

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE DELIGNE

## Les difféomorphismes du cercle

*Séminaire N. Bourbaki*, 1977, exp. n° 477, p. 99-121

<[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1975-1976\\_\\_18\\_\\_99\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__99_0)>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE

[d'après M. R. HERMAN]

par Pierre DELIGNE

Soit  $f$  un difféomorphisme, respectant l'orientation, du cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Si le nombre de rotation  $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  de  $f$  est irrationnel (i.e. si  $f$  n'a pas de point périodique) et que la dérivée  $Df$  de  $f$  est à variation bornée (i.e. que la dérivée seconde  $D^2f$  - prise au sens des distributions - est une mesure), Denjoy a montré que  $f$  est topologiquement conjugué à la rotation  $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$  : il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , respectant l'orientation, tel que  $hfh^{-1} = R_\alpha$ . Cet homéomorphisme est unique à composition à gauche par une rotation près car le centralisateur d'une rotation irrationnelle est réduit aux rotations.

Il revient à peu près au même de prouver une propriété de régularité pour  $h$ , ou la même propriété, uniformément, pour tous les itérés  $f^n$  de  $f$ . Pour passer de  $h$  aux  $f^n$ , on écrit  $f^n = (h^{-1}R_\alpha h)^n = h^{-1}R_{n\alpha}h$ . Dans l'autre sens, il est utile de changer les notations et de passer au revêtement universel  $\mathbb{R}$  du cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  :  $f$  devient un difféomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$ ,  $h$  un homéomorphisme croissant de  $\mathbb{R}$ , défini à l'addition d'une constante près, ils sont tous deux de la forme  $x + \varphi(x)$  avec  $\varphi$  périodique de période 1, et  $hfh^{-1} = R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  (le nombre de rotation). Posons

$h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f^i - i\alpha$ . On verra que  $h$ , convenablement normalisé, est la limite

des  $h_n$  (3.1). Supposons maintenant que les  $f^n$  soient uniformément  $C^{r+\beta}$ , i.e. que  $f$  soit  $C^r$  et que les dérivées  $r$ -ièmes  $D^r f^n$  vérifient uniformément en  $n$  une condition de Hölder d'exposant  $\beta$  ( $0 < \beta \leq 1$ ) :

$$|D^r f^n(x) - D^r f^n(y)| \leq A|x - y|^\beta.$$

477-02

Les  $f^i - R_{i\alpha}$  vérifient la même condition, et sont de plus bornés (par un). De même pour les  $h_n - \text{Id}$ , qui en sont des barycentres. Les  $h_n - \text{Id}$  forment donc un ensemble relativement compact de fonctions sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , pour la topologie  $C^r$ , et on peut extraire de la suite des  $h_n$  une sous-suite convergente. La conjugaison  $h$  est donc  $C^r$ , et on vérifie par passage à la limite que  $D^r h$  vérifie la même condition de Hölder que les  $D^r f^n$ .

Herman a prouvé un théorème un peu meilleur que le suivant.

THÉORÈME.- Si le développement en fraction continue de  $\alpha$  est à coefficients bornés, et que  $f$  est  $C^\infty$ , alors  $h$  est  $C^\infty$ .

On montre d'abord (§§ 1 à 6) que, pour  $q$  parcourant les dénominateurs des réduites  $p_n/q_n$  du développement de  $\alpha$  en fraction continue,  $|Df^q|$  tend rapidement vers 0 (en  $1/q^\varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$ ). Un tel résultat est plausible : la rotation  $R_{q\alpha}$  est proche de l'identité, et  $f^q = h^{-1}R_{q\alpha}h$ .

On en déduit que  $h$  est  $C^{1+\varepsilon'}$ , avec  $\varepsilon' > 0$ , puis, du fait que  $f$  est  $C^{1+\varepsilon'}$  conjugué à  $R_\alpha$ , on déduit que les conjugués  $f_n = h_n f h_n^{-1}$  de  $f$  tendant vers  $R_\alpha$  dans une  $C^{2+\varepsilon''}$  topologie ( $\varepsilon'' > 0$ ) (§§ 7 et 8).

Un théorème de fonctions implicites de Arnold-Moser ([1], [3]), amélioré par Herman en s'inspirant de Rüssmann[4], montre enfin que si  $f$  est assez proche de  $R_\alpha$ , dans une  $C^{2+\varepsilon}$  topologie ( $\varepsilon > 0$ ), alors  $f$  est  $C^\infty$ -conjugué à une rotation.

#### Terminologie et notations

On note  $\|\psi\|_\infty$  et  $\|\psi\|_1$  les normes  $L^\infty$  et  $L^1$  d'une fonction  $\psi$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  :  $\sup|\psi(x)|$  et  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |\psi(x)| dx$ . Pour  $0 \leq \beta \leq 1$ , on note  $|\psi|_\beta$  sa norme höldérienne d'exposant  $\beta$

$$|\psi|_\beta = \sup_{x \neq y} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^\beta} .$$

On note  $\text{Var}(\psi)$  la variation totale de  $\psi$ . Si  $\psi$  est  $C^1$ , c'est  $\|D\psi\|_1$ .

$R_s =$  la "rotation"  $x \mapsto x + s$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un difféomorphisme croissant de la forme  $x + \varphi(x)$ , avec  $\varphi$  périodique de période 1. On note  $f^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) ses itérés. Par hypothèse,  $f$  et  $f^{-1}$  sont  $C^1$ ; on suppose de plus  $Df$  (donc  $\log Df$ ) à variation bornée.

$V = \text{Var}(\log Df)$ .

$\alpha =$  nombre de rotation de  $f$ . On a  $\|f^n - R_{n\alpha}\|_\infty < 1$ . On suppose  $\alpha$  irrationnel.

$\mu =$  la mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  invariante par  $f$ . Si  $h$  conjugue  $f$  en  $R_\alpha$ , il transforme  $\mu$  en  $dx$ :  $\mu = dh$  (dérivée au sens des distributions, ou intégrale de Stieltjes).

$h =$  l'homéomorphisme croissant de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  qui conjugue  $f$  en  $R_\alpha$ , normalisé par la condition que  $\int (h(x) - x)\mu = 0$ .

$h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f^i - i\alpha$ . C'est un barycentre de difféomorphismes croissants, donc

un difféomorphisme croissant. On a  $h = \lim h_n$  (3.1).

$f_n = h_n f h_n^{-1}$ .

Une approximation rationnelle de  $s \in \mathbb{R}$  est une fraction irréductible  $p/q$  telle que  $|s - p/q| < 1/q^2$ , i.e.  $|qs - p| < 1/q$ . Tout nombre irrationnel a une infinité d'approximations rationnelles (Dirichlet).

