

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ANDRÉ GRAMAIN

Rapport sur la théorie classique des noeuds (1ère partie)

Séminaire N. Bourbaki, 1977, exp. n° 485, p. 222-237

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1975-1976__18__222_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RAPPORT SUR LA THÉORIE CLASSIQUE DES NOEUDS

(1ère partie)

par André GRAMAIN

La théorie classique des noeuds est la recherche d'une classification des noeuds, c'est-à-dire des figures formées par une courbe fermée simple dans l'espace euclidien de dimension trois. Les noeuds ainsi que les entrelacs (courbes fermées à plusieurs composantes), utilisés comme motifs de décoration des mosaïques antiques, des portails romans, etc., ne semblent avoir été pris en considération par les mathématiciens qu'au XIX^{ème} siècle. Dans une correspondance de Möbius à Gauss de 1847 (cf. [13], p. 36) il est question du projet, jamais réalisé, d'un ouvrage de Gauss sur la question, sans doute motivé par la théorie de l'induction magnétique des courants électriques.

La théorie des noeuds ne démarra vraiment que lorsqu'on eut l'idée et les moyens d'étudier le groupe de Poincaré de l'espace complémentaire du noeud, groupe qu'on appelle le groupe du noeud. Parmi les étapes marquantes des progrès de la théorie, mentionnons les travaux d'Alexander, en particulier l'introduction du polynôme qui porte son nom, associé au groupe du noeud et qu'on peut interpréter comme polynôme caractéristique de la monodromie. Citons aussi le lemme de Dehn qui attendit près de cinquante ans une démonstration correcte ([12]) et qui caractérise le noeud trivial par son groupe. Les noeuds ne sont pas, en général, classifiés par leur groupe. Cependant, W. Whitten et J. Simon ont récemment trouvé chacun une construction géométrique qui, à un noeud, en associe un autre dont le groupe caractérise le noeud initial ([18] et [22]).

Datant d'une dizaine d'années, les travaux de L. Neuwirth complétés par ceux de J. Stallings sur les fibrations des variétés de dimension 3 (cf. [10], ch. IV et X) ont été un progrès conséquent dans la connaissance des groupes de noeuds. Généralisant des résultats de Neuwirth concernant les variétés complémentaires de

noeuds, F. Waldhausen ([12], voir aussi [9]) démontrait des théorèmes de caractérisation des homéomorphismes de certaines variétés de dimension 3 qui jetaient à leur tour un nouvel éclairage sur la théorie des noeuds.

1. Types de noeuds

Soient n et q deux entiers ; on appelle noeud (généralisé) l'image k d'une application continue injective $f : S_n \rightarrow S_{n+q}$. Deux noeuds k et k' ont même type s'il existe un homéomorphisme $h : S_{n+q} \rightarrow S_{n+q}$ tel que $h(k) = k'$; ils ont même type orienté si h préserve l'orientation de S_{n+q} et les orientations de k et k' . Le noeud trivial est l'image du plongement ordinaire de S_n dans S_{n+q} .

Si l'on permet à f d'être une application non localement plate, on obtient les noeuds "sauvages" dont la classification est presque impensable. Si l'on s'occupe de noeuds semi-linéaires (i.e. l'application f est un plongement PL), pour les codimensions $q \geq 3$, tous les noeuds ont le même type (E. Zeeman, [5], p. 187). Plus précisément, deux plongements de S_n dans S_{n+q} sont isotopes. Cette dernière assertion est fausse dans la catégorie différentiable ; A. Haefliger ([6]) a démontré que la condition $2q > n+3$ est nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait qu'une classe d'isotopie de plongements. En codimension $q = 0$, le problème des types de noeuds ne se pose pas. En codimension 1, cela s'appelle le problème de Schönflies (cf. [5], p. 189).

Le phénomène particulier à la codimension 2 est que le complémentaire $S_{n+2} - k$ du noeud n'a pas, en général, le type d'homotopie du cercle, comme c'est le cas pour le noeud trivial. La classification des noeuds passe par l'étude de ce complémentaire. Pour les grandes dimensions ($n \geq 3$), renvoyons à [8] et [11], p. 25. Pour les noeuds de S_2 dans S_4 , on ne sait pas grand chose. La théorie classique ($n = 1$) correspond à la topologie de dimension 3.

