SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL DEMAZURE

Caractérisations de l'espace projectif (conjectures de Hartshorne et de Frankel)

Séminaire N. Bourbaki, 1981, exp. n° 544, p. 11-19

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__11_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
32e année, 1979/80, n° 544

544-01
Novembre 1979

CARACTÉRISATIONS DE L'ESPACE PROJECTIF
(CONJECTURES DE HARTSHORNE ET DE FRANKEL)
d'après Shigefumi MORI [6].

par Michel DEMAZURE

§ 1. Les énoncés.

THÉORÈME 1 ("Conjecture de Hartshorne") .- Soient k un corps algébriquement clos, X une variété algébrique définie sur k, projective, lisse et irréductible. Si le fibré tangent à X est ample, X est isomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$, $n = \dim(X)$.

THÉORÈME 2 ("Conjecture de Frankel") .- Soit V une variété kaehlérienne compacte connexe. Si la courbure bisectionnelle holomorphe de V est > 0, V est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, $n = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Ce qu'il faut savoir sur les fibrés vectoriels amples pour comprendre le théorème 1 est rappelé au § 2 ; au § 3, on explique les rapports entre l'amplitude et la courbure, et on déduit le théorème 2 du théorème 1 ; au § 7, on donne des détails complémentaires sur le théorème 2.

Le reste de l'exposé est consacré à la démonstration donnée par Mori du théorème 1. Le point central de cette démonstration est l'étude des morphismes de $\mathbf{P}^1_k$ dans X ; elle est valable en toutes caractéristiques et un passage essentiel utilise une réduction modulo p.

Le théorème 1 est élémentaire lorsque $n = 1$; on peut le démontrer par les moyens du bord lorsque $n = 2$ (R. Hartshorne [3]), le cas $n = 3$ a été traité par T. Mabuchi, S. Mori et H. Sumihiro ([5] et [7]) ; le cas général est dû à S. Mori; voir le § 7 en ce qui concerne l'historique du théorème 2.

On désigne par k un corps algébriquement clos, et on écrit $\mathbf{P}^n$ au lieu de

$\mathbb{P}^n_k$, etc. On appelle courbes d'une variété algébrique projective les sous-variétés fermées qui sont des courbes (donc des courbes complètes).

§ 2. Fibrés vectoriels amples.

Soit X une variété algébrique sur k. Un fibré en droites $L \to X$ est dit très ample s'il existe des sections $s_0, \ldots, s_n$ de L sur X telles que $x \mapsto (s_0(x) : \ldots : s_n(x))$ soit un plongement de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. On dit que L est ample si une puissance tensorielle convenable $L \otimes \ldots \otimes L$ est très ample.

Soit maintenant $E \to X$ un fibré vectoriel. Notons $P^\bullet(E)$ le fibré projectif dont l'espace total est l'ensemble des hyperplans des fibres de E (c'est le P(E) des géomètres algébristes), et $L^\bullet(E)$ le fibré en droites sur $P^\bullet(E)$ dont la fibre au-dessus du point $H \subset E_x$ est la droite E_x/H. Notons de même $P_\bullet(E)$ le fibré projectif dont l'espace total est l'ensemble des droites des fibres de E (c'est le P(E) des géomètres différentiels), et $L_\bullet(E)$ le fibré en droites canonique. Naturellement, $P_\bullet(E)$ s'identifie à $P^\bullet(E^*)$ et $L_\bullet(E)$ au dual de $L^\bullet(E^*)$. On dit avec Hartshorne ([2]) que E est ample si $L^\bullet(E)$ est ample sur la variété $P^\bullet(E)$; lorsque E est un fibré en droites, $P^\bullet(E)$ s'identifie à X et $L^\bullet(E)$ à E.

Des propriétés connues des fibrés en droites amples, on déduit plus ou moins aisément (voir [2]) :

a) tout quotient d'un fibré vectoriel ample est ample ;

b) une somme directe de fibrés amples est ample ;

c) la restriction d'un fibré ample à une sous-variété est ample ;

d) si E est ample et de rang r, le fibré en droites $\Lambda^r E$ est ample ;

e) soient C une courbe réduite, $f : \tilde{C} \to C$ sa normalisation et E un fibré vectoriel sur C ; alors E est ample si et seulement si $f^* E$ est ample.

