BERNARD MALGRANGE

Opérateurs de Fourier

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. nº 411, p. 219-238
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__219_0>

Séminaire BOURBAKI 411-01
24e année, 1971/72, n° 411 Février 1972

OPÉRATEURS DE FOURIER

[d'après HÖRMANDER et MASLOV]

par Bernard MALGRANGE

Introduction

Il est connu depuis longtemps des physiciens que l'on obtient, pour de petites longueurs d'ondes, de bonnes approximations des solutions des équations d'évolution du type de l'équation des ondes au moyen de développements asymptotiques obtenus à partir des équations des bicaractéristiques, c'est-à-dire à partir des équations de "l'optique géométrique". Le même fait se retrouve dans la relation mécanique - classique - mécanique quantique sous le nom de "méthode B.K.W.".

Ces faits avaient déjà été utilisés il y a quelques années par des mathématiciens (voir notamment [3] et [6]), mais d'une manière relativement épisodique. Les travaux de Maslov [7] et de Hörmander [4], [1], explorent systématiquement ce point de vue, avec des résultats fort importants et spectaculaires. Après mûres réflexions, le conférencier s'est finalement convaincu qu'il lui était strictement impossible de donner une idée d'ensemble de la question dans un nombre de pages raisonnable ; d'ailleurs, il en était déjà convaincu a priori. Déjà l'historique remplirait le nombre de pages réglementaire, aussi on évitera d'en parler.

Le présent papier se contente donc de donner un résumé de [4], résumé d'ailleurs incomplet puisque la question des "supports essentiels" (appelés dans [4] "wave front sets") n'est pas abordée, ni par conséquent les relations avec les travaux de Sato et de ses élèves ; voir à ce sujet [9], et les travaux ultérieurs de Sato, Kawai, Kashiwara. Les applications de [4] sont développées dans [1] et résumées dans [5], où l'on trouvera aussi les références aux travaux de Egorov, Nirenberg-Trèves et d'autres qui utilisent les opérateurs de Fourier. Enfin, pour les travaux de Maslov lui-même, et notamment pour ce qui concerne l'approximation classique en mécanique quantique, dont ne parlent pas les autres auteurs cités, je renvoie à [8] et à son livre [7] dont une traduction française devrait être à l'impression. Le lecteur ne trouvera donc ici que fort peu d'indications sur la motivation des notions introduites. J'espère pouvoir réparer dans une certaine mesure cette omission lors de l'exposé oral.

I. OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS ET INTÉGRALES OSCILLANTES

Soit X un ouvert de $\mathbf{R}^n$; nous noterons $\Sigma^m(X, \mathbf{R}^p)$ l'espace des fonctions $a(x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbf{R}^p, \mathbf{C})$, telles qu'on ait, pour tout $K \subset\subset X$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} , \qquad (x,\xi) \in K \times \mathbf{R}^p .$$

On utilise, bien sûr, les notations habituelles sur les multi-entiers, avec $D_\xi^\alpha = (-i \frac{\partial}{\partial\xi})^\alpha$, et $|\xi|$ la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^p$.

Pour $n = p$, on associe à a l'opérateur $A : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{C}^\infty(X)$ qui est ainsi défini :

$$(1.1) \qquad (Af)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

avec $\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\xi}dx$, $x\xi = \Sigma x_\ell \xi_\ell$.

Supposons en particulier que a soit un polynôme en ξ : on aura alors $a = \Sigma a_\alpha \xi^\alpha$, $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, et la formule d'inversion de Fourier nous donne $Af = \Sigma a_\alpha D^\alpha f$: ici, A est donc un générateur différentiel, d'où le nom "d'opérateurs pseudo-différentiels" donné aux A dans le cas général.