Dans la suite, nous supposons $n = 1$, $q = 2$. Dans ce cas, la classification des noeuds semi-linéaires ou différentiables est la même et, dans les deux catégories, on a :

PROPOSITION 1.- Pour que deux noeuds aient même type orienté, il faut et il suffit qu'ils soient images de plongements isotopes.

Supposons que k et k' soient deux noeuds différentiables de même type orienté. Il existe donc un homéomorphisme $h : S_3 \rightarrow S_3$ tel que $h(k) = k'$, et compatible avec les orientations. D'après un théorème de E. Moïse ([9], p. 7), on peut supposer que h est un difféomorphisme. Mais l'espace des difféomorphismes orientés de S_3 est connexe par arc (Cerf, [9], p. 8), et les noeuds k et k' sont images de plongements isotopes de S_1 dans S_3 . Inversement, par relèvement des isotopies, deux plongements isotopes de S_1 dans S_3 ont pour images des noeuds conjugués par un difféomorphisme orienté de S_3 .

Soient $\mathcal{K}$ l'espace des plongements de S_1 dans S_3 et $\text{Diff}^+(S_1)$ l'espace des difféomorphismes orientés de S_1 , munis de la topologie de la C^∞ -convergence uniforme. L'espace des noeuds orientés s'identifie à $\mathcal{K}/\text{Diff}^+(S_1)$ et l'ensemble des types orientés de noeuds à l'ensemble $\pi_0(\mathcal{K})$ des composantes connexes de $\mathcal{K}$. Un changement d'orientation de S_1 (resp. de S_3) induit une involution σ (resp. ρ) de $\mathcal{K}$. Ces deux involutions commutent. L'ensemble des types de noeuds est le quotient de $\pi_0(\mathcal{K})$ par l'opération de $(\mathbb{Z}/2) \times (\mathbb{Z}/2)$ induite. On dit qu'un noeud k est inversible (resp. amphichéral) s'il a même type orienté que $\sigma(k)$ (resp. $\rho(k)$). Par exemple le noeud simple est inversible mais pas amphichéral ; le noeud double est inversible et amphichéral (fig. 1 et 2) ; il existe des noeuds



Figure 1 : noeud simple

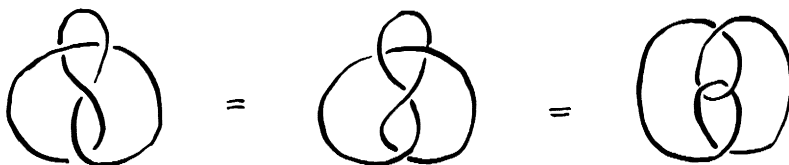


Figure 2 : noeud double (figure 8 knot)

non-inversibles (fig. 3). Enfin, on utilisera une relation d'équivalence intermédiaire entre les deux précédentes : on dit (suivant un usage malheureux) que deux noeuds ont même type d'isotopie s'ils ont même classe dans $\pi_0(\mathcal{K})/(\sigma)$.

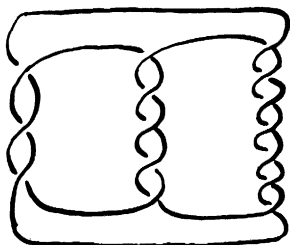


Figure 3 : un noeud non inversible (H. Trotter)

2. Groupe et variété d'un noeud

Soit k un noeud orienté. Choisissons un point-base $* \in S_3 - k$. On appelle groupe du noeud k le groupe $G = \pi_1(S_3 - k, *)$. Des noeuds de même type ont des groupes isomorphes. La réciproque est fausse ; Dehn a remarqué que le noeud plat et le noeud de vache fournissent un contre-exemple (fig. 4).



Fig. 4 : noeud de vache
(granny knot)

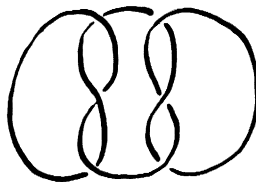


Fig. 4 : noeud plat

Par dualité d'Alexander, le groupe $H_1(S_3 - k)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. L'homomorphisme de Hurewicz de $\pi_1(S_3 - k, *)$ sur son abélianisé $H_1(S_3 - k)$ est réalisé par l'homomorphisme $H : G \rightarrow \mathbb{Z}$ qui, à un lacet, associe son nombre d'enlacement avec k . On a ainsi une suite exacte :