Donnons deux exemples fondamentaux :

f) prenons $X = \mathbb{P}^n = P^\bullet(k^{n+1} \to \bullet)$, et notons traditionnellement $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droites canonique $L^\bullet(k^{n+1} \to \bullet)$; alors $\mathcal{O}(1)$ est par définition (très) ample, ainsi que ses puissances tensorielles $\mathcal{O}(k)$, $k > 0$. On a une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{n+1} \longrightarrow T_X \longrightarrow 0 \quad ,$$

et le fibré tangent à X est ample d'après a) et b).

g) prenons $X = \mathbb{P}^1$. D'après Grothendieck, tout fibré vectoriel E sur X est somme directe de fibrés en droites, donc est isomorphe à

$$\mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(n_r) \quad ,$$

pour une suite d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r$, $r = \operatorname{rg} E$, uniquement déterminée. D'après a) et b), E est ample si et seulement si $n_r > 0$. On notera en passant que $\deg(E) = \deg(\Lambda^r E) = n_1 + \ldots + n_r$, donc que $\deg(E) \geq r$ si E est ample.

§ 3. Fibrés amples et courbure.

Soient V une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur V et h une métrique hermitienne sur E. Il existe sur E une unique connexion $(X,s) \mapsto \nabla_X s$ (X champ de vecteurs sur V, s section de E) telle que : 1) $\nabla_X s = 0$ si X est de type (0,1) et s holomorphe, 2) la métrique hermitienne h de E est parallèle. Elle est donnée par $\langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle = X \cdot \langle s_1, s_2 \rangle$ pour s_1 et s_2 holomorphes. La forme de courbure correspondante est de type (1,1) et à valeurs dans le fibré en algèbres de Lie $\underline{u}(E)$; en coordonnées locales holomorphes, elle a des composantes $R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}$; $\alpha,\beta = 1,\ldots,n$; $i,j = 1,\ldots,r$. On dit que (E,h) est à courbure > 0 (resp. < 0) si $-\sum R_{\alpha\bar{\beta}i\bar{j}}\, \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta u^i \bar{u}^j$ est > 0 (resp. < 0) pour $(\xi^\alpha) \neq (0)$, $(u^i) \neq (0)$.

PROPOSITION 1 .- *Si le fibré vectoriel holomorphe* E *sur* V *possède une métrique hermitienne à courbure* > 0, *il en est de même du fibré en droites* $\Lambda^r E$ *sur* V *et du fibré en droites* $L^\bullet(E)$ *sur* $P^\bullet(E)$.

La première assertion se démontre par un calcul immédiat. Par ailleurs, $P^\bullet(E)$ s'identifie au fibré $P_\bullet(E^*)$ des droites de E^* et $L^\bullet(E)$ au dual du fibré naturel $L_\bullet(E^*)$ sur $P_\bullet(E^*)$. Le complémentaire de la section nulle de E^* s'identifie au complémentaire de la section nulle de $L_\bullet(E^*)$. De la métrique h^* sur E^* duale de la métrique donnée sur E, on déduit alors une métrique $\tilde{h}^*$ sur $L_\bullet(E^*)$. Mais h^* est à courbure < 0 et on vérifie ([4], proposition 6.3) que cela implique que $\tilde{h}^*$ est à courbure < 0 ; la métrique duale sur $L^\bullet(E)$ est alors à courbure > 0.

PROPOSITION 2 .- *Supposons que* V *soit compacte et que* E *possède une métrique hermitienne à courbure* > 0. *Alors* V *est projective, donc algébrique,* E *est algébrique, et le fibré algébrique* $E \to V$ *est ample*.

D'après la proposition 1, le fibré $\Lambda^r E$ est à courbure > 0. Le théorème de plongement de Kodaira implique alors que les sections d'une puissance tensorielle convenable de $\Lambda^r E$ permettent de plonger V dans un espace projectif. Donc V

est algébrique (Chow), et E est algébrique (Serre). De nouveau d'après la proposition 1 et le théorème de Kodaira, $L^{\bullet}(E)$ est ample sur $P^{\bullet}(E)$, donc E est ample.

Nous pouvons maintenant déduire le théorème 2 du théorème 1. Soit donc V une variété kæhlérienne compacte connexe ; son fibré tangent T_V est muni d'une structure hermitienne canonique h, et dire que (T_V,h) est à courbure > 0 signifie exactement que V est à courbure bisectionnelle holomorphe > 0. D'après la proposition 2, V est alors algébrique projective et T_V ample ; le théorème 1 permet alors de conclure.

