SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ALAIN CHENCINER

Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 424, p. 116-140

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__116_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI 424-01
25e année, 1972/73, n° 424 Février 1973

TRAVAUX DE THOM ET MATHER SUR LA STABILITÉ TOPOLOGIQUE

par Alain CHENCINER

1. Introduction

Il s'agit de la stabilité topologique des applications C^∞ d'une variété C^∞ dans une autre, plus précisément de la conjecture suivante : les applications topologiquement stables forment un ouvert dense dans l'espace $C^\infty_{pr}(N,P)$ de toutes les applications propres C^∞ de la variété N dans la variété P, muni de la topologie fine de Whitney (les définitions précises sont données au paragraphe 2).

Thom a donné dans [11] et [13] les grandes lignes d'une démonstration directe de la densité dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ du sous-espace des applications localement topologiquement stables ; Mather esquisse dans [6] une démonstration du théorème global lorsque N est compacte, basée sur le même outil (la théorie de Thom des morphismes stratifiés sans éclatement) mais faisant jouer un rôle particulier à sa caractérisation des applications différentiablement stables (voir [3] et [14]). C'est cette démonstration qui est exposée ici.

2. Définitions et résultats

N et P sont des variétés C^∞ de dimensions respectives n et p ; $C^\infty(N,P)$ est l'espace des applications C^∞ de N dans P, muni de la topologie engendrée par les ouverts suivants : $\{f \in C^\infty(N,P)$, $j^k f(N) \subset U$, k entier, U ouvert de l'espace des jets $J^k(N,P)\}$; ce dernier est muni de sa topologie naturelle de fibré localement trivial sur $N \times P$ à fibre $\mathbb{R}^q$ (voir [1]). $C^\infty_{pr}(N,P)$ est ouvert dans $C^\infty(N,P)$.

Soit $\mathrm{Diff}(N)$ (resp. $\mathrm{Homéo}(N)$) le groupe des difféomorphismes C^∞ (resp. homéomorphismes) de N. Le groupe produit $D \equiv \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P)$ (resp. $H \equiv \mathrm{Homéo}(N) \times \mathrm{Homéo}(P)$) agit sur $C^\infty(N,P)$ (resp. sur l'ensemble des applications continues de N dans P) par $(g,h)f = h \circ f \circ g^{-1}$.

2.1. DÉFINITION.- Soient f , $f' \in C^\infty(N,P)$; f' est différentiablement (resp. topologiquement) équivalente à f si f' est dans l'orbite de f sous l'action de D (resp. H). □

2.2. DÉFINITION.- $f \in C^\infty(N,P)$ est différentiablement (resp. topologiquement) stable si l'orbite de f sous l'action de D (resp. H) contient un voisinage de f dans $C^\infty(N,P)$. □

2.3. THÉORÈME.- Il existe une partie $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (appelée par Mather le "nice range" ou "bon domaine") telle que

(i) Si $(n,p) \in \mathcal{N}$, les applications différentiablement stables forment un ouvert dense de $C^\infty_{pr}(N,P)$.

(ii) Si $(n,p) \notin \mathcal{N}$, il existe un ouvert non vide de $C^\infty_{pr}(N,P)$ formé d'applications qui ne sont pas différentiablement stables. □

2.4. THÉORÈME.- Si N est compacte, les applications topologiquement stables forment un ouvert dense de $C^\infty(N,P)$. □

La démonstration de ces théorèmes comporte deux réductions successives, des fonctions aux germes (ou plutôt aux multigermes), puis des germes aux jets (comparer à [14]).

Soit $J^k(n,p) \cong \mathbb{R}^q$ l'espace des jets en 0 de germes d'applications C^∞ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^p, 0)$. Alors $J^k(n,p)$ s'identifie naturellement à la fibre du fibré $J^k(N,P) \to N \times P$; le groupe structural de ce fibré est le groupe A^k défini au paragraphe suivant. Chaque partie $\Sigma^k \subset J^k(n,p)$ invariante sous l'action de A^k engendre un sous-fibré $\Sigma^k_{N,P}$ de $J^k(N,P)$.

Le théorème de transversalité de Thom (modifié légèrement dans [3] pour s'adapter à la topologie de Whitney) montre que le théorème 2.4 et le (i) du théorème 2.3 découlent du théorème suivant :

2.5. THÉORÈME.- Les entiers n et p étant fixés, il existe un entier k , un sous-ensemble algébrique fermé Σ^k de $J^k(n,p)$ invariant par A^k , et une stratification de Whithey (voir paragraphe 7) S^k de $J^k(n,p) - \Sigma^k$ invariante

par A^k ayant les propriétés suivantes :

(a) codim $\Sigma^k > n$ et S^k n'a qu'un nombre fini de strates.

(b) Si N est compacte et si $f \in C^\infty(N,P)$ vérifie

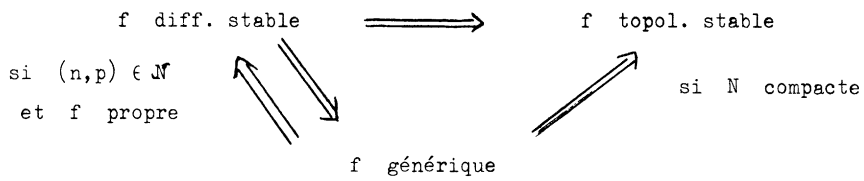
(b_1) $j^k f(N) \cap \Sigma^k_{N,P} = \emptyset$,

(b_2) f est multitransverse par rapport à la stratification $S^k_{N,P}$ de $J^k(N,P) - \Sigma^k_{N,P}$ déduite de S^k ,

alors f est topologiquement stable.

(c) Si $(n,p) \in \mathcal{N}$ (bon domaine), on peut prendre $k = p + 1$, et choisir Σ^{p+1} et S^{p+1} de façon à remplacer la conclusion de (b) par : " f est différentiablement stable " ; de plus, on peut remplacer l'hypothèse " N compacte " par l'hypothèse " f propre ". □

Une application f satisfaisant (b_1), (b_2) sera dite générique (si $(n,p) \in \mathcal{N}$, on supposera (c) réalisé). On a



Bien entendu, la transversalité ne se conservant pas par homéomorphisme, les applications topologiquement stables n'ont aucune raison d'être génériques au sens précédent. De la démonstration du théorème 2.5, on déduit pour les applications génériques des propriétés locales très fortes : si n et p sont fixés, il existe une liste finie de germes d'applications $g_i : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ telle que le germe en un point quelconque de N d'une application générique soit topologiquement (resp. différentiablement, si $(n,p) \in \mathcal{N}$) équivalent à l'un des germes de la liste (l'équivalence des germes se définit de manière analogue à celle des applications).

Si l'on pense à la pathologie que peuvent présenter les applications C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, même localement (l'image réciproque d'un point peut être un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$), on voit que de tels résultats de généricité sont

précieux.