$$0 \rightarrow D(G) \rightarrow G \xrightarrow{H} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Soit U un voisinage tubulaire fermé de k (fig. 5). Posons $V = S_3 - \text{int}(U)$; alors V est une variété à bord dont le bord $bV = -bU$ est un tore. On l'appelle la variété du noeud k . Plaçons le point-base $*$ sur bV et identifions G à $\pi_1(V, *)$. Soit m le lacet de bV décrit par une fibre du fibré en cercle $bU \rightarrow k$, orientée de sorte que $H([m]) = 1$. On dit de m (et aussi de sa classe $[m] \in G$) que c'est un méridien du noeud k . Pour trivialisier le tore bU , on adjoint à m une section ℓ de la fibration $bU \rightarrow k$ telle que $H(\ell) = 0$, orientée comme k . On dit que ℓ est un parallèle du noeud. La classe de ℓ dans $\pi_1(bV)$ est caractérisée au signe près comme générateur du noyau de l'homomorphisme $\pi_1(bV) \xrightarrow{\sim} H_1(bV) \rightarrow H_1(V)$. L'image de $\pi_1(bV)$ dans $\pi_1(V)$ est appelée sous-groupe des éléments périphériques.

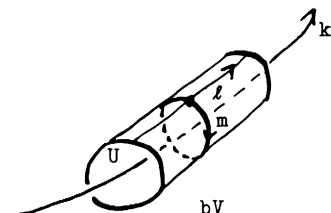


Figure 5

Dans la suite nous utiliserons les trois théorèmes de Papakyriakopoulos ([12]) qu'on peut énoncer ainsi :

PROPOSITION 2.- Soit V une variété de dimension 3, à bord.

a) Si $\pi_1(bV) \rightarrow \pi_1(V)$ n'est pas injectif, il existe un cercle C plongé dans bV dont la classe d'homotopie est 0 dans V et $\neq 0$ dans bV (loop theorem).

b) Soit C un cercle plongé dans bV , homotope à 0 dans V ; il existe un disque D plongé dans V tel que $C = D \cap bV$ (lemme de Dehn).

c) Si $\pi_2(V) \neq 0$, il existe une sphère plongée dans V qui n'est pas homotope à 0 (sphere theorem).

Revenons aux noeuds.

PROPOSITION 3.- Si G est isomorphe à $\mathbb{Z}$, k a le type du noeud trivial.

Si G est isomorphe à $\mathbb{Z}$, alors H est un isomorphisme. Compte tenu du lemme de Dehn, un parallèle borde un disque dans V . Il en résulte que k borde un disque dans S_3 . L'espace des plongements du disque dans S_3 est connexe ; la prop. 3 résulte de la prop. 1.

Lorsque k n'est pas trivial, l'application $\pi_1(bV) \rightarrow \pi_1(V)$ est injective. En effet, son noyau est dans le sous-groupe engendré par $[1]$; d'après ce qui précède, on sait que $[1] \neq 0$ dans G . On conclut parce que tout élément de G est d'ordre infini (prop. 5)

PROPOSITION 4.- La variété du noeud k est un espace $K(G, 1)$.

La variété V , connexe à bord, a le type d'homotopie d'un complexe de dimension 2. Il suffit donc de vérifier que $\pi_2(V) = 0$. Cela résulte du théorème de la sphère et du fait (th. de Schönflies) qu'une sphère différentiablement plongée partage S_3 en deux boules.

PROPOSITION 5.- Tout sous-groupe commutatif de G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Soient F un sous-groupe commutatif de G et $\tilde{V}$ le revêtement de V correspondant au groupe F . L'espace $\tilde{V}$ est du type d'un espace $K(F, 1)$ de dimension 2. Le groupe F ne peut être fini ni contenir $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sinon $\tilde{V}$ aurait de l'homologie en dimension ≥ 3 .

3. Surface de Seifert

Tout noeud k est le bord d'une surface orientable Σ plongée dans S_3 (cf. [5], p. 140). La démonstration de ce fait ne présente pas de difficulté ; il faut juste un peu de soin pour éviter d'arriver à une surface non orientable (fig. 6).

