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, posons aussi :

$$\overline{g}_n^{(\varepsilon)} = \left(Q^n_{s/J_n^{(\varepsilon)}}\right)^{-1}.$$

### 5.3. Branches d'inverses critiques et résiduelles

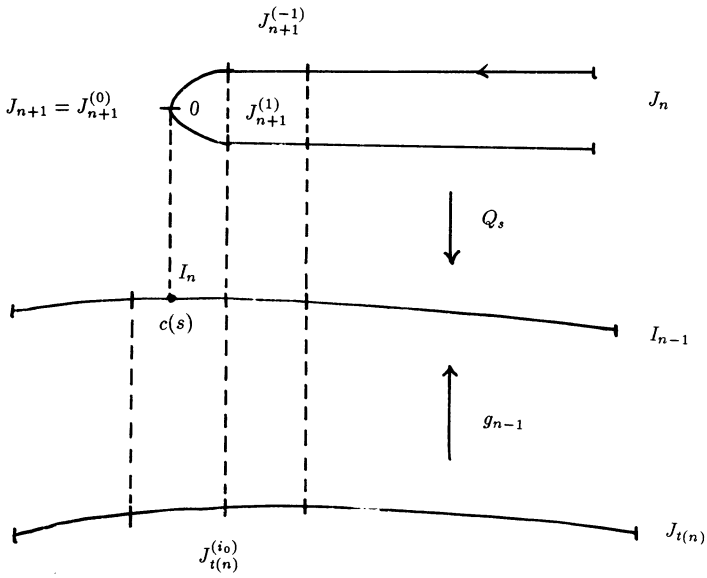
On va définir une suite décroissante d'intervalles $J_k$ contenant 0 et considérer certaines branches des applications multivaluées $(Q_s^n)^{-1}$, qui sont définies sur un intervalle $J_k$, et dont l'image ou bien contient la valeur critique (branches critiques) ou bien est contenue dans $J_0$ (branches résiduelles) ; l'*ordre* d'une telle branche est $n + k$.

Pour $2 \leq n \leq n_0$, les *branches résiduelles d'ordre* $n$ sont $\overline{g}_n^{(-1)}$ et $\overline{g}_n^{(1)}$. Ce sont des difféomorphismes de $J_0$ sur $J_n^{(-1)}$ et $J_n^{(1)}$ respectivement.

La *branche critique d'ordre* $n_0$ (ou $n_0 + 1$) est $g_{n_0} = g_{n_0+1}$ : c'est un difféomorphisme de $J_0 = J_1$ sur $I_{n_0} = I_{n_0+1}$.

Définissons maintenant par récurrence les branches critiques et résiduelles d'ordre $n > n_0 + 1$. On les définit, ainsi qu'une fonction $t : \{n \in \mathbf{N}, n > n_0\} \to \mathbf{N}$ vérifiant $t(n) < n$, par les propriétés suivantes (figure 3) :

**Figure 3**



1. *La branche critique d'ordre* $n-1$ ($\geq n_0$), notée $g_{n-1}$ est un difféomorphisme de $J_{t(n)}$ sur $I_{n-1}$.
2. On a une décomposition en intervalles d'intérieurs disjoints :

$$J_n = \bigcup_{-k_{n+1} \leq i \leq k_{n+1}} J_{n+1}^{(i)},$$

avec un entier $k_{n+1} \geq 0$ ; on pose $J_{n+1} = J_{n+1}^{(0)}$ ; *les branches résiduelles d'ordre* $n+1$ sont des difféomorphismes $\overline{g}_{n+1}^{(i)}$ ($0 < |i| \leq k_{n+1}$) de $J_{t(n+1,i)}$ (pour un certain entier $t(n+1,i) \in [0,n[$) sur $J_{n+1}^{(i)}$.
3. La valeur critique $c(s)$ appartient à $I_{n-1}$. Soit $i_0 \in [-k_{t(n)+1}, k_{t(n)+1}]$ l'entier tel que $c(s) \in g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(i_0)})$. Posons $I_n = g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(i_0)})$, $J_{n+1}^{(0)} = Q_s^{-1}(I_n)$.
Si $i_0 = 0$, on a $g_n = g_{n-1/J_{t(n)+1}}$, et $t(n+1) = t(n)+1$.
Si $i_0 \neq 0$, on a $g_n = g_{n-1} \circ \overline{g}_{t(n)+1}^{(i_0)}$, et $t(n+1) = t(t(n)+1, i_0)$.
4. Posons $\theta = +1$ ou $-1$ suivant que $g_{n-1}$ préserve ou renverse l'orientation. On a $k_{n+1} = k_{t(n)+1} - \theta i_0$. Pour $0 < i \leq k_{n+1}$, $J_{n+1}^{(-i)}$ et $J_{n+1}^{(i)}$ sont les deux composantes de $Q_s^{-1}(g_{n-1}(J_{t(n)+1}^{(j)}))$, avec $j = i_0 + \theta i$ et $J_{n+1}^{(i)} \subset [0,1]$. On a