3. Rappel de résultats sur la stabilité différentiable

Je rappelle ici les premiers travaux de Mather, en particulier [3], dont une partie a fait l'objet d'un précédent exposé (voir [14]). Sur l'ensemble des germes d'applications C^∞ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^p, 0)$, on fait agir les groupes suivants :

R = germes en 0 de difféomorphismes C^∞ de $(\mathbb{R}^n, 0)$

L = germes en 0 de difféomorphismes C^∞ de $(\mathbb{R}^p, 0)$

K = germes en 0 de difféomorphismes C^∞ de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ de la forme $\alpha(x,y) = (g(x), h_x(y))$, où g représente un élément de R et, pour tout x, h_x représente un élément de L.

$A = R \times L$.

On a des inclusions de sous-groupes $\begin{matrix} R \searrow \\ L \nearrow \end{matrix}$ $A \hookrightarrow K$.

L'action de K sur un germe est définie par

$$[\alpha.f](x) = h_x(f(g^{-1}(x))) .$$

On en déduit une action C^∞ du groupe de Lie K^k des k-jets en 0 d'éléments de K sur la variété $J^k(n,p) \cong \mathbb{R}^q$.

L'orbite d'un élément de $J^k(n,p)$ est donc l'image d'une variété lisse par une immersion injective ; en fait, c'est même une sous-variété ; la même propriété est valable si on remplace K^k par le sous-groupe A^k (voir [3], § 1).

On a déjà dit que A^k n'est autre que le groupe structural du fibré $J^k(N,P) \to N \times P$; la décomposition de la fibre $J^k(n,p)$ en K^k-orbites fournit donc une décomposition de l'espace total $J^k(N,P)$ en sous-variétés, appelées par Mather les "classes de contact". La décomposition de la fibre en A^k-orbites redonne, bien entendu, la décomposition de $J^k(N,P)$ provenant de l'action sur $C^\infty(N,P)$ du groupe $D = \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P)$.

Si r est un entier positif, on définit ${}_rJ^k(N,P)$ comme l'image récipro-

que par $\Pi_N^r : [J^k(N,P)]^r \to N^r$ du sous-espace $N^{(r)} = \{(x_1,\dots,x_r) \in N^r , x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}$. En particulier, ${}_1J^k(N,P)$ s'identifie à $J^k(N,P)$. A une application f correspond une extension ${}_rj^kf : N^{(r)} \to {}_rJ^k(N,P)$ (voir [3], § 1).

L'action diagonale de D sur $[C^\infty(N,P)]^r$ induit une action sur ${}_rJ^k(N,P)$ dont les orbites sont des sous-variétés. De même, on définit dans ${}_rJ^k(N,P)$ une partition en classes de contact qui sont des sous-variétés (voir [3], § 4).

La traduction géométrique de l'équivalence entre stabilité et stabilité infinitésimale (voir [3], [14], et le paragraphe 5) est le théorème suivant :

3.1. THÉORÈME.- Soit $f \in C^\infty_{pr}(N,P)$. Si $r \geq p+1$ et $k \geq p$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est différentiablement stable ;

(ii) ${}_rj^kf$ est transverse à chaque orbite de D dans ${}_rJ^k(N,P)$;

(iii) ${}_rj^kf$ est transverse à chaque classe de contact dans ${}_rJ^k(N,P)$. □

Rappelons que la transversalité de ${}_rj^kf$ aux classes de contact dans ${}_rJ^k(N,P)$ équivaut à la multitransversalité de j^kf aux classes de contact dans $J^k(N,P)$, c'est-à-dire à la transversalité jointe à la propriété suivante : si $t \leq r$, si $x_1,\dots,x_t \in N$ vérifient $f(x_1) = \dots = f(x_t) = y$, si U_i désigne la classe de contact de $j^kf(x_i)$, $1 \leq i \leq t$, et si g_i désigne le germe en x_i de l'application $f|(j^kf)^{-1}(U_i)$, les germes $g_1,\dots,g_t$ se coupent en position générale en y. (La même interprétation vaut, bien sûr, pour les orbites de D.)

Commentaire sur 3.1.

Les implications (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) sont claires, la première à cause du théorème de transversalité appliqué à chaque orbite, la deuxième parce que $K^k \supset A^k$.

L'implication profonde est (iii) $\Rightarrow$ (i) qui se décompose en (iii) $\Rightarrow$ f est infinitésimalement stable $\Rightarrow$ (i) , chaque étape utilisant le théorème de préparation différentiable (voir [14] et [15]).

Remarquons que (ii) et (iii) font intervenir un nombre non dénombrable de conditions de transversalité ; ceci explique que la stabilité différentiable ne soit pas, en général, une propriété générique.

Enfin, (ii) est la condition de transversalité que l'on attend, alors que (iii) est celle avec laquelle on peut travailler.

4. Que se passe-t-il dans le bon domaine ? (voir [3], § 7)

Soit $\Pi^k(n,p) \subset J^k(n,p)$ la réunion de tous les modules d'orbites de K^k ; plus précisément, l'ensemble W_s des éléments de $J^k(n,p)$ appartenant à une orbite de codimension $\geq s$ est un sous-ensemble algébrique fermé de $J^k(n,p) \simeq \mathbb{R}^q$; on note W_s^* la réunion des composantes irréductibles de W_s de codimension $< s$; la réunion $\Pi^k(n,p) = \bigcup_{s \geq 0} W_s^*$ de ces composantes est le plus petit sous-ensemble algébrique fermé K^k-invariant de $J^k(n,p)$ dont le complémentaire ne contienne qu'un nombre fini de K^k-orbites. Soit $\sigma^k(n,p) = \operatorname{codim} \Pi^k(n,p)$ et soit $\sigma(n,p) = \inf_k \sigma^k(n,p)$ (il est clair que $\sigma^k \leq \sigma^\ell$ si $k \geq \ell$). Le bon domaine est défini par $n < \sigma(n,p)$, et est déterminé dans [4]. La densité des applications différentiablement stables dans ce cas est alors une conséquence immédiate du théorème de transversalité et du théorème 3.1. Par contre, le (ii) du théorème 2.3 est loin d'être immédiat (voir [3], §§ 9, 10, 11). Le premier exemple de couple $(n,p) \in \mathcal{N}$ a été donné par Thom dans [8] (il s'agit du cas $n = p = s^2$, $s \geq 4$); dans [16], un exemple très intuitif montre que $(9,8) \in \mathcal{N}$.

Par ailleurs, on voit que, dans le bon domaine, le théorème 2.5 est une conséquence du théorème 3.1 : on peut prendre $k = p + 1$, $\Sigma^{p+1} = \Pi^{p+1}(n,p)$, et la stratification de $J^{p+1}(n,p) - \Sigma^{p+1}$ par les K^{p+1}-orbites.