Remarquons d'ailleurs que la courbure bisectionnelle holomorphe est > 0 dès que la courbure sectionnelle riemannienne usuelle est > 0, et donc que le théorème 2 s'applique au cas où la courbure sectionnelle de V est > 0.

§ 4. Espaces de courbes.

Retournons au cas d'un corps de base général k algébriquement clos.

Soient X une variété projective et lisse de dimension n, C une courbe projective lisse et irréductible, de genre g, D un diviseur positif sur C, considéré comme un sous-schéma fini de C et $i : D \to X$ un morphisme. D'après Grothendieck, il existe un schéma paramétrisant les morphismes de C dans X, donc aussi un schéma (sous-schéma fermé du précédent) $\mathrm{Mor}(C,X;i)$ paramétrisant les morphismes de C dans X prolongeant i.

Notons T_X le fibré tangent à X, $K_X^* = \Lambda^n T_X$ son fibré en droites anticanonique et soit $f : C \to X$ un point rationnel de $M = \mathrm{Mor}(C,X;i)$. On pose $(f(C) \cdot K_X^*) = \deg_C(f^* K_X^*)$.

PROPOSITION 3 .- a) <u>L'espace tangent à</u> M <u>au point</u> f <u>s'identifie à</u> $H^0(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$.

b) <u>La dimension de</u> M <u>au point</u> f <u>est au moins égale à</u> $n(1 - g - \deg(D)) + (f(C) \cdot K_X^*)$.

c) <u>Si</u> $H^1(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = 0$, <u>le schéma</u> M <u>est lisse en</u> f <u>de dimension</u> $n(1 - g - \deg(D)) + (f(C) \cdot K_X^*)$.

Les techniques usuelles de calcul infinitésimal montrent que l'espace tangent de M en f s'identifie à $H^0(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$, tandis que les obstructions aux prolongements de déformations se trouvent dans $H^1(C, f^* T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$. Par ailleurs,

---

• C'est le moment de dire que les conventions de signe sur la forme de courbure ont été choisies pour qu'il en soit ainsi !

$$h^0(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) - h^1(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = \chi(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D))$$

$$= n(1-g) + \deg \Lambda^r(f^*T_X \otimes \mathcal{O}(-D)) = n(1-g) + (f(C) \cdot K_X^*) - n \deg (D) \quad .$$

On conclut alors à la façon usuelle. Voir [6], § 1, pour une démonstration détaillée d'un énoncé plus général.

§ 5. Existence de courbes rationnelles.

Le premier résultat fondamental de l'article de Mori est :

THÉORÈME 3 .- Soit X une variété projective et lisse, de dimension $n > 0$, dont le fibré anticanonique K_X^* est ample. Alors X possède une courbe rationnelle C telle que $(C \cdot K_X^*) \leq n+1$.

1er pas : Si X possède une courbe rationnelle C avec $(C \cdot K_X^*) > n+1$, elle possède une courbe rationnelle C_1 avec $(C_1 \cdot K_X^*) < (C \cdot K_X^*)$.

Soient x et y deux points rationnels de $\mathbb{P}^1$ et $f : \mathbb{P}^1 \to C$ un morphisme envoyant x et y sur deux points lisses et distincts de C. Considérons le schéma $M = \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; i)$ avec $i = f|\{x,y\}$. On a $\dim_f M \geq -n + (C \cdot K_X^*) > 1$ (proposition 3), tandis que l'orbite de f sous le stabilisateur de $\{x,y\}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est au plus de dimension 1 ; il existe donc une courbe lisse D et un morphisme $\alpha : D \to M$ dont l'image contient f et n'est pas contenue dans cette orbite. Notons $\overline{D}$ une compactification de D et $\varphi : \mathbb{P}^1 \times D \to X \times \overline{D}$ le morphisme $(z,d) \to (\alpha(d)z, d)$, et soit S la normalisée de la surface $\varphi(\mathbb{P}^1 \times D)$. Les fibres générales de $S \to \overline{D}$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1$; de l'existence des deux sections $\overline{D} \to S$ associées aux points x et y, et qui se contractent par le morphisme naturel de S dans X, Mori déduit que $S \to \overline{D}$ possède des fibres singulières, qui sont donc réunion de courbes rationnelles. Cela entraîne l'existence d'une déformation de C, réunion de courbes rationnelles $C_1, \ldots, C_m$, $m \geq 2$. On a $(C \cdot K_X^*) = \Sigma (C_i \cdot K_X^*) > (C_1 \cdot K_X^*)$ (puisque K_X^* est ample), d'où le résultat annoncé.