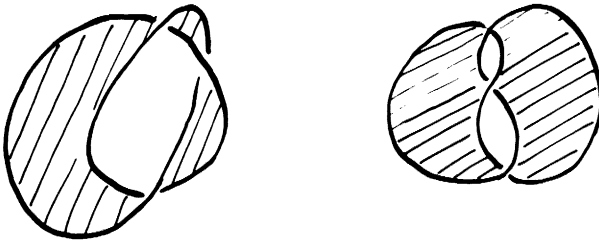


Figure : 6

On appelle surface de Seifert de k une telle surface. On appelle surface de Seifert minimale une surface de Seifert de genre minimal, et genre du noeud k le genre g d'une surface de Seifert minimale. Le noeud trivial est l'unique noeud de genre 0, c'est-à-dire bordant un disque.

On définit la somme connexe $k_1 \# k_2$ de deux noeuds à l'aide de la somme connexe des plongements définissant k_1 et k_2 . Si k_1 et k_2 sont contenus dans deux hémisphères disjoints de S_3 , on peut donner de cette somme connexe une définition univoque en ce sens que le type orienté de $k_1 \# k_2$ ne dépend que des types orientés de k_1 et k_2 (cf. loc. cit.). L'opération peut être interprétée matériellement par la réalisation de k_1 et k_2 bout à bout sur une même ficelle (fig. 7)

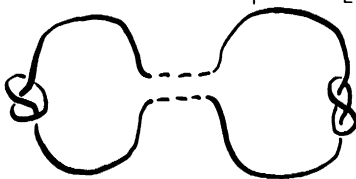


Figure : 7

PROPOSITION 6.- Pour la loi $\#$ l'ensemble $\pi_0(\mathcal{K})$ des types de noeuds orientés est un monoïde associatif et commutatif. Le noeud trivial est élément neutre.

L'application $g : \pi_0(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{N}$, définie par le genre, est un homomorphisme.

La première assertion est à peu près évidente. Pour la dernière, voir [5], p. 141.

COROLLAIRE.- Un noeud non trivial n'a pas d'opposé.

Cette assertion intuitive est restée longtemps sans démonstration.

Compte tenu de la prop. 6, tout noeud se décompose (dans son type orienté) en somme connexe de noeuds indécomposables. H. Schubert ([16]) a démontré que cette décomposition était unique, à permutation près.

4. Variétés de noeud fibrées

Supposons désormais le noeud k non trivial. Soit Σ une surface de Seifert ; on peut supposer que Σ rencontre le voisinage tubulaire U de k suivant une couronne transversale à ∂U , et contienne $*$. Alors $\Sigma \cap \partial U$ est le support d'un

parallèle : en effet, pour tout lacet α dans V , le nombre $H(\alpha)$ est le nombre d'intersection de α et de Σ ([15], § 77).

Plaçons-nous dans cette situation et notons encore Σ la surface $\Sigma \cap V$. Soit X la variété à arêtes obtenue à partir de V en dédoublant Σ en deux exemplaires Σ_1 et Σ_2 (fig. 8). On associe à cette coupure de V un revêtement $p : \tilde{V} \rightarrow V$ de groupe $\mathbb{Z}$. La variété $\tilde{V}$ est le recollement d'une famille $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par identification de Σ_1^n et Σ_0^{n+1} . Ce revêtement a pour groupe fondamental $D(G)$ et il est associé à l'homomorphisme $H : \pi_1(V) \rightarrow \mathbb{Z}$, puisqu'un lacet de V se relève en un lacet de $\tilde{V}$ si et seulement si son nombre d'intersection avec Σ est 0.

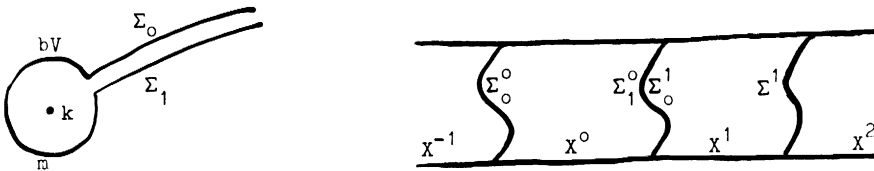


Figure : 8

Lemme.- Si Σ est de genre minimal, les applications $\varphi_i : \pi_1(\Sigma_i) \rightarrow \pi_1(X)$ sont injectives ($i = 1, 2$).

Sinon, en utilisant la prop. 2, on pourrait démontrer qu'il existe un cercle plongé S dans Σ bordant un disque D dans $V - \Sigma$, et qui ne soit pas homotope à 0 dans Σ . En faisant subir à Σ une chirurgie, utilisant D , le long de S , on obtiendrait une nouvelle surface de Seifert de genre inférieur au genre de Σ .