En dehors du bon domaine, on ne peut pas éviter de rencontrer $\Pi^k(n,p)$,

c'est-à-dire des familles continues d'orbites de K^k ; on essaie alors de rassembler ces familles d'orbites en strates d'équisingularité topologique : génériquement, $j^k f(N)$ sera transverse aux strates de la stratification correspondante de $J^k(N,P) - \Sigma^k_{N,P}$ (mais pas aux classes de contact individuelles).

5. Les applications T. S. F. (ou de type singulier fini)

Disons, tout de suite, que les applications génériques obtenues au théorème 2.5 seront de ce type.

Il faut rappeler la notion de stabilité infinitésimale (les notations sont celles de Mather et diffèrent de celles de [14]) : Soient $\tau(f) : \tau(N) \to \tau(P)$ l'application tangente à f, $\theta(N)$ (resp. $\theta(f)$, resp. $\theta(P)$) le module sur $C^\infty(N)$, (resp. $C^\infty(P)$) des sections C^∞ de $\tau(N)$ (resp. $f^*\tau(P)$, resp. $\tau(P)$), et $tf : \theta(N) \to \theta(f)$, $\omega f : \theta(P) \to \theta(f)$ les applications définies par $tf(\xi) = \tau(f) \circ \xi$, $\omega f(\eta) = \eta \circ f$. Mather a montré (voir [14]) que f propre est différentiablement stable si et seulement si elle est infinitésimalement stable, c'est-à-dire si $tf(\theta(N)) + \omega f(\theta(P)) = \theta(f)$.

5.1. DÉFINITION.- $f \in C^\infty(N,P)$ est dite T. S. F. si $\theta(f)/tf(\theta(N))$ est un $C^\infty(P)$-module de type fini pour la structure définie via $f^* : C^\infty(P) \to C^\infty(N)$. □

Remarques.- (i) Rappelons que l'ensemble critique $\Sigma(f)$ de f est l'ensemble des $x \in N$ pour lesquels $\tau_x f$ n'est pas surjective ; il est clair que $\theta(f)/tf(\theta(N))$, qui est un $C^\infty(N)$-module de type fini, est, en fait, un $C^\infty(\Sigma(f))$-module de type fini ; on va voir que les applications T. S. F. sont exactement celles pour lesquelles $C^\infty(\Sigma(f))$ est un $C^\infty(P)$-module de type fini (§ 6, remarque).

(ii) L'analogue de la propriété T. S. F. pour les germes est d'avoir une K-codimension finie (voir plus loin la caractérisation locale des applications T. S. F.) ; or les germes de K-codimension finie sont exactement ceux qui s'obtiennent par changement de base à partir d'un germe stable (qu'on peut construire explicitement : voir [2]). L'intérêt des applications T. S. F. est de vérifier une propriété globale analogue.

5.2. DÉFINITION.- On appelle déploiement de f un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f} & P \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ N' & \xrightarrow{f'} & P' \end{array}$$

dans lequel i et j sont des plongements C^∞, et f' une application C^∞ transverse à j. □

On dit que f admet un déploiement stable si f' est stable.

5.3. THÉORÈME.- Si f est T. S. F., f admet un déploiement infinitésimalement stable. □

On verra que la réciproque est vraie un peu plus loin.

Esquisse de démonstration (d'après [7]). Le premier pas est analogue à la construction dans [2] d'un germe stable ayant une algèbre locale donnée (qui n'est autre que la construction du déploiement stable d'un germe de K-codimension finie). Si U est un $C^\infty(P)$-module projectif de type fini, et si $\Omega : \theta(P) \oplus U \to \theta(f)/tf(\theta(N))$ est un morphisme de $C^\infty(P)$-modules qui étend $\omega f : \theta(P) \to \theta(f)/tf(\theta(N))$ (léger abus de notation), il existe un déploiement (i,j,f') de f qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \theta(P) \oplus U & \xrightarrow{\Omega} & \theta(f)/tf(\theta(N)) \\ \alpha \,\wr\| & & \beta \,\wr\| \\ \theta(P') \otimes_{C^\infty(P')} C^\infty(P) & \xrightarrow{\Omega'} & \theta(f')/tf'(\theta(N')) \otimes_{C^\infty(N')} C^\infty(N) \end{array}$$

$C^\infty(N)$ (resp. $C^\infty(P)$) est un $C^\infty(N')$ (resp. $C^\infty(P')$)-module via i (resp. j) ; Ω' s'obtient par composition et passage au quotient naturels à partir de $\omega f'$ (on ne regarde que ce qui se passe au-dessus de $i(N)$ et $j(P)$). β est toujours un isomorphisme à cause de l'hypothèse de transversalité de f' et j.

Pour avoir un isomorphisme tel que α, il suffit de prendre pour P' l'espace total $E(\xi)$ d'un fibré vectoriel ξ sur P dont le module des sections est isomorphe à U. Il faut maintenant définir f' pour rendre le dia-

gramme commutatif : on présente U comme facteur direct dans un $C^\infty(P)$-module libre de type fini V (ce qui revient à regarder ξ comme sous-fibré de $P \times \mathbb{R}^t$) et on prolonge Ω en $\tilde{\Omega} : \theta(P) \oplus V \to \theta(f)/tf(\theta(N))$; soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $N \times \{0\}$ dans $N \times \mathbb{R}^t$ et soit $\tilde{f} : \mathcal{U} \to P \times \mathbb{R}^t$ l'application définie par $\tilde{f}(x,u_1,\ldots,u_t) = (f(x) - \sum_{i=1}^{t} u_i \alpha_i(x) , u_1 , \ldots, u_t)$ [α_i est un élément de $\theta(f)$ relevant l'image $\tilde{\Omega}(v_i)$ du générateur v_i de V qui correspond à la section constante $x \mapsto$ (x , i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^t$)] ; cette formule a un sens à condition d'identifier un voisinage de la section nulle dans $T(P)$ avec un voisinage de la diagonale dans $P \times P$ (on choisit alors $\mathcal{U}$ en conséquence).

L'application $\tilde{f}$ ainsi définie est transversale sur $P \times 0$ et donc aussi sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $P \times 0$ dans $E(\xi) \subset P \times \mathbb{R}^t$.

L'application $f' = \tilde{f} | \tilde{f}^{-1}(\mathcal{V}) : \tilde{f}^{-1}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$ répond à la question à condition de prendre pour i (resp. j) l'inclusion de $N \times \{0\}$ dans $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{V}) = N'$ (resp. l'inclusion de $P \times \{0\}$ dans $\mathcal{V} = P'$).

Dans le cas où f est T. S. F., on peut donc trouver f' telle que Ω' soit surjective. Une application f' ayant cette propriété est dite par Mather " infinitésimalement stable au-dessus de $j(P)$ ".