$q$  désigne le dénominateur d'une approximation rationnelle de  $\alpha$  (et  $p$  le numérateur).

### § 1. Première majoration de $|Df^n|$ ; inégalité de Denjoy-Koksma

**THÉORÈME 1.1 (Denjoy-Koksma).** - Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $m$  le dénominateur d'une approximation rationnelle de  $s$  et  $\psi$  une fonction à variation bornée sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . On a

$$\left| \sum_{i=0}^{m-1} \psi(x + is) - m \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(t) dt \right| \leq \text{Var}(\psi).$$

Par un changement de variable  $t \mapsto \pm (t - x)$ , on se ramène à supposer que  $x = 0$  et que  $n/m \leq s \leq n/m + 1/m^2$  (avec  $(n, m) = 1$ ). Pour  $0 \leq i \leq m-1$ , on a  $in/m \leq is < in/m + 1/m$ , et les  $in/m$  parcourent  $\frac{1}{m} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ . On a donc (les sommes vont de  $i = 0$  à  $i = m - 1$ )

$$\sum \psi(is) - m \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(x) dx = \sum (\psi(is) - m \int_{in/m}^{in/m + 1/m} \psi(x) dx)$$

et  $|\psi(is) - \int_{in/m}^{in/m + 1/m} \psi(x) \cdot (m dx)|$  est majoré par la variation de  $\psi$  entre  $in/m$  et  $in/m + 1/m$ , d'où le théorème.

Rappelons que la variation  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} |d\psi|$  est invariante par changement de variable. Prenons  $s = \alpha$ , et faisons le changement de variable qui conjugue la rotation  $R_\alpha$  en  $f$ ; il transforme  $dx$  en la mesure  $\mu$ , et on trouve

COROLLAIRE 1.2.- Pour  $\psi$  une fonction variation bornée sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on a

$$\left| \sum_{i=0}^{q-1} \psi \circ f^i - q \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(x) \mu \right| \leq \text{Var}(\psi).$$

1.3. On a  $Df^n = Df \circ f^{n-1} \cdot Df^{n-1} = Df \circ f^{n-1} \cdot Df \circ f^{n-2} \cdot \dots \cdot Df$ , d'où

$$(1.3.1) \quad \log Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} \log Df \circ f^i.$$

La majoration 1.2, pour  $\psi = \log Df$ , donne

$$\left| \log Df^q - q \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \log Df \cdot \mu \right| \leq V.$$

Si l'intégrale n'était pas nulle,  $\log Df^q$  tendrait uniformément vers  $\pm \infty$  pour  $q \rightarrow \infty$ , et  $Df^q$  tendrait uniformément vers 0 ou  $\infty$ . Puisque  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} Df^q(x) dx = 1$ , cela est absurde et on a

$$\text{COROLLAIRE 1.4} \quad \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \log Df \cdot \mu = 0.$$

$$\text{COROLLAIRE 1.5} \quad e^{-V} \leq Df^q \leq e^V \quad (\text{pour } |\alpha - P/q| < 1/q^2).$$

Remarque 1.6.— La méthode de démonstration du théorème 1.1 permet de prouver directement 1.2 pour tout homéomorphisme croissant  $f$  (et pour  $\mu$  une mesure invariante). Si  $V = \int |d \log Df| < \infty$ , on en déduit 1.5. Dans sa note [2], c'est à partir de 1.5 que Denjoy prouve que  $f$  est topologiquement conjugué à une rotation.

1.7. Soient  $s$  un nombre irrationnel,  $q_i$  ( $i \geq 0$ ) une suite croissante d'approximations rationnelles de  $s$  et  $a_i$  la partie entière de  $q_i/q_{i-1}$  ( $i \geq 1$ ). On suppose que  $q_0 = 1$ . Tout entier  $N < q_n$  peut s'écrire

$$N = \sum_{i < n} b_i q_i \quad \text{avec } b_i \leq a_{i+1} :$$

si  $n = 0$ , c'est clair ; si  $n > 0$ , on écrit  $N = b_{n-1} q_{n-1} + N'$  avec  $N' < q_{n-1}$  et on conclut par récurrence. La somme  $\sum_{i < N} \psi(x + is)$  se décompose alors en  $(\sum b_i)$  sommes partielles, chacune de longueur l'un des  $q_i$ , et (1.1) donne

$$(1.7.1) \quad \left| \sum_{i=0}^{N-1} \psi(x + is) - N \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(t) dt \right| \leq \sum b_i \cdot \text{Var}(\psi) \leq \sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \cdot \text{Var}(\psi),$$

et, pour  $s = \alpha$ , (1.2) et (1.3) donnent

$$(1.7.2) \quad \left\| \sum_{i=0}^{N-1} \psi \circ f^i - N \int \psi \mu \right\|_{\infty} \leq \sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \cdot \text{Var}(\psi)$$

$$(1.7.3) \quad \left\| \log Df^N \right\|_{\infty} \leq \sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \cdot V.$$

## § 2. Majoration de $|D^2 f^q|$

2.1. Dérivons deux fois la formule (1.3.1)

$$\log Df^n = \sum_{i < n} \log Df \circ f^i :$$

$$(2.1.1) \quad D \log Df^n = \sum_{i < n} D \log Df \circ f^i \cdot Df^i,$$

soit

$$(2.1.2) \quad D^2 f^n = Df^n \cdot \sum_{i < n} D \log Df \circ f^i \cdot Df^i$$

477-06

$$(2.1.3) \quad D^2 \log Df^n = \sum_{i < n} (D^2 \log Df \circ f^i \cdot (Df^i)^2 + D \log Df \circ f^i \cdot D^2 f^i) \\ = \sum_{i < n} D^2 \log Df \circ f^i \cdot (Df^i)^2 + \sum_{j < i < n} D \log Df \circ f^i \cdot Df^i \cdot D \log Df \circ f^j \cdot Df^j .$$

Dans le dernier terme, on reconnaît (Oh! miracle) les termes croisés du développement du carré du second membre de (2.1.1). Complétant le carré, on trouve

$$(2.1.4) \quad D^2 \log Df^n = \frac{1}{2} (D \log Df^n)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < n} (D \log Df \circ f^i \cdot Df^i)^2 + \\ + \sum_{i < n} D^2 \log Df \circ f^i \cdot (Df^i)^2 .$$