Le groupe $\pi_1(\tilde{V})$ se présente comme somme amalgamée infinie des $\pi_1(X^n)$, décrite par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \pi_1(X) & & \pi_1(X) & & \pi_1(X) & \dots \\
 & \nearrow \varphi_1 & & \nwarrow \varphi_1 & & \nearrow \varphi_2 & \\
 \dots & & \pi_1(\Sigma) & & \pi_1(\Sigma) & & \dots
 \end{array}$$

Si φ_1 et φ_2 sont des isomorphismes, $\pi_1(\tilde{V})$ est isomorphe à $\pi_1(\Sigma)$, groupe libre à $2g$ générateurs. Dans le cas contraire, on peut démontrer ([2])

que ni φ_1 , ni φ_2 ne sont surjectives ; il en résulte que $\pi_1(\tilde{V})$ n'est pas de type fini. Les deux cas se produisent ; dans le premier, on dit que le noeud est un noeud de Neuwirth, ou noeud fibrant. On a en effet :

PROPOSITION 7.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $D(G)$ est de type fini.
- (ii) $D(G)$ est un groupe libre.
- (iii) $D(G)$ est un groupe libre à $2g$ générateurs.
- (iv) Il existe une fibration localement triviale $V \rightarrow S_1$ induisant l'homomorphisme $H : \pi_1(V) \rightarrow \mathbb{Z}$.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est due à Rapoport-Crowell. L'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) est due à J. Stallings. C'est un cas particulier du théorème du h-cobordisme en dimension 3 (cf. [9], p. 31) appliqué à la variété X : pour un noeud de Neuwirth, X est isomorphe à $\Sigma \times I$ et $\tilde{V}$ à $\Sigma \times \mathbb{R}$.

5. Isotopie des surfaces de Seifert minimales

PROPOSITION 8.- Soient k un noeud de Neuwirth, Σ et Σ' deux surfaces de Seifert de genre minimal de k . Il existe une isotopie, dans les automorphismes de S_3 fixant k , qui déforme Σ en Σ' .

On peut d'abord supposer que $\Sigma \cap bV = \Sigma' \cap bV$ puisque ces deux courbes sont dans la classe d'homotopie du parallèle. Il suffit alors de trouver une isotopie dans V fixe sur bV . Rappelons que $\tilde{V}$ est isomorphe à $\Sigma \times \mathbb{R}$ et aussi à $\Sigma' \times \mathbb{R}$. On peut alors construire une homotopie, fixe sur bV , entre Id et une équivalence d'homotopie $f : V \rightarrow V$ qui induit une équivalence d'homotopie de Σ à Σ' . On utilise ensuite les théorèmes de Waldhausen (prop. 9) pour remplacer l'homotopie par une isotopie. Une autre manière, mathématiquement équivalente est d'utiliser le théorème des surfaces parallèles dans $\tilde{V}$ ([9], p. 32).

Certains autres noeuds ont la propriété d'unicité à isotopie près de la surface de Seifert minimale ; par exemple les noeuds doublés qui ne sont pas des ca-

bles. Pour d'autres noeuds, il n'y a pas unicité ; on a même des exemples où les couples (S_3, Σ) et (S_3, Σ') ne sont pas isomorphes et des exemples où les complémentaires $S_3 - \Sigma$ et $S_3 - \Sigma'$ ne sont pas homéomorphes (voir les exemples indiqués dans [21], et dans Trotter [11]).

6. Caractérisation des variétés de noeud

Nous avons dit que le groupe du noeud ne caractérise pas le type du noeud. On peut cependant caractériser la variété du noeud par le groupe du noeud muni du sous-groupe des éléments périphériques (et dans certains cas par la seule donnée du groupe du noeud). On utilise pour cela le théorème suivant, de Waldhausen, généralisant un théorème de Neuwirth.

PROPOSITION 9 ([19]).- Soient V, V' des variétés compactes connexes orientables de dimension 3. Soit $h : V \rightarrow V'$ une équivalence d'homotopie. Sous certaines hypothèses concernant V, V' et h (cf. ci-dessous), h est homotope à un difféomorphisme $f : V \rightarrow V'$.