En se restreignant au besoin à l'image réciproque d'un voisinage de $j(P)$ dans P' , on peut supposer que la restriction de f' à $\Sigma(f')$ est propre ; on montre alors qu'il existe un voisinage P''' de $j(P)$ dans P' tel que la restriction f''' de f' à $N''' = f'^{-1}(P''')$ soit infinitésimalement stable (i.e. $\omega f'''$ surjectif). Le point fondamental est l'existence d'un voisinage P'' de $j(P)$ dans P' tel que la restriction f'' de f' à $N'' = f'^{-1}(P'')$ soit T. S. F. ; grâce à la proposition 5.5, ce résultat de finitude découle du théorème de préparation différentiable, et plus précisément du corollaire suivant appliqué au faisceau de $\underline{\mathcal{C}}^\infty(N')$-modules $\underline{\theta}(f')/tf'(\underline{\theta}(N'))$ ($\underline{\mathcal{C}}^\infty(N')$ = faisceau des germes de fonctions C^∞ de N' dans $\mathbb{R}$, $\underline{\theta}(f')$ = faisceau des germes de champs de vecteurs au-dessus de f' , etc...) :

5.4. THÉORÈME.- Soit $\underline{A}$ un faisceau de $\underline{\mathcal{C}}^\infty(N')$-modules localement fini (i.e. localement engendré par un nombre fini de sections). Si la restriction de f' au support de $\underline{A}$ est propre, si la fibre au-dessus de $y \in P'$ de cette restriction est un ensemble fini, et si $\bigoplus_{x \in (\mathrm{Supp}\,\underline{A}) \cap f'^{-1}(y)} \dim_{\mathbb{R}} \underline{A}_x / f'^{*}\mathcal{M}_y \underline{A}_x$ est fini, le faisceau $f'_*\underline{A}$ est localement fini en y comme faisceau de $\underline{\mathcal{C}}^\infty(P')$-modules. □

J'en viens, maintenant, à la caractérisation locale des applications T. S. F.

5.5. PROPOSITION.- $f \in \mathcal{C}^\infty(N,P)$ est T. S. F. , si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $f|\Sigma(f) : \Sigma(f) \to P$ est propre.

(b) Le nombre de points dans $\Sigma(f) \cap f^{-1}(y)$ est borné supérieurement pour $y \in P$.

(c) La dimension $\kappa(f,x) = \dim_{\mathbb{R}}[\theta(f)_x / (tf(\theta(N)_x) + f^{*}\mathcal{M}_{f(x)}\theta(f)_x)]$ est bornée supérieurement pour $x \in N$. □

Les notations $\theta(f)_x$,... sont les analogues germiques des notations $\theta(f)$,..., et $\mathcal{M}_{f(x)}$ est l'idéal maximal des germes de fonctions $(P,f(x)) \to \mathbb{R}$ qui sont nuls en $f(x)$.

Où trouver la démonstration de 5.5 : On voit facilement par l'absurde que, si f est T. S. F., la condition (a) est vérifiée. En ce qui concerne (b) et (c), on peut, pour tout $y \in P$, majorer $\sum_{x \in f^{-1}(y) \cap \Sigma(f)} \kappa(f,x)$ par le nombre de générateurs de $\theta(f)/tf(\theta(N))$ comme $\mathcal{C}^\infty(P)$-module. La réciproque se démontre de la même manière que le passage de la condition de transversalité aux K-orbites à la stabilité infinitésimale dans le théorème 3.1 (comparer à [3] et au dernier paragraphe de [14]).

Remarques.- (1) On déduit facilement de cette caractérisation locale le fait que si f admet un déploiement T. S. F., f est elle-même T. S. F. ; en particulier, si f admet un déploiement infinitésimalement stable, f est T. S. F.

(2) Ne pas confondre les notions de déploiement stable et de déploiement universel (voir [13]) ; même au niveau local, l'exemple de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^3,y)$ montre qu'un germe T. S. F. peut être de A-codimension infinie.

6. Démonstration du théorème 2.5 ; 1°) où l'on définit Σ^k

6.1. DÉFINITION.- Σ^k est l'ensemble des jets $z \in J^k(n,p)$ représentés par au moins un germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ tel que $\kappa(f,0) \geq k$. [Cette propriété est alors vraie pour tout germe représentant z (utiliser Nakayama).] □

On peut montrer que, si deux germes f et g sont dans la même orbite de K , alors $\kappa(f,0) = \kappa(g,0)$ ([2], cor. 2.6). On en déduit que Σ^k est une réunion de K^k-orbites, et est donc invariante sous l'action de A^k . Dans le cas particulier où la codimension de la K-orbite de f est finie, et si k est assez grand, $\kappa(f,0) + n - p$ est la codimension dans $J^k(n,p)$ de la K^k-orbite de $j^k f(0) = z$ ([2], th. 2.5).

Soit $\Sigma^k_{N,P}$ le sous-fibré de $J^k(N,P)$ de fibre Σ^k ; si N est compacte, et si $f \in C^\infty(N,P)$ vérifie $j^k f(N) \cap \Sigma^k_{N,P} = \emptyset$, f est T. S. F. Pour le voir, on se reporte à la caractérisation locale des applications T. S. F. ; le seul point non immédiat est le (b) qui nécessite N compacte : tout d'abord, on montre facilement que chaque point $x \in \Sigma(f) \cap f^{-1}(y)$ est isolé dans $f^{-1}(y)$ dès que $\kappa(f,x) < +\infty$ (voir [2], lemme 2.4) [si le germe de f en x est celui d'une application analytique, la réciproque est vraie : on déduit, en effet, du Nullstellensatz l'équivalence entre " $\kappa(f,x) < \infty$ " et " $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x))$ est au voisinage de x une intersection complète à singularité isolée " , où $\tilde{f}$ est le complexifié de f]. Si f est propre, il n'y a donc qu'un nombre fini de points dans chaque fibre de $f|\Sigma(f)$. On déduit alors du théorème 5.4 que ce nombre est localement borné : pour tout $y \in P$, il existe un voisinage U de y dans P tel que, pour tout $y' \in U$,

$$\sum_{x' \in f^{-1}(y')} \kappa(f,x') \leq \sum_{x \in f^{-1}(y)} \kappa(f,x) ,$$

d'où la conclusion.

Remarques.- (i) On a déjà vu, au début du paragraphe 5, que, si $C^\infty(\Sigma(f))$ est un $C^\infty(P)$-module de type fini, f est T. S. F. Le lemme 2.4 de [2] que l'on vient d'utiliser, joint au théorème 5.4, montre immédiatement la réciproque.

(ii) Il est facile de donner un exemple d'une application propre de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses ci-dessus mais pas le (b) de la proposition 5.5 ; une telle application n'est donc pas T. S. F.

6.2. PROPOSITION.- La codimension de Σ^k dans $J^k(n,p)$ tend vers l'infini avec k . □

Commentaires.- (1) Cette proposition dit essentiellement que le nombre de paramètres continus dont dépendent les modules de K-orbites ne croît pas trop vite en fonction de la codimension de ces orbites.
(2) Il est assez clair intuitivement qu'il faut une infinité de conditions dans $J^\infty(n,p)$ pour assurer la non-finitude du germe de morphisme $(f|\Sigma(f))_x$; c'est d'ailleurs ce qu'on montre dans ce qui suit.