Si on majore dans (2.1.4) les  $|Df^i|$  par  $\sup_{i < n} \|Df^i\|_\infty$ , on trouve

$$(2.1.5) \quad \|D^2 \log Df^n\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|D \log Df^n\|_\infty^2 + \frac{1}{2} A_n \sup_{i < n} \|Df^i\|_\infty^2 ,$$

pour

$$(2.1.6) \quad A = \|D \log Df\|_\infty^2 + 2 \|D^2 \log Df\|_\infty .$$

2.2. D'après Hadamard, pour  $\psi$  une fonction  $C^2$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on a (cf. 7.1.4)

$$(2.2.1) \quad \|D\psi\|_\infty \leq (2 \|\psi\|_\infty \|D^2\psi\|_\infty)^{\frac{1}{2}} .$$

Supposons  $f \in C^3$ , et appliquons cette inégalité d'interpolation à  $\psi = \log Df^q$ , en tenant compte de (1.5) et (2.1.5) :

$$(2.2.2) \quad \|D \log Df^q\|_\infty \leq (V \|D \log Df^q\|_\infty^2 + qAV \sup_{i < q} \|Df^i\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Si  $V < 1$ , ceci fournit une estimation pour  $\|D \log Df^q\|_\infty$  (qui figure dans les deux membres de la formule) : élevant au carré, on trouve

$$\|D \log Df^q\|_\infty^2 \leq \frac{AV}{1-V} \cdot q \cdot \sup_{i < q} \|Df^i\|_\infty^2 .$$

Ecrivant que  $D \log Df^q = D^2 f^q / Df^q$ , et réappliquant 1.5, on trouve enfin le

**THÉORÈME 2.3.-** Supposons  $f \in C^3$ , et que  $V < 1$ . Soit  $B = \left( \frac{AV}{1-V} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^V$  où

A est défini par (2.1.6). Si q est le dénominateur d'une approximation ration-

nelle de  $\alpha$  , on a

$$\|D^2 f^q\|_\infty \leq B \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{i < q} \|Df^i\|_\infty .$$

Le gain essentiel dans cette majoration est qu'on a obtenu un facteur  $\sqrt{q}$  , plutôt que  $q$  .

§ 3.  $\text{Var}(\log Df_n)$  tend vers 0

Pour pouvoir appliquer 2.3, il est nécessaire de se ramener au cas où  $V < 1$  . Plus tard, pour contrôler les  $\|Df^i\|_\infty$  , ( $i < q$ ) , on aura même besoin de se ramener au cas où  $V$  est petit. Le résultat principal 3.3 de ce paragraphe le permettra.

PROPOSITION 3.1.- Les  $h_n$  convergent uniformément vers  $h$  .

Posons  $\psi(x) = h(x) - x$  . Par définition,  $h$  est normalisé de telle sorte que  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \psi(x) \mu = 0$  . La formule  $R_\alpha h = hf$  s'écrit  $h = h \circ f - \alpha =$

$f - \alpha + \psi \circ f$  . De même, puisque  $h$  conjugue  $f^i$  en  $R_{i\alpha}$  , on a

$h = f^i - i\alpha + \psi \circ f^i$  . Prenons la moyenne de ces identités, pour  $0 \leq i < n$  :

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i < n} (f^i - i\alpha) + \frac{1}{n} \sum_{i < n} \psi \circ f^i = h_n + \frac{1}{n} \sum_{i < n} \psi \circ f^i .$$

Il reste à montrer que  $\frac{1}{n} \sum_{i < n} \psi \circ f^i$  converge uniformément vers  $\int \psi \mu = 0$  .

On peut le déduire de 1.7 ( $\psi$  est de variation  $\leq 2$ ) , ou, par un changement de variable (par  $h$ ) ramener cette convergence à un théorème d'H. Weyl :

Rappel 3.2 (H. Weyl).- Soient  $\varphi$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  , et  $\alpha$  un nombre irrationnel. Les sommes  $S_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{i < n} \varphi(x + i\alpha)$  convergent uniformément vers  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \varphi(x) dx$  .

On le voit en approchant  $\varphi$  par des polynômes trigonométriques  $P$  . On vérifie directement que, pour un polynôme trigonométrique,  $S_n(P)$  tend vers  $\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} P(x) dx$  . Puisque  $|S_n(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty$  , on a donc



477-08

$$\begin{aligned} \limsup \left\| S_n(\varphi) - \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \varphi(x) dx \right\|_{\infty} &= \limsup \left\| S_n(\varphi - P) - \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} (\varphi(x) - P(x)) dx \right\|_{\infty} \\ &\leq 2 \|\varphi - P\|_{\infty}, \text{ arbitrairement petit.} \end{aligned}$$

**THÉORÈME 3.3.-** Si  $f$  est  $C^2$ , la variation  $V_n = \|D \log D f_n\|_1$  tend vers 0 pour  $n \rightarrow \infty$ .

Calculons  $Df_n$ . On a

$$\begin{aligned} h_n \circ f &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^{i+1} - i\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f^i - i\alpha) + \alpha \\ &= h_n + \alpha + \frac{1}{n} (f^n - x - n\alpha), \quad \text{d'où} \\ f_n &= R_{\alpha} + \frac{1}{n} (f^n - x - n\alpha) \circ h_n^{-1} \quad \text{et} \\ Df_n &= 1 + \left[ \frac{1}{n} (Df^n - 1) \cdot (Dh_n)^{-1} \right] \circ h_n^{-1} \end{aligned}$$

$$Df_n - 1 = \frac{Df^n - 1}{\sum_{i < n} Df^i} \circ h_n^{-1}.$$

Par ailleurs, puisque  $Df^n = Df \circ f^{n-1} \cdot Df^{n-1}$  et que  $(Df^{n-1})^{-1} \circ f^{1-n} = D(f^{1-n})$ ,

$$\frac{Df^n}{\sum_{i < n} Df^i} \circ f^{1-n} = \frac{Df}{\sum_{i < n} Df^i \circ f^{1-n} \cdot D(f^{1-n})} = \frac{Df}{\sum_{i < n} Df^{-i}}, \text{ soit}$$

$$(3.3.1) \quad Df_n - 1 = \left( \frac{Df}{\sum_{i < n} Df^{-i}} \circ f^{n-1} - \frac{1}{\sum_{i < n} Df^i} \right) \circ h_n^{-1}.$$

**Lemme 3.4.-** La somme  $\sum_{i < n} Df^i$  tend uniformément vers  $\infty$ .

Les  $Df^i$  sont en effet tous positifs, et une infinité d'entre eux est  $\geq e^{-V}$  (1.5). Appliquant ce lemme à  $f$  et  $f^{-1}$ , on déduit de 3.4 que

**Lemme 3.5.-** Les  $Df_n$  tendent uniformément vers 1 ; il revient donc au même de prouver que les  $V_n$  tendent vers 0, ou que la variation de  $Df_n$  tend vers 0.