2ème pas : Si k est de caractéristique $p \neq 0$, X possède une courbe rationnelle.

Soit Y une courbe irréductible sur X ; on a $(Y \cdot K_X^*) > 0$. Soient $g : \tilde{Y} \to Y$ la normalisation de Y, q une puissance de p, et $F^q : \tilde{Y}^{(q)} \to \tilde{Y}$ le morphisme de Frobenius. Posons $\tilde{Y}^{(q)} = C$ et notons $f : C \to X$ le morphisme déduit de $g \circ F^q$. Fixons un point $P \in C(k)$, et considérons le schéma $M = \mathrm{Mor}(C, X; f|P)$. Alors (prop. 3), on a $\dim_f M \geq -n\, g(C) + q\,(Y \circ K_X^*)$. Pour q assez grand, il existe donc une courbe lisse Γ et un morphisme fini $\varphi : \Gamma \to M$ tel que $f \in \varphi(\Gamma)$; on a $\varphi(\gamma)(P) = f(P)$ pour tout

$\gamma \in \Gamma$. Si Γ était complète, on aurait $\varphi(\gamma) = f$ pour tout γ d'après le théorème de rigidité, ce qui n'est pas. Si $\overline{\Gamma}$ est une compactification de Γ, l'application rationnelle $(\gamma, x) \mapsto \varphi(\gamma)(x)$ de $\overline{\Gamma} \times C$ dans X n'est pas partout définie. Cela implique l'existence d'une courbe rationnelle sur X (lever l'indétermination par éclatements et considérer la dernière courbe exceptionnelle obtenue).

3ème pas : Réduction à la caractéristique p.

La cause est donc entendue si k est de caractéristique $\neq 0$. Supposons k de caractéristique 0. Il existe un sous-anneau A de k, de type fini sur $\mathbb{Z}$, et un modèle X_A de X sur A lisse et projectif, de faisceau anticanonique relatif A-ample. Il existe alors (Grothendieck) un A-schéma quasi-projectif T "paramétrant les morphismes $f : \mathbb{P}^1 \to X_A$ tels que $0 < (f \cdot K^*_{X_A/A}) \leq n+1$". Puisque T possède des points fermés au-dessus de tous les points fermés de Spec(A), $T \otimes_A k$ est non vide, d'où le théorème.

COROLLAIRE .- Soit X une variété projective et lisse, de dimension $n > 0$, dont le fibré tangent est ample.

a) Pour toute courbe rationnelle C de X, on a $(C \cdot K^*_X) \geq n+1$.

b) X possède des courbes rationnelles C telles que $(C \cdot K^*_X) = n+1$.

c) Soit C une courbe rationnelle de X telle que $(C \cdot K^*_X) = n+1$, et soit $f : \mathbb{P}^1 \to X$ la normalisation de C. Alors f est non ramifié et f^*T_X est isomorphe à $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{n-1}$.

Puisque K^*_X est ample (§ 2, d)), la partie b) résulte de a) et du théorème 3. Soient C une courbe rationnelle de X et $f : \mathbb{P}^1 \to X$ la normalisation de C ; alors f^*T_X est ample sur $\mathbb{P}^1$ (§ 2, a) et e)), donc de la forme $\mathcal{O}(r_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(r_n)$ avec $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n > 0$ (§ 2, g)), avec $r_1 + \ldots + r_n = (C \cdot K^*_X)$. Par ailleurs, le morphisme canonique $\lambda : T_{\mathbb{P}^1} \to f^*T_X$ est non nul ; puisque $T_{\mathbb{P}^1}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$, cela impose $r_1 \geq 2$; si $r_1 = 2$, alors λ est injectif. Le corollaire résulte aussitôt de là.

§ 6. Démonstration du théorème 1.

On considère donc une variété X projective, lisse et irréductible de dimension $n \geq 1$, dont le fibré tangent est lisse, et on choisit (§ 5, corollaire) un morphisme $f_o : \mathbb{P}^1 \to X$ tel que $f_o^*(K^*_X) \simeq \mathcal{O}(n+1)$. Si $n = 1$, f_o est un isomorphisme. Supposons donc $n \geq 2$.

La variété auxiliaire V.