$$\overline{g}_{n+1}^{(\pm i)} = (Q_s^{-1})^{\pm} \circ g_{n+1} \circ \overline{g}_{t(n)+1}^{(j)}, t(n+1, \pm i) = t(t(n)+1, j), \text{ si } j \neq 0,$$
$$\overline{g}_{n+1}^{(\pm i)} = (Q_s^{-1})^{\pm} \circ g_{n-1/J_{t(n)+1}}, t(n+1, \pm i) = t(n)+1, \qquad \text{si } j = 0.$$

### 5.4. Restrictions sur le paramètre

On impose au paramètre $s$ de vérifier la propriété suivante : il existe une suite d'entiers $n_0 < n_1 < \cdots$ satisfaisant à :

(i) $n_k + 2 \leq n_{k+1} \leq n_k + (\operatorname{Log} n_k)^3$ ;

(ii) pour $k \geq 1$ :

$$\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ n_\ell - n_{\ell-1} > \frac{n_0}{2}}} (n_\ell - n_{\ell-1}) < 2^{-\sqrt{n_0}} n_k ;$$

(iii) $t(n_k+1)=0$, $\forall k \geq 0$ ;

(iv) posons $L_k = g_{n_k}^{-1}(I_{n_{k+1}})$ et notons $g$ la branche de $(Q_s^{n_{k+1}-n_k})^{-1}$ qui est un difféomorphisme de $J_0$ sur $L_k$ (on a $g_{n_{k+1}} = g_{n_k} \circ g$) ; alors

$$|D \operatorname{Log} Dg(x)| < \frac{1}{100} \quad , \quad \forall x \in J_0 .$$

[On remarquera que cette condition est automatiquement vérifiée, pour $n_0$ assez grand, lorsque $n_{k+1} - n_k \leq \frac{n_0}{2}$.]

### 5.5. Branches régulières

Appelons branche admissible une composition

$$g = \overline{g}_{m_r}^{(i_r)} \circ \cdots \overline{g}_{m_1}^{(i_1)} \circ \overline{g}_{m_0}^{(i_0)}$$

telle que $t(m_0, i_0) = 0$, $t(m_\ell, i_\ell) < m_{\ell-1}$ pour $1 \leq \ell \leq r$ : les applications sont donc composables, et $g$ est un difféomorphisme de $J_0$ sur son image. Nous dirons que $g$ est *régulière* si on a :

$$|D \operatorname{Log} Dg(x)| < \frac{1}{100} \quad , \quad \forall x \in J_0 .$$

L'ordre de $g$ est $\sum_{\ell=0}^{r} (m_\ell - t(m_\ell, i_\ell))$.

*Lemme.— Supposons que le paramètre vérifie les hypothèses de* 5.4 *jusqu'à l'ordre* $n_k$. *Soit* $m$ *un entier dans* $[4, n_k]$. *Les points de* $J_0$ *qui n'appartiennent à l'image d'aucune branche régulière d'ordre* $\leq m$ *forment une partie dont la mesure de Lebesgue n'excède pas* $2^{-\sqrt{m}}$.

[On remarquera que, pour $n_0$ assez grand, les branches $\overline{g}_n^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, $2 \leq n \leq \frac{n_0}{2}$, sont régulières.]