La variation étant invariante par changement de variable, on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(Df_n) &= \text{Var}(Df_n - 1) \leq \text{Var}\left(\frac{Df}{\sum_{i < n} Df^{-i}}\right) + \text{Var}\left(\frac{1}{\sum_{i < n} Df^i}\right) \\ &= \left\| D \frac{Df}{\sum_{i < n} Df^{-i}} \right\|_1 + \left\| D \frac{1}{\sum_{i < n} Df^i} \right\|_1 \leq \\ &\left\| \frac{D^2 f}{\sum_{i < n} Df^{-i}} \right\|_1 + \|Df\|_\infty \left\| D \frac{1}{\sum_{i < n} Df^{-i}} \right\|_1 + \left\| D \frac{1}{\sum_{i < n} Df^i} \right\|_1 . \end{aligned}$$

D'après 3.4, la fonction dans le premier terme tend uniformément vers 0. Le théorème 3.1 résulte donc du résultat suivant appliqué à  $f$  et  $f^{-1}$ .

**THÉORÈME 3.6.-** Si  $f$  est  $C^2$ ,  $D\left(\frac{1}{\sum_{i < n} Df^i}\right)$  est uniformément borné, et tend presque partout vers 0. Cette fonction tend donc vers 0 en norme  $L_1$ .

Soit  $G$  l'automorphisme  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ .  $Df = f^*(\varphi dx)/dx$  de  $L^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ . Il respecte la norme  $L^1$  et transforme fonctions positives en fonctions positives. On peut donc lui appliquer le théorème ergodique de Chacon-Ornstein (voir par exemple, Garsia, Topics in almost everywhere convergence): pour tout  $\varphi$  dans  $L^1$ , les

$$\psi_n(\varphi) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(\varphi)}{\sum_{i=0}^{n-1} G^i(1)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \cdot Df^i}{\sum_{i=0}^{n-1} Df^i}$$

tendent presque partout vers une limite  $\psi(\varphi)$ .

On appliquera ce théorème à  $\varphi = D \log Df$ . On pose

$$\psi_n = \frac{\sum_{i < n} D \log Df \circ f^i \cdot Df^i}{\sum_{i < n} Df^i} ,$$

et on note  $\psi$  la limite presque sûre des  $\psi_n$ . Les  $|\psi_n|$ , donc  $|\psi|$ , sont majorés par  $\|D \log Df\|_\infty$ .

477-10

Lemme 3.7.-  $D \left( \frac{1}{\sum_{i < n} Df^i} \right)$  est uniformément borné, et tend presque partout

(donc aussi en norme  $L^1$ ) vers  $-\frac{1}{2} \psi$ .

Les indices de sommation allant de 0 à  $n-1$ , on a

$$-D \left( \frac{1}{\sum Df^i} \right) = \frac{\sum D^2 f^i}{(\sum Df^i)^2} = \frac{\sum_{i > j} Df^i \cdot D \log Df \circ f^j \cdot Df^j}{(\sum Df^i)^2} .$$

Les  $\lambda_{ij} = \frac{Df^i Df^j}{(\sum_{i < n} Df^i)^2}$  ( $j < i < n$ ) étant positifs, de somme  $\leq 1$ , on voit

déjà que

$$-D \left( \frac{1}{\sum Df^i} \right) = \sum \lambda_{ij} D \log Df \circ f^j$$

est majoré, en valeur absolue, par  $\|D \log Df\|_\infty$ .

Les indices de sommation allant toujours de 0 à  $n-1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i > j} Df^i \cdot D \log Df \circ f^i \cdot Df^j &= \sum Df^i \cdot \psi_i \cdot \sum_{j < i} Df^j \\ &= \psi \cdot \sum_{j < i} Df^i Df^j + \sum (\psi - \psi_i) Df^i \sum_{j < i} Df^j \\ &= \frac{1}{2} \psi \cdot (\sum Df^i)^2 - \frac{1}{2} \psi \sum (Df^i)^2 + \sum (\psi - \psi_i) Df^i \sum_{j < i} Df^j , \\ D \left( \frac{1}{\sum Df^i} \right) + \frac{1}{2} \psi &= \frac{1}{2} \psi \cdot \frac{\sum (Df^i)^2}{(\sum Df^i)^2} + \frac{\sum (\psi - \psi_i) Df^i \sum_{j < i} Df^j}{(\sum Df^i)^2} . \end{aligned}$$

Majorons  $\sum (Df^i)^2 = \sum Df^i \cdot Df^i$  par  $\sup Df^i \cdot \sum Df^i$  et  $\sum_{j < i} Df^j$  par  $\sum Df^j$ . On trouve

$$\left| D \left( \frac{1}{\sum Df^i} \right) + \frac{1}{2} \psi \right| \leq \frac{1}{2} |\psi| \frac{\sup Df^i}{\sum Df^i} + \frac{\sum |\psi - \psi_i| Df^i}{\sum Df^i} = A_n + B_n .$$

Quel que soit  $j$  entre 0 et  $n-1$ ,

$$\frac{Df^j}{\Sigma Df^i} = (\Sigma Df^i \cdot (Df^j)^{-1})^{-1} = (\Sigma Df^{i-j} \circ f^j)^{-1} \leq \inf \left( \frac{1}{\sum_{i < n-j} Df^i} \circ f^j, \frac{1}{\sum_{i \leq j} Df^{-i}} \circ f^j \right).$$

D'après 3.4,  $A_n$  tend donc uniformément vers 0. Quant à  $B_n$ , le lemme suivant, de vérification laissée au lecteur, montre que  $B_n$  tend vers 0 en tout point où  $\psi_n$  tend vers  $\psi$ .

Lemme 3.8. - Soient  $a_n$  une suite qui tend vers 0, et  $b_n$  une série positive divergente. Alors,  $\sum_{i < n} a_i b_i / \sum_{i < n} b_i$  tend vers 0.

Déduisons enfin 3.6 de 3.7 : puisque  $1 / \sum_{i < n} Df^i$  tend vers 0,

$D(1 / \sum_{i < n} Df^i)$  tend vers 0, au sens des distributions. D'après 3.7, cette suite tend  $L^1$  vers  $-\frac{1}{2}\psi$ . On a donc  $\psi = 0$ , et on applique 3.7.

Complément 3.9. - Herman sait déduire de 3.7 qu'un difféomorphisme croissant de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $C^2$  et à nombre de rotation irrationnel, est  $dx$ -ergodique : toute partie borélienne (voire  $dx$ -mesurable) de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  stable par  $f$  est de mesure de Lebesgue 0 ou 1.