Fixons un point $a_o \in \mathbb{P}^1(k)$ tel que $f_o(\mathbb{P}^1)$ soit lisse au point $x_o = f_o(a_o)$ et soit V la composante connexe de f_o dans $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; f_o|(a_o))$. Pour tout $f \in V$,

on a $f^*(K_X^*) \simeq \mathcal{O}(n+1)$, donc d'après le § 5, corollaire, $f^*(T_X) \simeq \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(1)^{n-1}$. Cela implique $H^1(f^*(T_X) \otimes \mathcal{O}(-a_o)) \simeq H^1(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{n-1}) = 0$, et V est lisse de dimension $n+1$ (loc. cit.).

Notons G le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{PGL}_2$ fixant a_o ; il est isomorphe au groupe affine $\mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$ et opère librement à droite dans V de façon naturelle.

L'isomorphisme $V/G \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.

Fixons un vecteur tangent ∂ non nul dans $T_{\mathbb{P}^1, a_o}$ et notons φ le morphisme $V \to T_{\mathbb{P}^1, a_o}$ qui à f dans V associe l'image de ∂ par $Tf(a_o) : T_{\mathbb{P}^1, a_o} \to T_{X, x_o}$. Il est invariant par le sous-groupe $\mathbb{G}_a$ de G et prend ses valeurs dans le complémentaire de l'origine ; il est équivariant sous l'action de $\mathbb{G}_m$ et définit par passage au quotient un morphisme

$$\theta : V \longrightarrow P_\bullet(T_{\mathbb{P}^1, a_o}) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

invariant par G. Les fibres non vides de θ sont lisses de dimension 2 ; en effet, cela revient à dire que, pour tout $f \in V(k)$, $\varphi^{-1}(\varphi(f))$ est lisse de dimension 1 ; or, $\varphi^{-1}(\varphi(f))$ s'identifie à la trace de V sur $\mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, C; f|_{2(a_o)})$, qui est lisse de dimension 1 d'après le proposition 3 (noter que $f^*(T_X) \otimes \mathcal{O}(-2a_o) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}(-1)^{n-1}$). Par conséquent, les fibres de θ sont lisses et réunions disjointes d'orbites de G. De là, de la simple connexité de $\mathbb{P}^{n-1}$, et d'un certain nombre d'arguments que je n'ai pas la patience de recopier ici, Mori déduit que θ identifie $P_\bullet(T_{\mathbb{P}^1, a_o})$ au quotient de V par G.

Le morphisme $\pi : V \times^G \mathbb{P}^1 \to X$.

Considérons le produit contracté $V \times^G \mathbb{P}^1$ quotient de $V \times \mathbb{P}$ par l'action de G telle que $g(f,a) = (f \circ g^{-1}, g(a))$; c'est un fibré à fibre $\mathbb{P}^1$ sur V/G, localement trivial puisqu'il possède une section S donnée par le point $a_o \in \mathbb{P}^1(k)$ qui est fixe sous G. Le morphisme $(f,a) \mapsto f(a)$ de $V \times \mathbb{P}^1$ dans X passe au quotient et définit un morphisme propre $\pi : V \times^G \mathbb{P}^1 \to X$ qui envoie S sur $x_o \in X(k)$. Soit $a \in \mathbb{P}^1(k)$ distinct de a_o. Notons λ_a le morphisme $f \mapsto f(a)$ de V dans X ; on a $\lambda_a^{-1}(\lambda_a(f)) = V \cap \mathrm{Mor}(\mathbb{P}^1, X; f|_{(a)+(a_o)})$ et, par le même calcul que plus haut, on vérifie que les fibres de λ_a sont lisses de dimension 1. Il en résulte que π est étale en dehors de S.

Posant $Y = V/G$, $Z = V \times^G \mathbb{P}^1$, on est ainsi ramené à prouver le lemme suivant :

LEMME .- Soient X et Z deux variétés projectives lisses et irréductibles, $Y = \mathbb{P}^{n-1}$, $\pi : Z \to X$ et $\psi : Z \to Y$ deux morphismes, et $\sigma : Y \to Z$ une section de ψ. On suppose que ψ est une fibration à fibres $\mathbb{P}^1$, que π est étale sur $Z - \sigma(Y)$ et que π contracte $\sigma(Y)$ en un point x_o de X. Alors X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$ et π est l'éclatement du point x_o.