Deux difféomorphismes de V sur V' qui sont reliés par une homotopie fixe sur le bord, sont reliés par une isotopie fixe sur le bord.

La condition imposée à h dans la première partie de la prop. 9 est de respecter les éléments périphériques : pour toute composante connexe bV_i de bV , $h_*(\pi_1(bV_i))$ est contenu dans une image du groupe fondamental d'une composante de bV' .

Pour les variétés de dimension 2, et sous la même hypothèse pour h , la proposition avait été démontrée il y a plus d'un demi-siècle par Nielsen. En dimension 3, elle n'est pas vraie en général, et l'on doit supposer que V et V' sont des "variétés de Waldhausen". La variété V est une variété de Waldhausen si l'on a :

- 1) V est irréductible : une sphère plongée dans V borde une boule.
- 2) V est suffisamment grande : il existe une surface Σ , proprement plongée dans V , telle que $\pi_1(\Sigma) \rightarrow \pi_1(V)$ soit injectif.

3) Le bord de V est incompressible : pour chaque composante bV_i du bord, $\pi_1(bV_i) \rightarrow \pi_1(V)$ est injectif.

Une variété de noeud est une variété de Waldhausen : les trois propriétés ont déjà été signalées dans cet exposé. D'où la caractérisation annoncée de la variété d'un noeud. Il en résulte la caractérisation suivante du type orienté du noeud.

PROPOSITION 10.- Pour $i = 1, 2$, soient k_i un noeud, V_i sa variété, G_i son groupe, $[m_i]$ et $[l_i] \in G_i$ le méridien et le parallèle. S'il existe un isomorphisme $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ tel que $\varphi([m_1]) = [m_2]$, $\varphi([l_1]) = [l_2]$, alors les noeuds k_1 et k_2 ont même type orienté.

Comme les variétés V_1 et V_2 des noeuds sont des espaces asphériques, il existe une équivalence d'homotopie $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $\pi_1(f) = \varphi$. D'après la prop. 9, on peut supposer que f est un difféomorphisme. Les hypothèses de la prop. 10 permettent de le prolonger à S_3 par un difféomorphisme $U_1 \rightarrow U_2$ des voisinages tubulaires des noeuds. Les orientations de m_i et l_i étant conservées, celles de V_i et k_i le sont aussi.

Remarquons que, dans la prop. 10, l'hypothèse $\varphi([l_1]) = [l_2]$ est presque superflue. Si $\varphi(\pi_1(bV_1)) = \pi_1(bV_2)$, on a nécessairement $\varphi([l_1]) = \pm [l_2]$ vu la caractérisation de $\pm [l]$ au n° 2. Si, sous la même hypothèse, on avait $\varphi([m_1]) = \pm [m_2]$, la donnée de G et du sous-groupe des périphériques caractériserait le type (non orienté) du noeud.

Etant donnée la variété d'un noeud et le tore plein U , soit M la variété obtenue en recollant V et U par une identification $\theta : bU \rightarrow bV$. Notons λ et μ le parallèle et le méridien de U . L'identification est déterminée par les classes de $\theta(\lambda)$ et $\theta(\mu)$ dans $\pi_1(bV)$. Pour que M ait le type d'homotopie de S_3 , on vient de voir qu'il est nécessaire que $[\theta(\lambda)] = \pm [l]$. On dit que le noeud k est stérile (ou jouit de la propriété P) s'il est aussi nécessaire que $[\theta(\mu)] = \pm [m]$. Il revient au même de dire que le méridien $[m]$ est, à orientation et isotopie près, le seul cercle plongé dans bV dont il suffit de tuer la classe pour tuer $\pi_1(V)$ tout entier. On n'a actuellement pas pu montrer qu'il existait un noeud non stérile. En revanche, on sait démontrer que de nombreux noeuds sont

stériles ([1]). Ainsi, un noeud composé, un noeud doublé, un certain nombre de cables sont des noeuds stériles.

Pour certains noeuds, la donnée du groupe G du noeud suffit à déterminer le sous-groupe périphérique (et, par suite, le type non orienté, si le noeud est stérile). Nous verrons ci-dessous les exemples de J. Simon et W. Whitten. Citons aussi le récent résultat de K. Johannson ([7]) :

PROPOSITION 11.- Soit k un noeud non trivial, indécomposable, qui ne soit ni un cable, ni un noeud torique, et soit G son groupe. Soit k' un noeud de groupe G' . Si G est isomorphe à G' , les variétés V et V' des noeuds sont isomorphes.