Remarque 3.10. - Le théorème de Chacon-Ornstein n'est pas effectif : il ne fournit pas d'estimation quant à la rapidité avec laquelle, pour chaque  $\epsilon$ , les  $\psi_n$  tendent uniformément vers  $\psi$  en dehors d'un ensemble de mesure  $\epsilon$ . De ce fait, je ne sais pas déduire de la démonstration ci-dessus une majoration effective des  $V_n$ .

#### § 4. Approximation d'un nombre par les rationnels

Sauf en 4.5, les conventions générales sur  $\alpha$ ,  $p$ ,  $q$  sont suspendues dans ce paragraphe. Nous commençons par des rappels sur les fractions continues, pour lesquelles on peut consulter Hardy and Wright.

4.1. Soit  $[a_0, \dots, a_n, \dots] = a_0 + 1/(a_1 + 1/(\dots))$  ( $a_i \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i > 0$  pour

477-12

$i > 0$ ) le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel  $\alpha$ . Soit

$p_n/q_n = [a_0, \dots, a_n]$  la  $n$ -ième réduite. On a  $p_n/q_n < \alpha$  pour  $n$  pair,

$p_n/q_n > \alpha$  pour  $n$  impair. Si, pour  $i = -1, -2$ , on définit  $(p_i, q_i)$  par

$$\begin{pmatrix} p_{-2} & p_{-1} \\ q_{-2} & q_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a pour tout  $n \geq 0$

$$(4.1.1) \quad \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix},$$

soit

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}.$$

De (4.1.2), il résulte que

$$(4.1.3) \quad a_{n+1} q_n \leq q_{n+1} \leq (a_{n+1} + 1) q_n$$

$$(4.1.4) \quad 2q_n \leq (a_{n+1} a_{n+2} + 1) q_n \leq q_{n+2}$$

$$(4.1.5) \quad q_n \geq \sqrt{2}^n \quad \text{pour } n \geq 2 \quad (\text{car } q_0 = 1, q_3 \geq 3 > 2^{3/2}).$$

De (4.1.1), on déduit par récurrence que  $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = \pm 1$ , i.e.

$$(4.1.6) \quad \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Puisque  $\alpha$  est entre  $p_n/q_n$  et  $p_{n+1}/q_{n+1}$ , il résulte de (4.1.6) que les  $p_n/q_n$  sont des approximations rationnelles de  $\alpha$ , par défaut pour  $n$  pair, par excès pour  $n$  impair.

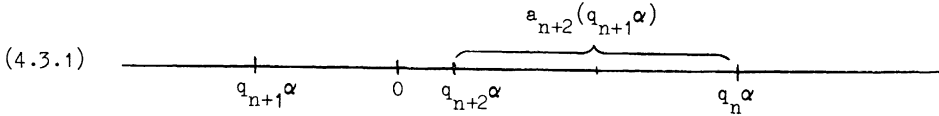
4.2. On a entre réduites et approximations rationnelles les relations suivantes :

(4.2.1) Toute approximation rationnelle de  $s$  est soit une réduite, soit de la forme  $[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \pm 1]$ . Si on range les approximations rationnelles par dénominateurs croissants, de 3 successives, l'une au moins est une réduite.

(4.2.2) De deux réduites successives, l'une au moins vérifie

$|\alpha - p/q| < 1/2q^2$ . Une approximation rationnelle telle que  $|s - p/q| < 1/2q^2$  est une réduite.

4.3. Posons  $|||x||| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ . Les dénominateurs  $q_n$  sont les nombres  $q$  tels que  $|||q\alpha||| < |||q'\alpha|||$  pour tout  $q' < q$ . Sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , trois  $q_n\alpha$  successifs sont disposés ainsi (le dessin est pour  $a_{n+2} = 2$ )

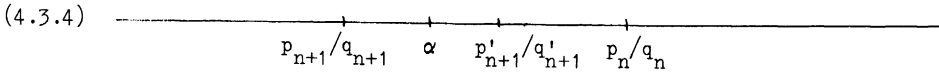


Si on exclut le cas où  $n = 0$ ,  $a_1 = q_1 = 1$ ,  $|||q_n\alpha|||$  est la distance de 0 à  $q_n\alpha$ , telle qu'elle apparaît sur cette figure, et

(4.3.2)  $a_{n+2}$  est la partie entière de  $|||q_n\alpha||| / |||q_{n+1}\alpha|||$  (pour  $n \geq 1$ ),

$$(4.3.3) \quad |||q_{n+2}\alpha||| \leq \frac{1}{a_{n+2} + 1} |||q_n\alpha||| \leq \frac{1}{2} |||q_n\alpha|||.$$

Posons  $p'_n/q'_n = [a_0, \dots, a_n + 1]$ . On a la disposition



d'où par (4.1.6) et (4.1.3)

$$(4.3.5) \quad \frac{1}{q_n q'_{n+1}} \leq |\alpha - p_n/q_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

soit

$$(4.3.6) \quad \frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n} \leq |||q_n\alpha||| \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n} \quad (\text{sauf pour } n=0, q_0 = q_1 = 1).$$

Comparant (4.1.3) et (4.3.6), et tenant compte de (4.2.2), on voit qu'il revient au même d'exiger

- (a) que  $|||q\alpha|||$  ne soit jamais trop petit ;
- (b) que  $a_n$  ne soit jamais trop grand ;
- (c) que les dénominateurs des approximations rationnelles de  $\alpha$  ne croissent pas trop vite.

477-14

DÉFINITION 4.4.- Un nombre irrationnel  $\alpha$  est de densité bornée si sa densité

$$d = \sup_{n > 0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{est finie.}$$

Appliquons 1.7, pour  $s = \alpha$  de densité  $d < \infty$ , en prenant pour  $q_i$  les dénominateurs des réduites successives. Pour  $n \geq 2^{N/2}$ , on a  $N \leq q_n$  (4.1.5) et  $\sum_{q_i \leq N} a_{i+1} \leq nd$ . La formule 1.7.3 nous fournit la

PROPOSITION 4.5.- Il existe des constantes universelles  $C, D$  telles que, pour  $\alpha$  de densité bornée  $d$ , on ait

$$\|D^N f\|_{\infty} \leq C^{dV} \cdot N^{DdV}.$$

4.6. Soit  $T : [0,1[ \rightarrow [0,1[$ ,  $x \mapsto$  partie fractionnaire de  $x^{-1}$ . La mesure de probabilité  $\nu = \frac{1}{\log 2} \frac{dx}{1+x}$  sur  $[0,1[$  vérifie  $T_*\nu = \nu$ . Khintchine a montré que  $T$  est  $\nu$ -ergodique. Le  $n$ -ième coefficient du développement en fraction continue de  $x$  irrationnel dans  $[0,1]$  est

$$a_n(x) = \lfloor (T^{n-1}(x))^{-1} \rfloor \quad (n \geq 1).$$

Pour presque tout  $x$  (au sens de la mesure  $\nu$  - ou de celle de Lebesgue, c'est pareil) un entier  $k$  apparaît donc dans la suite des  $a_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) avec une fréquence

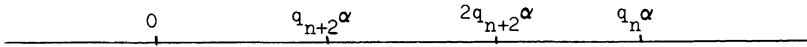
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\#\{n \leq N \mid a_n(x) = k\}) = \int_{[x^{-1}] = k} \nu \quad \simeq \quad 1/k^2.$$

Puisque la somme  $\sum \frac{1}{k^2} \cdot k$  diverge, l'ensemble des nombres de densité bornée est de mesure de Lebesgue nulle.