### 5.6. Fin de la démonstration

Pour presque tout point $x \in J_0$, on peut grâce au lemme construire une suite d'entiers $m_0(x) = 0 < m_1(x) < \cdots < m_k(x) < \cdots$ vérifiant pour $k$ assez grand (dépendant de $x$) les propriétés :

(i) $m_k(x) + 2 \leq m_{k+1}(x) \leq m_k(x) + (\operatorname{Log} m_k(x))^3$ ;

(ii) $$\sum_{\substack{1\le\ell\le k\\ m_\ell(x)-m_{\ell-1}(x)>\frac{n_0}{2}}} (m_\ell(x)-m_{\ell-1}(x)) < 2^{-\frac{1}{2}\sqrt{n_0}} m_k(x);$$

(iii) le point $Q_s^{m_r(x)}(x)$ appartient, pour tout $r \geq 0$, à l'image d'une branche régulière d'ordre $m_{r+1}(x) - m_r(x)$.

Soit alors $1 < \lambda < 2$ ; pour $n_0$ assez grand, les branches régulières $\overline{g}_n^{(\varepsilon)}$, $2 \leq n \leq \frac{n_0}{2}$, vérifient :

$$|D\,\overline{g}_n^{(\varepsilon)}(y)| \leq (\sqrt{2\lambda})^{-n} \quad , \quad \forall y \in J_0\,.$$

Les conditions (i), (ii) ci-dessus impliquent alors, pour presque tout $x \in J_0$ et pour $m$ assez grand (dépendant de $x$) :

$$|D\,Q_s^m(x)| \geq \lambda^m$$

(pour $n_0 = n_0(\lambda)$ assez grand.

Les autres assertions du théorème 1 (en particulier, le fait que l'ensemble des valeurs du paramètre satisfaisant aux conditions de 5.4 soit de mesure de Lebesgue positive) résultent aussi, avec un peu plus de travail, de l'estimation de distortion donnée par le lemme de 5.5.

## 6. QUELQUES REMARQUES SUR LES DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES 2 ET 3

**6.1.** La démonstration du théorème 2 ne diffère pas, dans son principe, de cette théorème 1. Il faut remplacer les arguments d'une variable réelle (basés sur l'ordre de $\mathbf{R}$) par des arguments d'une variable complexe (essentiellement tirés de la théorie des fonctions univalentes). Par ailleurs, il faut contrôler simultanément les orbites de plusieurs points critiques, ce qui complique un peu la partie combinatoire de la démonstration.

**6.2.** Par rapport aux situations considérées dans les théorèmes 1 et 2, celle du théorème 3 présente des difficultés supplémentaires considérables.

**6.2.1.** Points "critiques"

Il s'agit des points (de la variété instable du point fixe $p_{a,b}$) dont on veut éviter, par un choix adéquat des paramètres, qu'ils reviennent trop vite ou trop souvent près d'eux-mêmes, car cela impliquerait la présence d'une orbite périodique attractive (ce qu'on cherche à éviter).

Dans le cadre des théorèmes 1 et 2, ces points sont simplement les points critiques de l'application considérée, donc définis *a priori* par les propriétés locales de ces applications.

La famille de Hénon étant composée de difféomorphismes, une telle définition *a priori* n'existe pas pour le théorème 3 : en fait, les points critiques ne sont précisément définis par Benedicks et Carleson que pour les valeurs du paramètre qui satisfont à la conclusion du théorème 3.

À une étape donnée de la récurrence (sur le nombre d'itérations $n$ considéré), on ne dispose que d'une approximation de ces points critiques : par l'hypothèse de récurrence, on a $\|DP^n_{a,b}(z)\| \geq 1$ (par exemple) aux points considérés ; comme le jacobien de $P_{a,b}$ est partout égal à $-b$, il existe une direction contractée par $DP^n_{a,b}(z)$ d'un facteur $\leq |b|^n$, et le point $z = (x, y)$ est une *approximation critique* d'ordre $n$ si $|x| < \delta \ll 1$ et la direction contractée est *tangente* en $z$ à $W^u(p_{a,b})$.

Le nombre d'approximations critiques d'ordre donné est fini, mais croît avec l'ordre (exponentiellement) : on doit créer de nouvelles approximations critiques pour contrôler les retours dans la région $\{|x| < \delta\}$ d'anciennes approximations critiques. Ceci se fait par une construction assez compliquée.

**6.2.1.** Plis

La figure 4 montre le point de départ de la construction.