Démonstration de 6.2 (d'après [7]) : Σ^k est un sous-ensemble algébrique fermé de $J^k(n,p)$ et n'a donc qu'un nombre fini de composantes irréductibles de codimension minimum ; l'affirmation suivante permet de trouver pour l'une quelconque Γ de ces composantes un entier $\ell > k$ tel que l'image réciproque de Γ par la projection canonique $J^\ell(n,p) \to J^k(n,p)$ ne soit pas toute entière contenue dans Σ^ℓ . Une récurrence évidente donne alors le résultat.

Affirmation (Milnor, Thom, Samuel,...). Tout élément $z \in J^k(n,p)$ a un représentant f pour lequel $\mu(f,0) < +\infty$.

J'ai déjà dit que, si f est analytique, la condition $\mu(f,0) < +\infty$ équivaut à la condition que $\tilde{f}^{-1}(0)$ ait en 0 une singularité isolée d'intersection complète (où $\tilde{f}$ = complexifié de f) c'est-à-dire que $\tilde{f}^{-1}(0) - 0$ soit localement une sous-variété de dimension $n - p$ si $n > p$ (resp. vide si $n \leq p$).

Soit $P = (P_1,\ldots,P_p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ l'application polynomiale de degré k représentant z , et soit $Q : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{np} \to \mathbb{C}^p$ l'application définie par

$$Q_i(x,t) = Q_i(x_1,\ldots,x_n, t_{11},\ldots,t_{np}) = P_i(x) + \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\, x_j^{k+1} \quad , \quad i = 1,\ldots,p \ .$$

La différentielle de Q est surjective en (x,t) si $x \neq 0$, donc $Q^{-1}(0) - (0 \times \mathbb{R}^{np})$ est une sous-variété. Le théorème de Sard assure alors l'existence d'une valeur régulière t_o de la projection de $Q^{-1}(0) - (0 \times \mathbb{R}^{np})$ sur $\mathbb{R}^{np}$. Considérons l'application $P_{t_o}(x) = Q(x,t_o) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ qui représente z ; $P_{t_o}^{-1}(0) - 0$ est une sous-variété complexe de dimension $n - p$, c'est-à-dire $\nu(P_{t_o},0) < +\infty$.

Conséquence : Si N est compacte, les applications T. S. F. de N dans P ont un complémentaire de codimension infinie : celà signifie que, pour tout entier $\alpha \geq 0$, une famille à α paramètres d'applications de N dans P peut être légèrement déformée de façon que toutes les applications de la famille soient T. S. F.

Il nous reste maintenant à stratifier les applications T. S. F. "génériques" et à montrer leur stabilité topologique en appliquant le théorème d'isotopie de Thom auquel le paragraphe suivant est consacré.

7. Morphismes stratifiés sans éclatement : le deuxième théorème d'isotopie de Thom

La technique des espaces stratifiés inaugurée par Whitney dans l'étude topologique des espaces analytiques a permis à Thom de donner un critère très utile de trivialité topologique d'une famille d'applications C^∞ (voir [9], [11], [12], [13]), tout en faisant comprendre la différence de nature entre les variations continues (modules) du type différentiable d'une application C^∞ et celles de son type topologique (voir [10]).

7.1. DÉFINITION.- Soit X une variété C^∞ et soit $Y \subset X$. Une stratification de Whitney de Y est une partition localement finie de Y en sous-variétés C^∞ (les strates) qui vérifie

(i) (Axiome de frontière) Si U et V sont des strates, et si $\bar{U} \cap V \neq \emptyset$, alors $V \subset \bar{U}$;

(ii) (Propriété (b)) Soient U et V deux strates avec $V \subset \bar{U}$, soient $x \in V$, et $\varphi : \mathbf{R}^n \to X$ un difféomorphisme sur un voisinage de x dans X. Soit $\{x_i\}$ (resp. $\{y_i\}$) une suite de points de $\varphi^{-1}(U)$ (resp. de $\varphi^{-1}(V)$) convergeant vers $\varphi^{-1}(x)$. On suppose que, pour tout i, $x_i \neq y_i$, que la suite de droites $\{x_i y_i\}$ converge dans $P_{n-1}(\mathbf{R})$ vers ℓ, et que la suite des plans tangents $\{T_{x_i}\varphi^{-1}(U)\}$ converge vers τ dans la grassmannienne correspondante. Alors $\ell \subset \tau$. □

Commentaires.- (1) On vérifie facilement que la propriété (ii) est indépendante du choix de φ et équivaut à la conjonction des classiques propriétés (a) et (b) de Whitney.

(2) Mather parle plutôt de préstratification, réservant le nom de stratification à la donnée en chaque point de Y du germe de la strate contenant ce point ; c'est en fait sous cette forme locale que se présentent naturellement les stratifications qu'on va considérer.

Le but de ce paragraphe est de faire comprendre la démonstration du théorème ci-dessous, dû à Thom, et exposé par Mather dans [5] et [6].

7.2. THÉORÈME (2ème théorème d'isotopie).- Soit $X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ un diagramme de variétés et d'applications C^∞ (qu'on peut considérer comme une famille à 1 paramètre d'applications C^∞), et soient $Y \subset X$, $Y' \subset X'$ des fermés admettant une stratification de Whitney. On suppose que

(i) $f(Y') \subset Y$.

(ii) Pour toute strate U' de Y', la restriction de f à U' est une submersion sur une strate de Y.

(iii) Pour toute strate U de Y, la restriction de g à U est une submersion sur $\mathbf{R}$.

(iv) Les restrictions $f|Y' : Y' \to Y$ et $g|Y : Y \to \mathbf{R}$ sont des

applications propres.

(v) f n'a pas d'éclatement (la définition est donnée plus loin).

Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} B' \times \mathbb{R} & \xrightarrow{h \times id} & B \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{projection}} & \mathbb{R} \\ \varphi' \downarrow & & \varphi \downarrow & & \| \ \text{id.} \\ Y' & \xrightarrow{f|Y'} & Y & \xrightarrow{g|Y} & \mathbb{R} \end{array}$$

dans lequel B (resp. B') est la fibre de Y (resp. Y') au-dessus de $0 \in \mathbb{R}$, h est la restriction de f à B' , et φ , φ' sont des homéomorphismes (on peut encore dire que la famille d'applications C^∞ considérée est topologiquement triviale). □

Technique de démonstration. On cherche à relever le champ de vecteurs standard $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\mathbb{R}$ en un champ ξ tangent aux strates de Y , puis à relever ξ en un champ ξ' tangent aux strates de Y' ; pour que l'intégration de ces champs fournisse deux homéomorphismes (qui vérifieront automatiquement les conclusions du théorème), il faut contrôler ξ et ξ' au voisinage des points où se raccordent des strates : on utilise à cet effet un système bien choisi de voisinages tubulaires des strates.