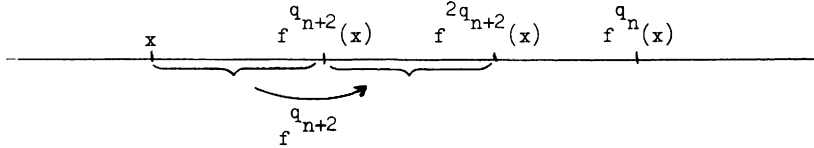
La proposition 4.5 est la seule étape de la démonstration d'Herman où l'on doit faire sur  $\alpha$  une hypothèse qui n'est pas vérifiée par presque tout nombre.

§ 5. Majoration de  $|f^{q_n} - x - p_n|$

On notera par  $p_n/q_n$  la  $n$ -ième réduite de  $\alpha$ . D'après 4.3.3., on a sur le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la disposition



Par conjugaison, la même disposition vaut pour les itérés de  $f$  :



Sur  $\mathbb{R}$ , la même disposition vaut si on remplace  $f^{q_i}$  par  $f^{q_i} - p_i$ . L'axe doit être orienté de gauche à droite pour  $n$  impair, de droite à gauche pour  $n$  pair.

Puisque  $Df^{q_i} \geq e^{-V}$ , on en déduit que

$$(1 + e^{-V}) |f^{q_{n+2}}(x) - p_{n+2} - x| \leq |f^{q_n}(x) - p_n - x|,$$

d'où la

PROPOSITION 5.1.- Les  $\|f^{q_n} - x - p_n\|_\infty$  décroissent au moins aussi vite qu'une progression géométrique.

Cet argument, un peu affiné, permet de prouver le théorème suivant

THÉORÈME 5.2.- Supposons que  $\alpha$  vérifie la condition

$$(*) \lim_{A \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{a_i > A \\ 1 \leq i \leq N}} \log(a_i + 1) / \sum_{1 \leq i \leq N} \log(a_i + 1) = 0,$$

soit, ce qui revient au même

(\*)' Pour tout  $\varepsilon$ , il existe  $A$  tel que

$$\prod_{\substack{a_i > A \\ 1 \leq i \leq N}} (a_i + 1) \leq O(q_N^\varepsilon).$$

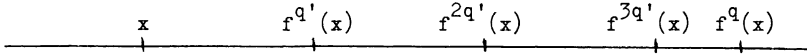
Il existe alors une fonction  $V \mapsto \varepsilon(V)$ , tendant vers  $0$  avec  $V$ , telle que



$$|f_n^q(x) - p_n - x| \leq O(q_n^{-1+\varepsilon(V)}) .$$

Esquisse de démonstration.

a) Soient  $p/q$  et  $p'/q'$  deux approximations rationnelles par excès de  $\alpha$ ,  $a = q\alpha - p$ ,  $b = q'\alpha - p'$  et  $c = a/b$ . Si  $0 \leq rb \leq a$  ( $r$  entier  $\geq 1$ ), on a sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la disposition (dessin pour  $r = 3$ )



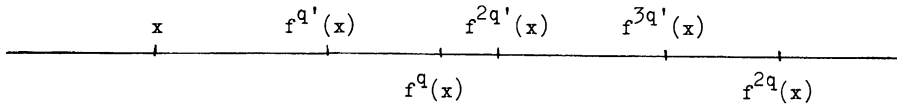
et, puisque  $Df^{q'} \geq e^{-V}$ ,

$$\left( \sum_{i=0}^{r-1} e^{-iV} \right) |f^{q'}(x) - p' - x| \leq |f^q(x) - p - x| .$$

b) Plus généralement, si  $rb \leq sa$ , i.e. si  $\frac{r}{s} \leq c$ , on a

$$(5.2.1) \quad \left( \sum_{i=0}^{r-1} e^{-iV} \right) |f^{q'}(x) - p' - x| \leq \left( \sum_{i=0}^{s-1} e^{iV} \right) |f^q(x) - p - x| .$$

Pour  $r = 3$ ,  $s = 2$ , on a le dessin



c) Quels que soient  $\varepsilon$  et  $A$ , il existe  $B$  tel que

$$\forall x (2 \leq x \leq A) \quad \exists r, s \quad (r \leq B, s \leq B, x^{1-\varepsilon} < r/s < x) .$$

Il existe ensuite  $V_0$  tel que si  $V < V_0$ , on ait pour tout  $r, s < B$ , avec  $r \geq 2s$ ,

$$\sum_{i=0}^{s-1} e^{iV} / \sum_{i=0}^{r-1} e^{-iV} \leq (s/r)^{1-\varepsilon} .$$

d) Si  $V < V_0$ , et que  $2 \leq c \leq A$ , (5.2.1) donne

$$(5.2.2) \quad |f^{q'}(x) - p' - x| \leq c^{-1+\varepsilon'} |f^q(x) - p - x| ,$$

avec  $(1-\varepsilon') = (1-\varepsilon)^2$ .

e) Prenons la suite des approximations rationnelles  $p_{2n+1}/q_{2n+1}$ , et soit  $b_n = |q_{2n+1}^\alpha - p_{2n+1}| = |||q_{2n+1}^\alpha|||$ . On a

$$2 \leq \frac{b_n}{b_{n+1}} \leq (a_{2n+2} + 1)(a_{2n+3} + 1).$$

Si  $V < V_0$ , on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} |f^{q_{2n+3}}(x) - p_{2n+3} - x| \leq \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{1-\varepsilon'} |f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| \\ \text{si } (a_{2n+2} + 1)(a_{2n+3} + 1) \leq A \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |f^{q_{2n+3}}(x) - p_{2n+3} - x| \leq |f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| \\ \text{en tout cas.} \end{array} \right. \quad (2)$$

Mettant bout à bout ces inégalités, on trouve que

$$|f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| \leq O\left[\prod (a_{2i} + 1)(a_{2i+1} + 1)\right]^{1-\varepsilon'} \cdot b_n^{1-\varepsilon'},$$

où le produit est étendu aux  $i \leq n$  tels que  $(a_{2i} + 1)(a_{2i+1} + 1) \geq A$ .