**Figure 4**

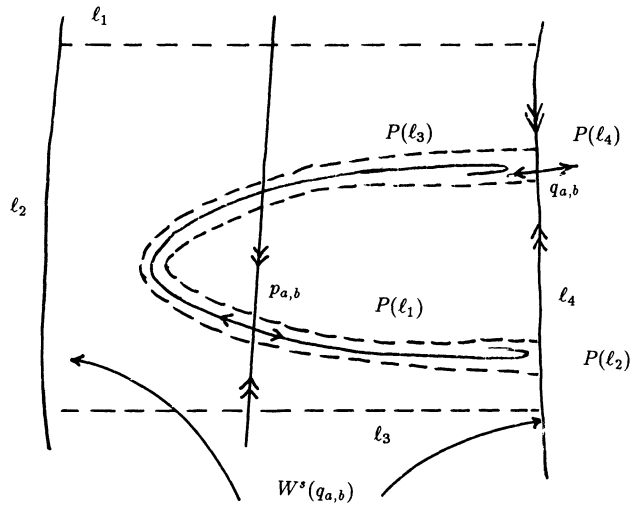
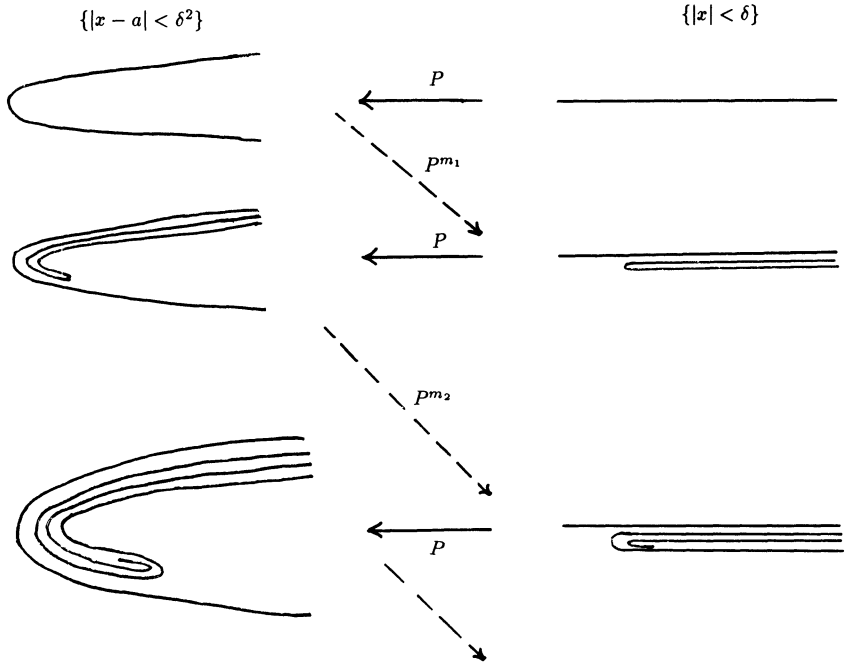



**Figure 5**



Bien que la récurrence ne donne pas beaucoup d'informations sur la géométrie globale de $W^u(p_{a,b})$, il faut un minimum de contrôle sur cette géométrie pour que la récurrence puisse fonctionner : il faut contrôler les plis dans les plis dans les plis... (Figure 5). En effet, l'hypothèse de récurrence garantit l'expansion des vecteurs horizontaux, mais un retour dans la zone $\{|x| < \delta\}$ transforme un vecteur horizontal en un vecteur "oblique". La solution adoptée par Benedicks et Carleson consiste à casser ce vecteur "oblique" en ses composantes verticales et horizontales, à les itérer séparément un certain temps (au bout duquel la composante horizontale a augmenté tandis que la composante verticale a été fortement contractée) puis les remettre ensemble ; mais entretemps, un autre retour peut avoir lieu...

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. JAKOBSON - *Topological and metric properties of 1-dimensional endomorphisms*, Soviet Math. Dokl. **19** (1978), 1452-56.

[2] M. JAKOBSON - *Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys. **81** (1981), 39-88.

[3] M. BENEDICKS et L. CARLESON - *On iterations of* $1 - ax^2$ *on* $(-1, 1)$, Ann. Math. **122** (1985), 1-25.

[4] M. RYCHLIK - *A proof of Jakobson's theorem*, Erg. th. and dyn. syst. **8** (1988), 93-109.