7. Un groupe caractérisant le noeud

On a vu que le système $(G, [m], [l])$ caractérise le type orienté d'un noeud, et que, dans certains cas, il suffisait d'un peu moins que de la donnée de $[m]$ et $[l]$ pour caractériser le type non orienté. Récemment ([18], [22], [4]), on vient de trouver des constructions qui, à un noeud k , associent un groupe H qui, à lui seul, caractérise le type du noeud. Une telle construction serait intéressante si l'on savait caractériser algébriquement l'ensemble des classes des groupes ainsi obtenus. Ce n'est pas le cas. La construction de Conway et Gordon est algébrique : au système $(G, [m], [l])$, on associe un groupe H , somme amalgamée de G et d'un groupe à deux générateurs. Connaissant H , et utilisant le fait que tout élément de G est d'ordre infini, on peut retrouver G , $[m]$ et $[l]$. L'intérêt des deux autres constructions est que le groupe H est le groupe d'un noeud construit géométriquement à partir de k .

Dans le tore $S_1 \times D_2$, considérons la courbe simple orientée $k_0(\rho, \epsilon)$ (où $\rho \in \mathbb{Z}$, $\epsilon = \pm 1$) qu'on ne peut définir qu'en regardant la figure 9. La courbe

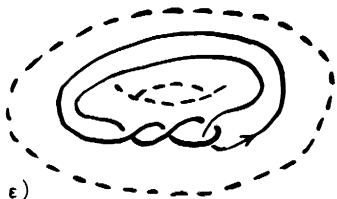


Figure 9 : $k_0(\rho, \epsilon)$

k_0 est le bord d'un disque D immergé dans $S_1 \times D_2$, dont la seule singularité est un segment double. Le nombre d'intersection de k_0 et D est 2ϵ . Le nombre ρ est le "nombre de tours" de D . La figure 9 représente $\rho = -1$, $\epsilon = -1$.



Figure 10 : double

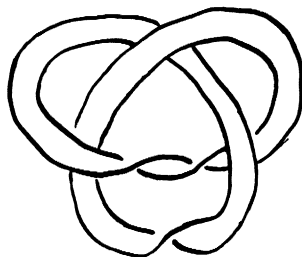


Figure 11 : câble

Soit k un noeud, U un voisinage tubulaire et $d : S_1 \times D_2 \rightarrow U$ un isomorphisme tel que $d(S_1 \times \{0\}) = \mathcal{L}$, $d(\{0\} \times bD_2) = m$. Notons $D(k; \rho, \epsilon)$ le noeud $d(k_0)$. On vérifie immédiatement que son type orienté ne dépend que de ρ , ϵ et du type orienté du noeud k . On dit que $D(k; \rho, \epsilon)$ est un noeud doublé, ou un double de k .

PROPOSITION 12.- Soient $\rho \in \mathbb{Z}$, $\epsilon = \pm 1$. Pour que deux noeuds k_1 et k_2 aient même type d'isotopie, il faut et il suffit que les groupes des noeuds $D(k_1, \rho, \epsilon)$ et $D(k_2, \rho, \epsilon)$ soient isomorphes.

Ce résultat de Whitten est aussi valable pour les entrelacs ([11], p. 63).

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Sur le bord $S_1 \times S_1$ de $S_1 \times D_2$, considérons la courbe fermée $T(a, b)$ paramétrée par

$$t \mapsto (\exp(2\pi i t/a), \exp(2\pi i t/b)).$$

Soient k un noeud, U et d comme ci-dessus. On note $C(k; a, b)$ le noeud $d(T(a, b))$ et on dit que c'est le noeud câblé (ou câble) d'invariants (a, b) associé à k . Lorsque k est le noeud trivial, on obtient le noeud torique d'invariants (a, b) . On vérifie que le type orienté de $C(k; a, b)$ ne dépend que de (a, b) et du type orienté de k .

PROPOSITION 13 ([18]).- Soient k_1 et k_2 des noeuds tels que k_2 ne soit pas

indécomposable et k_1 soit stérile et ne soit pas un cable. Si les groupes des noeuds $C(k_1; 1, 2)$ et $C(k_2; 1, 2)$ sont isomorphes, les noeuds k_1 et k_2 ont même type.