(1) Construction de ξ . On commence par trouver pour chaque strate U de Y un voisinage tubulaire T_U de U dans X de façon que la collection des T_U ait les propriétés suivantes de compatibilité :

Soient $|T_U|$ l'espace total de T_U , $\pi_U : |T_U| \to U$ la projection, $\rho_U : |T_U| \to \mathbb{R}_+$ la fonction tubulaire (le fibré T_U est défini comme un voisinage de la section nulle dans un fibré muni d'un produit scalaire, et ρ_U est la fonction "carré de la longueur d'un vecteur dans sa fibre"). On demande que, si $V \subset \bar{U} - U$, les fibres au-dessus de $|T_V| \cap U$ de T_U soient contenues dans les fibres correspondantes de l'application $(\pi_V , \rho_V) : |T_V| \to V \times \mathbb{R}$ (on dira avec Mather que la restriction de T_U à $|T_V| \cap U$ est compatible avec l'application (π_V , ρ_V)).

La construction de ces voisinages tubulaires se fait par récurrence ascendante sur la dimension des strates ; plus précisément, l'existence de T_U lorsque T_V est donné est conséquence des deux faits suivants :

7.3. Fait (1) (Théorème des voisinages tubulaires).- Soit $F : X \to Z$ une application C^∞ et soit U une sous-variété de X telle que $F|U$ soit une submersion. Il existe un voisinage tubulaire T_U de U dans X qui est compatible avec F . □

La démonstration ne diffère pas sensiblement de celle du théorème classique ; c'est bien entendu une forme relative de ce théorème qu'on utilise dans la récurrence.

7.4. Fait (2).- Soient U , $V \subset \bar{U} - U$ deux sous-variétés de X vérifiant la propriété (ii) de la définition 7.1. Soit T_V un voisinage tubulaire de V dans X . Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de V dans $|T_V|$ tel que la restriction à $U \cap \mathcal{V}$ de l'application (π_V , ρ_V) soit une submersion. □

La démonstration est triviale à partir des définitions ; on peut remarquer que la propriété analogue pour la seule application π_V ne nécessite que la propriété (a) de Whitney.

On peut donc supposer donnée une famille $\{T_U\}$ ayant les propriétés demandées. Compte tenu de l'hypothèse (iii) de 7.2, la même démonstration fournit d'ailleurs une famille $\{T_U\}$ de voisinages tubulaires qui sont en plus compatibles avec g . On peut alors construire par récurrence un relèvement ξ du champ $\frac{\partial}{\partial t}$, tangent aux strates de Y , et contrôlé par la famille $\{T_U\}$, c'est-à-dire un champ ξ qui vérifie (on rétrécit au besoin les T_U) :

(1) $\forall\, y \in Y$, $g_*(\xi(y)) = \frac{\partial}{\partial t}\,(g(y))$ (condition de relèvement) ;

(2) $\forall\, y \in Y \cap |T_U|$, $\pi_{U_*}(\xi(y)) = \xi(\pi_U(y))$ (condition de cohérence) ;

(3) $\forall\, y \in Y \cap |T_U|$, $\xi(y)\rho_U = 0$; cette dernière condition empêche les lignes intégrales de ξ d'origine dans $|T_U| \cap Y$ d'aller se perdre dans $\bar{U} - U$ ou hors de $|T_U|$, en les canalisant dans les surfaces de niveau de ρ_U .

On montre sans trop de difficultés qu'un tel champ, bien que non continu

en général, est localement (et en fait globalement car $g|Y$ est propre) intégrable, ce qui fournit l'homéomorphisme φ . On vient en fait d'indiquer la démonstration du 1er théorème d'isotopie de Thom (voir [9] et [12]).

(2) Construction de ξ' . Si on remplace g par f , la construction précédente est possible dans l'image réciproque par f d'une strate de Y ; plus généralement, la construction d'un système $\{T_{U'}\}$ de voisinages tubulaires des strates de Y' relevant $\{T_U\}$ et permettant de contrôler suffisamment ξ' pour le rendre intégrable est possible moyennant l'hypothèse " f n'a pas d'éclatement " que je vais expliciter maintenant :

7.5. DÉFINITION.- f n'a pas d'éclatement si, pour tout triplet (U',V',y') , U' , V' strates de Y' , $y' \in V' \subset \bar{U}' - U'$, la condition suivante est vérifiée :

(a_f) Pour toute suite de points $y'_i \in U'$ convergeant vers y' telle que la suite $\{\ker d(f|U')_{y'_i}\}$ ait une limite τ , on a $\tau \supset \ker d(f|V')_{y'}$ (si f est l'application nulle, on retrouve la condition (a) de Whitney). □

L'exemple typique d'une application présentant de l'éclatement est l' "éclatement des géomètres algébristes" qui s'écrit localement

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad f(x,y) = (x\,,\,xy) \ , \text{ avec}$$

V' définie par $x = 0$, et $V = (0,0)$.

Si f n'a pas d'éclatement, on construit une famille $\{T_{U'}\}$ telle que

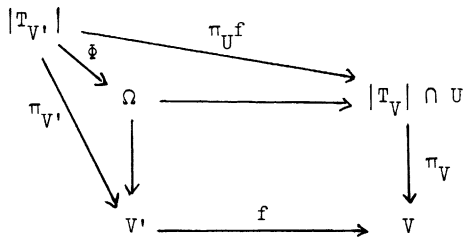
(i) Si $f(U') \subset U$, on a $f(|T_{U'}|) \subset |T_U|$ et $f\pi_{U'} = \pi_U f$.

(ii) Si $V' \subset \bar{U}' - U'$, la restriction de $T_{U'}$ à $|T_{V'}| \cap U'$ est compatible avec l'application $\pi_{V'}$; si de plus $f(V')$ et $f(U')$ sont dans la même strate de Y , on peut demander la compatibilité avec l'application $(\pi_{V'}\,,\,\rho_{V'})$.

On se convainc facilement qu'une telle famille $\{T_{U'}\}$ ne peut exister dans l'exemple précédent, les conditions (i) et (ii) (1ère partie) étant incompatibles.

La démonstration de l'existence de $\{T_{U'}\}$ se fait par récurrence exactement comme pour celle de $\{T_U\}$, y compris dans le cas de deux strates de Y' ayant pour image des strates distinctes de Y , à condition d'interpréter comme suit la condition de non éclatement :

Soient U' et V' telles que $f(U') \subset U$, $f(V') \subset V$, $V' \subset \bar{U}' - U'$; on suppose $T_{V'}$ construit de façon que $f\pi_{V'} = \pi_V f$: il existe alors une application Φ rendant commutatif le diagramme



(Ω désigne le produit fibré et on rappelle que $\pi_V \pi_U = \pi_V$).

La condition (a_f) pour tous les triplets (U',V',y') , $y' \in V'$, équivaut à la condition :

$\Phi \big| |T_{V'}| \cap U'$ est une submersion (il faut peut-être restreindre $T_{V'}$).