[5] M. REES - *Positive measure sets of ergodic rational maps*, Ann. Sc. E.N.S. $4^e$ série **19** (1986), 383-407.

[6] M. HÉNON - *Numerical study of quadratic area preserving mappings*, Q. Appl. Math. **27** (1969), 291-312.

[7] M. HÉNON - *A 2-dimensional mapping with a strange attractor*, Comm. Math. Phys. **50** (1976), 69-77.

[8] M. BENEDICKS et L. CARLESON - *The dynamics of the Hénon map*, preprint (à paraître aux Ann. Math.).

[9] L. MORA et E. VIANA - *Abundance of strange attractors*, preprint IMPA (1989).

[10] D. RUELLE - *Repellors for real analytic maps*, Erg. th. and dyn. syst. **2** (1982), 99-107.

[11] M. MISIUREWICZ - *Absolutely continuous measures for certain maps of an interval*, Publ. Math. IHES **53** (1981), 17-51.

[12] D. SULLIVAN - *Quasi-conformal homeomorphisms* I : *solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*, Ann. of Maths **122** (1985), 401-418.

[13] D. SULLIVAN - *Quasi-conformal homeomorphisms* II, III : *topological conjugacy classes of analytic endomorphisms*, Preprint IHES (1983).

[14] J.-C. YOCCOZ - *Sur la connexité locale des ensembles de Julia et du lieu de connexité des polynômes quadratiques*, en préparation.

[15] P. THIEULLEN, C. TRESSER et L.S. YOUNG - *Positive exponent for generic 1-parameter families of* $1 - d$ *maps*, en préparation.

[16] M. BENEDICKS et L.S. YOUNG - *Absolutely continuous invariant measures and random perturbations for certain one-dimensional maps*, preprint (1990).

[17] D. SULLIVAN - *On the structure of infinitely many dynamical systems nested inside or outside a given one*, Notes IHES (1990).

[18] D. SULLIVAN - *Bounded structure of infinitely renormalizable mappings*, in P. Cvitanovic (ed.), Universality in Chaos, $2^{d}$ edition, Adam Hilger, Bristol (1989).

[19] R. MAÑE, P. SAD et D. SULLIVAN - *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sc. E.N.S. **16** (1983), 193-217.

[20] E. FORNAESS et N. SIBONY - *Random iteration of rational functions*, à paraître dans Erg. th. and dyn. syst.

[21] S. FRIEDLAND et J. MILNOR - *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Erg. th. and dyn. syst. **9** (1989), 67-99.

[22] I.R. SHAFAREVICH - *On some infinite dimensional groups*, Rend. Mat. e Applic. (Roma) **25** (1966), 208-212.

[23] M. SHUB - *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, Astérisque **56** (1978).

[24] S. SMALE - *Differentiable dynamical systems*, B.A.M.S. **73** (1967), 747-.

[25] J. ROBBIN - *A structural stability theorem*, Ann. Math. **91** (1971), 447-.

[26] C. ROBINSON - *Structural stability of $C^1$-diffeomorphisms*, J. of diff. eq. **22** (1976), 28.

[27] R. MAÑE - *A proof of the $C^1$-stability conjecture*, Publ. Math. IHES, **66** (1988), 161-210.

[28] J. PALIS - *On the $C^1$ $\Omega$-stability conjecture*, Publ. Math. IHES, **66** (1988), 211-215.

[29] C. PUGH - *An improved closing lemma and general density theorem*, Am. J. of Math. **89** (1967), 1010-.

[30] S. NEWHOUSE - *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ. math. IHES **50** (1979), 101-151.

[31] J. PALIS et F. TAKENS - *Homoclinic bifurcations : hyperbolicity, fractional dimensions and infinitely many attractors*, Cambridge Univers. Press, à paraître.

[32] S. NEWHOUSE, J. PALIS et F. TAKENS - *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publ. math. IHES **57** (1983), 5-71.

[33] J. PALIS et F. TAKENS - *Hyperbolicity and the creation of homoclinic orbits*, Ann. Math. **125** (1987), 337-374.

[34] R. PLYKIN - *On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades*, Russ. math. surveys **396** (1984), 85-131.

[35] A. DOUADY et J. HUBBARD - *On the dynamics of polynomial like mappings*, Ann. Sc. E.N.S. **18** (1985), 287-343.

Jean-Christophe YOCCOZ

Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY CEDEX