Au contraire d'un double, un cable ne permet pas de reconstituer l'orientation de S_3 . On ne peut donc espérer de la prop. 13 qu'une caractérisation du type du noeud et non du type d'isotopie. Cette espérance n'est pas déçue si l'on procède ainsi : soit k un noeud et soit r le noeud double (figure eight knot). Le groupe $H = G_+ * G_-$, où G_ϵ est le groupe du noeud $C(k \# r; 1, 2\epsilon)$ caractérise le type du noeud k . Cela résulte immédiatement de la prop. 13 en remarquant que r est indécomposable, inversible, amphichéral, stérile, sans être un cable.

Les démonstrations des prop. 12 et 13 utilisent des techniques analogues de topologie de dimension 3, analogues aussi à celles de [7]. Remarquons d'ailleurs que la prop. 11 généralise la prop. 12. Un noeud doublé est de genre 1, donc indécomposable. Si $D(k_1; \rho, \epsilon)$ et $D(k_2; \rho, \epsilon)$ ont même groupe, ils ont même type puisqu'ils sont stériles. D'autre part, H. Seifert ([14], voir aussi [20] et [17]) a démontré que le type d'un double détermine le type du noeud de départ d'où la conclusion.

BIBLIOGRAPHIE ¹

- [1] R. BING and J. MARTIN - Cubes with knotted holes, Trans. A.M.S., 155 (1971), 217-231.
- [2] E. BROWN and R. CROWELL - Deformation retractions of 3-manifolds into their boundaries, Ann. of Math., 82 (1965), 445-458.
- [3] R. CROWELL and R. FOX - Knot theory, Ginn and C^o, Boston Mass., 1963.
- [4] J. CONWAY and C. GORDON - A group to classify knots,
- [5] M. FORT (Editor) - Topology of 3-manifolds, Prentice-Hall, 1962.
- [6] A. HAEFLIGER - Sphères nouées, Atti della 2^a riunione del Grupement des mathématiciens d'expression latine, Firenze, (1961), 139-144.
- [7] K. JOHANNSON - Equivalences d'homotopie des variétés de dimension 3, C.R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975), 1009-1010.
- [8] M. KERVAIRE - Les noeuds de dimension supérieure, Bull. S.M.F., Paris, 93 (1965), 225-271.
- [9] F. LAUDENBACH - Topologie de la dimension 3, Astérisque n° 12, S.M.F., Paris, 1974.
- [10] L. NEUWIRTH - Knots groups, Ann. of Math. Studies n° 56, Princeton Univ. Press, (1965), § 4.50.
- [11] L. NEUWIRTH (Editor) - Knots, groups and 3-manifolds, Papers dedicated to the memory of R. H. Fox, Ann. of Math. Studies n° 84, Princeton Univ. Press, (1975), § 17.50.
- [12] C. PAPAKYRIAKOPOULOS - On Dehn's lemma and the asphericity of knots, Ann. of Math., 66 (1957), 1-26.
- [13] J.-C. PONT - La topologie algébrique des origines à Poincaré, P.U.F., Paris, 1974.
- [14] H. SEIFERT - Schlingknoten, Mat. Zeitsch., 52 (1949), 62-80.
- [15] SEIFERT and THRELFALL - Lehrbuch der Topologie, rééd. Chelsea.
- [16] H. SCHUBERT - Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, Sitzungsberichte Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur Kl., 3 (1949), 57-104.

¹ Les références [3], [10] et [9] contiennent des bibliographies importantes. On a souvent renvoyé à ces ouvrages plutôt qu'à l'article original. On peut consulter aussi le rapport de L. NEUWIRTH, Topology conference 1973, Lecture Notes n° 375, Springer-Verlag, Berlin.

- [17] H. SCHUBERT - Knoten und Vollringe, Acta Math., 90 (1953), 131-286.
- [18] J. SIMON - An algebraic classification of knots in S_3 , Ann. of Math., 97 (1973), 1-13.
- [19] F. WALDHAUSEN - On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math., 87 (1968), 56-88.
- [20] J. H. C. WHITEHEAD - On doubled knots, J. London Math. Soc., 12 (1937), 63-71.
- [21] W. WHITTEN - Isotopy types of knot spanning surfaces, Topology, 12 (1973), 373-380.
- [22] W. WHITTEN - Algebraic and geometric characterizations of knots, Inv. Math., 26 (1974), 259-270.