Le noyau de A est, par définition, la distribution K_A sur X^2 définie par $\langle K_A, g(x)f(y)\rangle = \int (Af)(x)g(x)dx$; on voit immédiatement que K_A est défini à partir de a par la formule suivante : pour $h \in \mathcal{D}(X^2)$, on a :

(1.2) $$\langle K_A , h\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int e^{i\xi x} a(x,\xi)dxd\xi \int h(x,y)e^{-i\xi y}dy .$$

Le lecteur pourra vérifier facilement la convergence de l'intégrale double, en utilisant le fait que $\int h(x,y)e^{i\xi y}\,dy$ est à décroissance rapide en (x,ξ) et " à support compact en x ".

Notons maintenant que la formule précédente s'écrit <u>formellement</u>

(1.3) $$\langle K_A , h\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int e^{i\xi(x-y)} a(x,\xi)\, h(x,y)\, dx\, dy\, d\xi .$$

Nous allons donner un procédé qui permette de lui donner un sens ; en vue des paragraphes suivants, considérons plus généralement une expression

(1.4) $$\int e^{i\varphi(x,\theta)}\, f(x,\theta)\, dx\, d\theta$$

avec les hypothèses suivantes :

P.1 $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X\times \mathbb{R}^N_*)$, $\mathbb{R}^N_* = \mathbb{R}^N - \{0\}$.

P.2 φ est réelle et sans point critique.

P.3 φ est homogène de degré 1 en θ , i.e. $\varphi(x,t\theta) = t\varphi(x,\theta)$, $t > 0$.

P.4 $f\in\Sigma^m(X, \mathbb{R}^N)$, et il existe $K \subset\subset X$ avec $f(x,\theta) = 0$ pour $x \notin K$.

On désigne par $I_\varphi(f)$ la valeur de l'intégrale (1.4) lorsqu'elle converge, ce qui sera le cas, par exemple, lorsqu'on a $m < -(N+1)$; pour lui donner un sens dans le cas général, on opère ainsi :

Il est facile de fabriquer un $L = \Sigma a_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \Sigma b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c$, tel qu'on ait $L(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$, avec $a_j \in \Sigma^0(X , \mathbb{R}^N)$; $b_k , c \in \Sigma^{-1}(X ; \mathbb{R}^N)$. Supposons $f = 0$ au voisinage de $\theta = 0$ (on se ramène à ce cas en posant $f = \alpha f + (1-\alpha)f$, $\alpha \in \mathcal{D}_\theta$, $\alpha = 1$ au voisinage de 0 ; le terme correspondant à αf dans l'intégrale converge trivialement).

Soit $\chi \in \mathcal{D}_\theta$, $\chi = 1$ au voisinage de 0 ; posons $f_\varepsilon(x,\theta) = \chi(\varepsilon\theta)f(x,\theta)$; en appelant M le transposé de L , il vient, en intégrant par parties k fois

$$I_\varphi(f_\varepsilon) = I_\varphi(M^k f_\varepsilon) = \int e^{i\varphi}(M^k f_\varepsilon) dx\, d\theta .$$

On a $M^k f \in \Sigma^{m-k}$; si l'on a choisi k assez grand pour qu'on ait $m-k \leq -(N+1)$, on voit que $I_\varphi(f_\varepsilon)$ converge, pour $\varepsilon \to 0$ vers l'intégrale usuelle indépendante de χ

$$I_\varphi(M^k f) = \int e^{i\varphi}(M^k f) dx\, d\theta .$$

Par définition, nous poserons $I_\varphi(f) = I_\varphi(M^k f)$ ou encore $I_\varphi(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varphi(f_\varepsilon)$ et nous appellerons $I_\varphi(f)$ une "intégrale oscillante" ; nous emploierons les mêmes notations que pour les intégrales usuelles. Les formules usuelles d'intégration successive et de changement de variables seront alors vérifiées, sous des hypothèses convenables que je n'ai pas envie d'expliciter ici.