Considérons la factorisation de Stein $Z \xrightarrow{\pi'} X' \xrightarrow{u} X$ de π. Alors π' contracte $\sigma(Y)$ en un point x'_o de X' et applique isomorphiquement $Z - \sigma(Y)$ sur $X' - \{x'_o\}$. Par ailleurs, le morphisme u est fini et est étale au-dessus de $X - \{x_o\}$; d'après le théorème de pureté du lieu de ramification, u est donc étale et fini. Si X' est isomorphe à $\mathbb{P}^n$ (donc simplement connexe), u est un revêtement galoisien, nécessairement trivial puisque tout automorphisme de $\mathbb{P}^n$ a un point fixe, donc X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$. Ceci nous ramène à démontrer le lemme lorsque $X = X'$, c'est-à-dire lorsque π applique isomorphiquement $Z - \sigma(Y)$ sur $X - \{x_o\}$.

Soient L une droite et H un hyperplan de $Y \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ tels que $L \not\subset H$, donc $(H \cdot L) = 1$. Posons $D = \psi^{-1}(H) \in \mathrm{Div}(Z)$ et $C = \sigma(L) \subset Z$, de sorte que $(D \cdot C) = 1$. Puisque $x_o \in \pi(D)$, on a $\pi^{-1}(\pi(D)) = D + a\,\sigma(Y)$ avec $a \in \mathbb{N}$, et la formule de projection donne

$$0 = (\pi(D) \cdot \pi(C)) = (\pi^{-1}(\pi(D)) \cdot C) = 1 + a(\sigma(Y) \cdot C) \quad .$$

Cela implique $(\sigma(Y) \cdot C) = -1$, et le fibré normal à $\sigma(Y)$ dans Z est $\mathcal{O}_{\sigma(Y)}(-1)$. De la suite exacte de $\mathcal{O}_Z$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_Z(\sigma(Y)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\sigma(Y)}(-1) \longrightarrow 0$$

on tire la suite exacte de $\mathcal{O}_Y$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \psi_*(\mathcal{O}_Z(\sigma(Y))) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-1) \longrightarrow 0 \quad ,$$

de sorte que $\psi_*(\mathcal{O}_Z(\sigma(Y)))$ s'identifie à $\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1)$ et Z à $\mathbb{P}^*(\mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y(-1))$. En définitive Z s'identifie à l'éclaté de $\mathbb{P}^n$ en un point, et il existe un morphisme $\psi' : Z \to \mathbb{P}^n$ qui contracte $\sigma(Y)$ en un point p_o et induit un isomorphisme de $Z - \sigma(Y)$ sur $\mathbb{P}^n - \{p_o\}$. L'application birationnelle bijective $\psi' \circ \psi^{-1} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ est un isomorphisme (théorème principal de Zariski), d'où le lemme et le théorème.

§ 7. Compléments.

Le théorème 2 a été démontré de façon indépendante par Y.T. Siu et S.T.

Yau [9] (il avait été démontré précédemment par A. Andreotti et T. Frankel [1] pour n = 2, et T. Mabuchi [5] pour n = 3). Dans cette démonstration, les applications harmoniques de S^2 dans V jouent un rôle parallèle à celui des morphismes de P^1 dans X dans la démonstration de Mori.

Par ailleurs, le cas n = 1 suggère une conjecture "duale" : une variété kählérienne compacte à courbure sectionnelle > 0 a comme revêtement universel la boule de C^n. Une classe de contre-exemples en dimension 2 vient d'être construite par G. Mostow et Y.T. Siu [8], en utilisant un réseau non arithmétique dans $SU(2,1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.T. FRANKEL, Manifolds with positive curvature, Pacific J. Math., 11 (1961), 165-174.

[2] R. HARTSHORNE, Ample vector bundles, Pub. Math. IHES, 29 (1966), 63-94.

[3] R. HARTSHORNE, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Maths., 156, Springer-Verlag (1970).

[4] S. KOBAYASHI and T. OCHIAI, On complex manifolds with positive tangent bundles, J. Math. Soc. Japan 22 (1970), 499-525.

[5] T. MABUCHI, C^3-actions and algebraic threefolds with ample tangent bundle, Nagoya Math. J. 69 (1978), 33-64.

[6] S. MORI, Projective manifolds with ample tangent bundles, à paraître.

[7] S. MORI and H. SUMIHIRO, On Hartshorne's conjecture, J. Math. Kyoto U., 18-3 (1978), 523-533.

[8] G. MOSTOW and Y.T. SIU, A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball, à paraître.

[9] Y.T. SIU and S.T. YAU, Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, à paraître.

Michel DEMAZURE

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F91128 Palaiseau Cedex