On peut alors construire $T_{U'}$ qui, au-dessus de $|T_{V'}| \cap U'$, soit à la fois compatible avec $\pi_U f$ et $\pi_{V'}$ (conditions (i) et (ii)).

On peut alors relever ξ en un champ ξ' contrôlé par $\{T_{U'}\}$ (bien entendu, la condition 3) ne peut être exigée que dans l'image réciproque par f d'une strate de Y , et le fait que ξ vérifie cette condition 3) n'intervient pas dans la construction de ξ').

L'intégrabilité locale de ξ' dans l'image réciproque d'une strate de Y se voit comme précédemment ; l'intégrabilité locale de ξ' sur tout Y' découle de celle de ξ sur Y .

On en déduit alors l'intégrabilité globale grâce à la propreté de $f|Y'$, et donc l'existence de φ' et la démonstration du théorème 7.2.

Remarque.- Le théorème 7.2 devient faux si on supprime la condition de non éclatement. Dans [10], Thom construit une famille à un paramètre d'applications polynomiales de R^3 dans R^3 (donc $R^3 \times R \xrightarrow{f} R^3 \times R \xrightarrow{g} R$) vérifiant les autres conditions du théorème pour une stratification bien choisie mais telle que chacune des applications de la famille (et donc aussi f) présente de l'éclatement ; il montre que deux quelconques des applications de la famille ont un type topologique différent. De tels modules ne peuvent exister pour des applications triangulées (qui ne présentent jamais d'éclatement) et Thom conjecture que l'absence d'éclatement est une CNS pour qu'une application stratifiée puisse être triangulée.

8. Démonstration du théorème 2.5 ; 2°) où l'on stratifie $J^k(n,p) - \Sigma^k$

On commence par montrer l'existence, pour chaque application infinitésimalement stable $f' : N' \to P'$, de stratifications canoniques $S_{f'}(N')$ et $S_{f'}(P')$ qui fassent de f' un morphisme stratifié sans éclatement. On définit alors la stratification S^k de $J^k(n,p) - \Sigma^k$ de façon que si $f : N \to P$ (N compacte) vérifie $j^k f(N) \cap \Sigma^k_{N,P} = \emptyset$, et si (i,j,f') est un déploiement stable de f , la multitransversalité de f par rapport à $S^k_{N,P}$ soit équivalente à la transversalité de j par rapport à $S_{f'}(P')$.

8.1. Stratification de f' . Les trois propriétés qu'on utilise sont :

(i) La restriction de f' à $\Sigma(f')$ est un morphisme propre et fini (voir § 5).

(ii) Le germe de f' en un point quelconque de N' est différentiablement équivalent au germe d'une application polynomiale (à savoir, le représentant polynomial de son jet d'ordre dim P' + 1 dans une carte ; voir [2]).

(iii) Le multigerme de f' en un nombre quelconque de points est infinitésimalement stable.

On raisonne alors localement : si N' est un ouvert semi-algébrique (par forcément connexe) de $R^{n'}$ et P' un ouvert semi-algébrique de $R^{p'}$, les méthodes utilisées dans [9] et [12] permettent de trouver des stratifications de Whitney analytiques $S_{f'}(N')$ de N' et $S_{f'}(P')$ de P' telles que

(1) $\Sigma(f')$ soit un sous-ensemble stratifié.
(2) Si $x' \in \Sigma(f')$, la restriction de f' à la strate passant par x' est une immersion, et l'image de cette strate est une strate de P' .
(3) Si $x' \in N' - \Sigma(f')$, la strate de x' coïncide localement avec l'image réciproque par f' de la strate contenant $f'(x')$.
(4) Le couple $(S_{f'}(N'), S_{f'}(P'))$ est minimal parmi les couples de stratifications de Whitney analytiques ayant les propriétés précédentes. □

La démonstration se fait par récurrence à partir de la stratification de Whitney analytique du sous-ensemble semi-algébrique $\Sigma(f')$ de $R^{n'}$ (construite par exemple dans [9]) ; chaque strate U est à la fois une sous-variété analytique et un sous-ensemble semi-analytique de $R^{n'}$. L'ensemble des points de U où le rang de $f'|U$ s'abaisse à une adhérence semi-analytique de dimension inférieure à celle de U , ce qui permet de raffiner la stratification de N' pour avoir la propriété de rang constant sur chaque strate.

Le fait que le nombre de points dans les fibres de $f'|\Sigma(f')$ soit borné (en fait par $\dim P' = p'$, voir [3]) et que le multigerme de f' en une fibre soit infinitésimalement stable permet de définir l'image directe de cette stratification par f' : une strate en $y' \in P'$ est localement l'intersection des images par f' des strates de N' aux points de $\Sigma(f') \cap f'^{-1}(y')$. [Il faut remarquer qu'en général une telle opération ne définit pas une stratification, ne serait-ce que parce que l'image par f' d'un germe d'ensemble n'est pas, sans condition sur f' , un germe d'ensemble bien déterminé (regarder l'exemple suivant la définition 7.5).]

On prend enfin l'intersection de la stratification de N' avec la stratification image réciproque de celle qu'on vient de définir sur P' .

Pour globaliser, on part d'un recouvrement ouvert de P' ; le caractère fonctoriel de ces stratifications locales et le fait que deux germes analytiques infinitésimalement stables qui sont différentiablement équivalents le sont analytiquement permettent le recollement des stratifications locales en des stratifications de Whitney de P' et d'un voisinage de $\Sigma(f')$ dans N' ; on finit de stratifier N' en stratifiant $N' - \Sigma(f')$ par la condition (3) du cas local.

On remarque que la condition (2) du cas local implique que f' n'a pas d'éclatement.

8.2. Stratification de $J^k(n,p) - \Sigma^k$.

Si $z \in J^k(n,p) - \Sigma^k$ est le jet d'un germe stable $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$, on considère la stratification de $\mathbb{R}^n$ qu'on vient de lui associer, et on définit le germe de la strate de S^k en z comme la réunion des K^k-orbites locales des jets correspondant aux germes de $\tilde{f}$ en tous les points de la strate (locale) de $\mathbb{R}^n$ qui contient 0 . Il est clair que là où elle est définie, cette stratification répond aux exigences du début du paragraphe 8 (revoir le théorème 3.1).

Pour traiter le cas général, j'ai déjà remarqué que les germes de K-codimension finie sont l'analogue local des applications T. S. F. ; en particulier, la démonstration de 5.3 fournit pour un tel germe $f : (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$ un entier q et un germe stable $\tilde{f} : (\mathbb{R}^{n+q},0) \to (\mathbb{R}^{p+q},0)$ qui est dans la K-orbite de $f \times id_{\mathbb{R}^q}$. Soit $z = j^k f(0)$; on considère l'application de stabilisation qui à $z \in J^k(n,p)$ associe $z \times id_{\mathbb{R}^q} \in J^k(n+q, p+q)$; on stratifie $J^k(n+q, p+q)$ au voisinage de $z \times id_{\mathbb{R}^q}$ en faisant agir K^k sur la stratification définie au voisinage de $j^k\tilde{f}(0)$, et on stratifie $J^k(n,p)$ au voisinage de z par image réciproque par l'application de stabilisation.