On le majore par le produit  $B_n = \prod (a_j + 1)^2$  étendu aux  $j \leq 2n + 1$  tels que  $a_j + 1 \geq A^{\frac{1}{2}}$ , et on majore  $b_n$  par  $1/q_{2n+1}$  :

$$|f^{q_{2n+1}}(x) - p_{2n+1} - x| \leq O(B_n q_{2n+1}^{-1+\varepsilon'}).$$

L'hypothèse sur  $\alpha$  permet de faire rentrer  $B_n$  dans le  $\varepsilon'$ , et de conclure.

Remarque 5.3.— La condition (\*) est vérifiée par presque tout nombre, et par les nombres de densité bornée.

Remarque 5.4.— Sauf si les  $a_i$  sont bornés, cette méthode ne permet malheureusement pas d'obtenir une minoration de  $|f^{q_n}(x) - p_n - x|$ .

477-18

§ 6. Majoration de  $|Df^{q_n} - 1|$ 

Soit  $\varphi_n = f^{q_n} - p_n - x$ . Nous allons majorer  $|Df^{q_n} - 1| = |D\varphi_n|$  par la formule d'interpolation de Hadamard (2.2.1). On a, pour  $\alpha$  de densité bornée, et  $f \in C^3$

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq O(q_n^{-1+\varepsilon(V)}) \quad \text{avec } \varepsilon(V) \rightarrow 0 \text{ pour } V \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

$$\|D^2\varphi_n\|_\infty \leq O(q_n^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{i < q_n} \|Df^i\|_\infty) \quad \text{pour } V < 1 \quad (2.3)$$

$$\sup_{i < q_n} \|Df^i\|_\infty \leq O(q_n^{\varepsilon'(V)}) \quad \text{avec } \varepsilon'(V) \rightarrow 0 \text{ pour } V \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

On a donc

$$\|D\varphi_n\|_\infty \leq O(q_n^{-1/4 + \varepsilon''(V)}) \quad , \quad (\varepsilon''(V) = \frac{1}{2}(\varepsilon(V) + \varepsilon'(V))) .$$

Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m$  tel que

$$\varepsilon''(\text{Var log } D f_m) < \varepsilon \quad (3.3),$$

d'où

$$\|Df_m^{q_n} - 1\|_\infty \leq O(q_n^{-1/4 + \varepsilon}) .$$

Par conjugaison ( $f^{q_n} = h_m f_m^{q_n} h_m^{-1}$ ,  $f_m^{q_n}$  est proche de  $R/Z$  par 5.2, et  $h_m$  est  $C^3$ ), on obtient enfin le

**THÉORÈME 6.1.-** Si  $f$  est  $C^3$ , et  $\alpha$  de densité bornée, on a pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\|Df^{q_n} - 1\|_\infty \leq O(q_n^{-1/4 + \varepsilon}) .$$

§ 7.  $h$  est  $C^{1+\beta}$  pour  $\beta < 1/3$ 

7.1. Nous aurons à utiliser les propriétés suivantes de la norme höldérienne

$|\varphi|_\beta$ .

(7.1.1) Pour  $\varphi$  périodique de période 1, et  $g: R/Z \rightarrow R/Z$ , on a

$$|\varphi \circ g|_\beta \leq |\varphi|_\beta \|Dg\|_\infty^\beta .$$

(7.1.2)  $|\varphi|_\beta$  est une fonction croissante logarithmiquement convexe de  $\beta$

$\log|\varphi|_{\beta}$  est en effet la borne supérieure des fonctions linéaires croissantes  $\log \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^{\beta}}$ .

$$(7.1.3) \quad |\varphi|_0 \leq 2 \|\varphi\|_{\infty} \quad \text{et} \quad |\varphi|_1 = \|\text{D}\varphi\|_{\infty}.$$

$$(7.1.4) \quad \|\text{D}\varphi\|_{\infty} \leq \left(\frac{1+\beta}{2\beta}\right)^{\beta/\beta+1} \cdot (|\varphi|_0^{\beta} |\text{D}\varphi|_{\beta})^{1/1+\beta}.$$

Supposons que le maximum de  $|\text{D}\varphi|$  soit atteint en  $x_0$ , et pour fixer les idées, que  $\text{D}\varphi(x_0) \geq 0$ . On a alors  $\text{D}\varphi(x) \geq \|\text{D}\varphi\|_{\infty} - |\text{D}\varphi|_{\beta}(x - x_0)^{\beta}$  et

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq \|\text{D}\varphi\|_{\infty}(x - x_0) - |\text{D}\varphi|_{\beta} \frac{(x - x_0)^{1+\beta}}{1+\beta}, \quad \text{pour } x \geq x_0.$$

On évalue cette minoration en  $x$  telle que  $\|\text{D}\varphi\|_{\infty} - |\text{D}\varphi|_{\beta}(x - x_0)^{\beta} = 0$ . Joignant le résultat au résultat symétrique, pour  $x < x_0$ , on trouve que

$$\frac{1}{2} |\varphi|_0 \geq \|\text{D}\varphi\|_{\infty} X - |\text{D}\varphi|_{\beta} \frac{X^{1+\beta}}{1+\beta} = X \left( \|\text{D}\varphi\|_{\infty} - \frac{|\text{D}\varphi|_{\beta} X^{\beta}}{1+\beta} \right)$$

pour  $X$  tel que  $\|\text{D}\varphi\|_{\infty} = |\text{D}\varphi|_{\beta} X^{\beta}$ . La formule d'interpolation (7.1.4), dont la formule d'Hadarnard (2.2.1) est le cas particulier  $\beta = 1$ , en résulte.

(7.1.5)  $\|\varphi\|_{\beta} = \|\varphi\|_{\infty} + |\varphi|_{\beta}$  est une norme d'algèbre de Banach sur l'algèbre des fonctions  $C^{\beta}$ . La formule  $\|\varphi_1 \varphi_2\|_{\beta} \leq \|\varphi_1\|_{\beta} \|\varphi_2\|_{\beta}$  se déduit de l'identité

$$\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(y)\varphi_2(y) = \varphi_1(x)(\varphi_2(x) - \varphi_2(y)) + (\varphi_1(x) - \varphi_1(y))\varphi_2(y).$$

7.2. On suppose  $\alpha$  de densité bornée et  $f \in C^3$ . Soit  $\varepsilon < 1/4$ . D'après 6.1, on a une majoration

$$(7.2.1) \quad |\log \text{D}f^{q_n}| \leq A \cdot q_n^{-\varepsilon}.$$

Soit  $N$  un entier, et écrivons  $N = \sum b_i q_i$  comme en 1.7. Si on brise la somme  $\log \text{D}f^N = \sum_{i < N} \log \text{D}f \circ f^i$  en sommes partielles comme en 1.7, on trouve

$$(7.2.2) \quad \log \text{D}f^N = \sum_i \left( \sum \text{ de } b_i \text{ termes de la forme } \log \text{D}f^{q_i} \circ f^j \right).$$

Appliquons (7.2.1) :

477-20

$$(7.2.3) \quad \|\log Df^N\|_\infty \leq A \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} q_i^{-\epsilon}.$$

Cette somme converge si  $\alpha$  est à densité bornée (et pour presque tout nombre), d'où la

PROPOSITION 7.3.  $\|\log Df^n\|_\infty$  est uniformément borné.