9. Démonstration du théorème 2.5 ; 3°) où tout devient clair (?)

Si n et p sont donnés, on fixe k de façon que $\operatorname{codim} \Sigma^k > n$. Si N est compacte, on déduit de ce qui précède qu'une application générique $f : N \to P$ s'obtient à partir d'une application stable $f' : N' \to P'$ par un changement de base j transverse à la stratification canonique $S_{f'}(P')$ de P' ; on en déduit (voir [9]) que l'application f est elle-même un morphisme stratifié sans éclatement (les applications de ce type sont donc denses dans $C^\infty(N,P)$ lorsque N est compacte ; il est intéressant à ce point de lire la conclusion de [10], où la condition 2°) correspond à la transversalité vérifiée par les applications génériques). Il nous reste à montrer que f est topolo-

giquement stable : si g est proche de f, on la prolonge en g' proche de f' (continûment en fonction de g) ; f' étant stable s'écrit $\psi \circ g' \circ \varphi^{-1}$ où φ (resp. ψ) est un difféomorphisme de N' (resp. P') proche de l'identité. On en déduit que $(i_g = \varphi \circ i, j_g = \psi \circ j, f')$ est un déploiement stable de g. De plus, on construit de la même façon une famille différentiable à un paramètre $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ qui vérifie $f_0 = f$, $f_1 = g$, à laquelle est associée une famille à un paramètre de déploiements stables (i_{f_t}, j_{f_t}, f') qui ont la propriété que j_{f_t} est transverse à $S_{f'}(P')$ pour tout t.

(Cette construction est possible car f' est homotopiquement stable, voir [14].)

On peut alors appliquer le 2ème théorème d'isotopie (7.2) au diagramme

$$N \times \mathbb{R} \xrightarrow{F} P \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}$$

où $F(x,t) = (f_t(x), t)$, $\pi(y,t) = t$, et où les stratifications sont induites par les applications transverses $N \times \mathbb{R} \ni (x,t) \mapsto i_t(x) \in N'$, et $P \times \mathbb{R} \ni (y,t) \mapsto j_t(y) \in P'$.

10. Remarques finales

Si on ne s'intéresse qu'à la stabilité <u>locale</u> des applications, on peut donner du théorème 2.5 un énoncé dans lequel n'apparaît plus la condition de transversalité à la stratification $S^k_{N,P}$. Pour simplifier, occupons-nous de la stabilité différentiable : on sait (voir [2]) que tout germe stable $f : (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^p,0)$ est équivalent par A à son jet d'ordre $p+1$; la notion de jet stable a donc un sens dans $J^{p+1}(n,p)$ ce qui implique que, si $z \in J^{p+1}(N,P)$, ou bien pour tout germe $f : (N,x) \to (P,y)$ représentant z l'application $j^{p+1}f$ est transversale en z à la classe de contact de z, ou bien il n'existe pas de germe f représentant z tel que $j^{p+1}f$ soit transversale en z à cette classe de contact. Soit Uns^{p+1} le sous-ensemble de $J^{p+1}(n,p)$ formé des jets instables ; Uns^{p+1} est algébrique fermé et invariant par A^{p+1} (mais pas par K^{p+1} !!), il lui correspond un sous-fibré $\mathrm{Uns}^{p+1}_{N,P}$ de $J^{p+1}(N,P)$ qui est exactement l'ensemble des z qui sont des

points de non-transversalité sur leur classe de contact (on montre dans [2] que le complémentaire de Uns^{p+1} dans une K^{p+1}-orbite est exactement une A^{p+1}-orbite, ce qui éclaire l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) de 3.1). La stabilité différentiable <u>locale</u> de f est donc assurée par la seule condition $j^{p+1}f(N) \cap Uns^{p+1}_{N,P} = \emptyset$ (bien entendu, on assure ainsi la condition de transversalité, mais pas celle de multitransversalité). Dans [3], Mather montre l'équivalence entre $\operatorname{codim} Uns^{p+1} \leq n$ et $\sigma(n,p) \leq n$; on retrouve le (i) du théorème 2.3. Pour en déduire le (ii), il y a encore un pas non trivial à savoir l'existence, pour toute sous-variété lisse de $J^k(N,P)$ de codimension $\leq n$, d'un point z transversal (i.e. tel qu'il existe un germe $f : (N,x) \to P$ vérifiant $j^kf(x) = z$ et " j^kf est transversal en z à cette sous-variété ").

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM and J. ROBBIN - Transversal mappings and flows, Benjamin, 1967.

[2] J. MATHER - Classification of stable germs by R-algebras, Publ. Math. I.H.E.S., 37 (1969), p. 223-248.

[3] J. MATHER - Transversality, Advances in Math., 4 (1970), p. 301-336.

[4] J. MATHER - The nice dimensions, Proceedings of Liverpool singularities Symposium I, Lecture Notes in Math., n° 192, p. 207-253, Springer-Verlag, 1971.

[5] J. MATHER - Notes on topological stability, Preprint, 1970.

[6] J. MATHER - Stratifications and mappings, Preprint, 1971.

[7] J. MATHER - Lettre, sept. 1972.

[8] R. THOM and H. LEVINE - Singularities of differentiable mappings, Proceedings of Liverpool singularities Symposium I, Lecture Notes in Math., n° 192, p. 1-89, Springer-Verlag, 1971.

[9] R. THOM - Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques, Sém. Bourbaki, exposé 281, vol. 1964/65, Addison-Wesley/Benjamin.

[10] R. THOM - La stabilité topologique des applications polynomiales, l'enseignement Mathématique, VIII, 1962, p. 24-33.

[11] R. THOM - Local topological properties of differentiable mappings, Colloquium on Differential Analysis, Tata Institute, Bombay, 1964, Oxford Univ. Press, London, p. 191-202.

[12] R. THOM - Ensembles et morphismes stratifiés, Bulletin Amer. Math. Soc., vol. 75, n° 2, 1969, p. 240-284.

[13] R. THOM - Modèles mathématiques de la morphogénèse, chap. 3 : Théorie du déploiement universel, I.H.E.S., mars 1971.

[14] J.-C. TOUGERON - Stabilité des applications différentiables (d'après J. Mather), Sém. Bourbaki, exposé 336, vol. 1967/68, Addison-Wesley/Benjamin.

[15] C. T. C. WALL - Lectures on C^{∞}-stability and classification, Proceedings of Liverpool singularities Symposium I, Lecture Notes in Math., n° 192, p. 178-206, Springer-Verlag, 1971.

[16] F. PHAM - Classification des singularités, Preprint Université de Nice, 1971.