7.4. Supposons que  $V < 1$ , et interpolons par 7.1.2 entre l'estimation 6.1 de  $\|Df^{q_n} - 1\|_\infty$  et l'estimation 2.3 de  $\|D(Df^{q_n} - 1)\|_\infty$ . On trouve, pour  $\beta < 1/3$ , une majoration

$$(7.4.1) \quad |Df^{q_n}|_\beta \leq O(q_n^{-\epsilon}) \quad \text{avec } \epsilon > 0.$$

Prenons  $| \cdot |_\beta$  de (7.2.2). Les  $\circ f^j$  y sont sans importance par (7.1.1) et 7.3, d'où

$$|Df^n|_\beta \leq O(\sum a_{i+1} q_i^{-\epsilon}) = O(1) :$$

les  $f^n$  sont uniformément  $C^{1+\beta}$ , les  $h_n$  le sont aussi, et  $h$  est donc  $C^{1+\beta}$ , comme expliqué dans l'introduction. On se débarrasse enfin de l'hypothèse  $V < 1$  par 3.3.

PROPOSITION 7.5.- Pour tout  $\beta < 1/3$ ,  $h$  est  $C^{1+\beta}$ .

### § 8. $C^{2+\beta}$ convergence des $f_n$

THÉORÈME 8.1.- Soit  $0 < \beta' < \beta \leq 1$ . On suppose que  $f$  est  $C^{2+\beta}$  et que  $h$  est  $C^{1+\beta}$ . Alors, les  $f_n$  convergent vers  $R_\alpha$  dans la  $C^{2+\beta'}$  -topologie.

On sait déjà que la convergence est  $C^1$  (3.5). C'est d'ailleurs ici évident sur (3.3.1) puisque les  $Df^i$  sont bornés inférieurement :  $Df^i > A > 0$ . Les formules d'interpolation (7.1.2) et (7.1.4) nous ramènent donc à montrer que les  $f_n$  restent bornés dans la  $C^{2+\beta}$ -topologie, i.e. que les  $|D^2 f_n|_\beta$  restent bornés.

Les  $f^n$  sont uniformément  $C^{1+\beta}$ . Les  $|\frac{1}{n} \sum_{i < n} Df^i|_\beta$  sont donc bornés. Puisque les  $Df^i$  sont bornés inférieurement, et que  $|\varphi^{-1}|_\beta \leq |\varphi|_\beta / (\inf |\varphi|)^2$ ,

les  $|n / \sum_{i < n} Df^i|_{\beta}$  sont également bornés.

Par la même méthode qu'en 3.6, compte tenu de ce que les  $h_n$  et  $f^n$  sont uniformément  $C^1$  (ce qui justifie les changements de variable), on se ramène à majorer uniformément en norme  $\| \cdot \|_{\beta}$  (7.1.5) les fonctions

$$-D \left( \frac{1}{\sum_{i < n} Df^i} \right) = \sum_{j < i < n} \lambda_{ij} D \log Df \circ f^j \quad \text{pour}$$

$$\lambda_{ij} = \frac{Df^i Df^j}{\left( \sum_{i < n} Df^i \right)^2} = \frac{1}{n^2} \left[ Df^i \cdot Df^j \cdot \left( n / \sum_{i < n} Df^i \right)^2 \right] \quad (\text{preuve de (3.7)}).$$

L'expression entre crochets, et les  $D \log Df \circ f^j$ , étant uniformément bornés en norme  $\| \cdot \|_{\beta}$ , c'est immédiat.

#### § 9. Application d'un théorème des fonctions implicites

Le résultat final d'Herman est le suivant.

**THÉORÈME 9.1.-** Si  $\alpha$  est de densité bornée, et que  $f$  est  $C^r$ ,  $r \geq 3$   
( $r = n + \beta$ ,  $n$  entier,  $0 \leq \beta < 1$ ), alors  $h$  est  $C^{r-1-\epsilon}$  pour tout  $\epsilon > 0$ .

Il l'obtient en conjuguant 7.5 et 8.1 avec un théorème des fonctions implicites :

**THÉORÈME 9.2.-** Soient  $\alpha$  un nombre irrationnel, et  $1 \leq \theta < \theta'$ . On suppose qu'il existe  $C$  tel que  $|q\alpha - p| \geq C \cdot q^{-\theta}$  pour tous entiers  $p, q$ . Il existe alors un voisinage  $V$  de  $R_{\alpha}$  dans la  $C^{2\theta'}$ -topologie tel que pour  $f$  dans ce voisinage et  $C^r$  (resp.  $C^{\infty}$ ,  $C^{\omega}$ ), l'équation

$$f = R_{\lambda} \circ g \circ R_{\alpha} \circ g^{-1}$$

( $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $g$  homéomorphisme croissant) admette une solution  $C^{r-\theta'}$  (resp.  $C^{\infty}$ ,  $C^{\omega}$ ).

Pour obtenir 9.1, on prend  $1 < \theta < \theta' = 1 + \varepsilon$ , on prend pour  $\alpha$  le nombre de rotation de  $f$ , on se ramène à supposer  $f$  dans  $V$  par 7.5 et 8.1 et on observe que le nombre de rotation de  $R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$  ne peut être  $\alpha$  que pour  $\lambda = 0$ .

Comme nous l'avons déjà dit, la preuve de 9.2 est inspirée de [1], [3] et [4].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. ARNOLD - Small denominators I, Transl. A.M.S., 2e série, 46 (1965), 213-254.
- [2] A. DENJOY - Les trajectoires à la surface du tore, C.R. Acad. Sci. Paris, 1946, vol. 223, 5-8.
- [3] J. MOSER - A rapidly convergent iteration method II, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 20 (1966), 499-535.
- [4] H. RÜSSMANN - Kleine Nenner II, Bemerkungen zur Newtonschen Methode, Nachr. Akad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl., 1972.