Par exemple, pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a maintenant "le droit" d'écrire la formule d'inversion de Fourier sous la forme

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint e^{i\xi(x-y)} f(y) dy\, d\xi .$$

Autre exemple : la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (en abrégé o.p.d.) peut être simplifiée en utilisant systématiquement des intégrales oscillantes ; notamment, la formule de changement de variables se réduit essentiellement au changement de variables dans les intégrales multiples : ce résultat s'obtient en remarquant, par une démonstration analogue à celle du théorème 2.1 ci-dessous, qu'on ne change pas la classe des o.p.d., modulo les noyaux régularisants, en considérant au lieu des noyaux du type (1.3) les noyaux suivants, en apparence un peu plus généraux :

$$(1.5) \qquad \langle K_A , h\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iiint e^{i\xi(x-y)} a(x,y,\xi)\, h(x,y) dx\, dy\, d\xi$$

avec $A \in \Sigma^m(X^2 \quad R^n)$.

Nous n'entrerons pas dans les détails, et nous allons maintenant examiner les distributions que l'on peut définir au moyen des intégrales oscillantes générales.

II. DISTRIBUTIONS DE FOURIER

Une fonction φ sur $X \times \mathbb{R}^N$ vérifiant P.1 à P.3 sera appelée "une phase". On posera

$$\Gamma_\varphi = \{(x,\theta) \mid \varphi'_\theta = 0\} \quad \text{et} \quad C_\varphi = \{(x,\varphi'_x) \in X \times \mathbb{R}^n_* \mid (x,\theta) \in \Gamma_\varphi\} .$$

On dira qu'une phase φ est "non dégénérée" si, pour tout $(x,\theta) \in \Gamma_\varphi$, les $d(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i})$ sont linéairement indépendants ; alors (fonctions implicites), Γ_φ est une variété de dimension n (ou est vide, cas pour nous sans intérêt).

Soit $a \in \Sigma^m(X, \mathbb{R}^N)$; on considère sur X la distribution $A : f \mapsto I_\varphi(af)$, $f \in \mathcal{D}(X)$. Il résulte facilement des calculs définissant les intégrales oscillantes que A est une distribution d'ordre k, pour tout k vérifiant $m-k<-N$.

THÉORÈME 2.1.- 1) Le support singulier de A est contenu dans la projection de C_φ (= la projection de Γ_φ).

2) Si φ est non dégénérée, alors

(i) Si a est plat (= nul à l'ordre infini) sur Γ_φ, $A \in \mathcal{C}^\infty$;

(ii) Si a est nul sur Γ_φ, A peut aussi être défini par (φ et) $b \in \Sigma^{m-1}(X, \mathbb{R}^N)$.

Les démonstrations sont immédiates :

1) Pour $x \notin \operatorname{proj}(\Gamma_\varphi)$, $\int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)d\theta$ a un sens en tant qu'intégrale oscillante, et le même calcul montre que sa valeur dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de x.

2) Il suffit de démontrer la seconde assertion ; pour cela on montre qu'on

peut écrire $a = \Sigma b_j \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$, avec $b_j \in \Sigma^m(X , \mathbb{R}^N)$, en dehors d'un voisinage de $\theta = 0$; une intégration par parties donne alors le résultat.

Exemple 2.2.- Ici on remplace n par $2n$ (resp. N par n) et x par (x,y) (resp. θ par ξ) ; on a $\varphi = \xi(x-y)$, donc $C_\varphi = \{(x,x,\xi,-\xi)\}$ et $\operatorname{proj} C_\varphi = \Delta$, diagonale de X^2 : on retrouve le fait que le noyau d'un o.p.d. est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de la diagonale.

Exemple 2.3.- Considérons le problème de Cauchy pour l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f \end{cases}$$

à l'instant t , on a $u(x,t) = \sum_{\varepsilon = \pm 1} \varepsilon(\frac{1}{2\pi})^n \int e^{i[\xi x + \varepsilon t|\xi|]}(2i|\xi|)^{-1}\hat{f}(\xi)d\xi$

ou encore

$$u(x,t) = \Sigma\, \varepsilon(\frac{1}{2\pi})^n \int e^{i[\xi(x-y) + \varepsilon t|\xi|]}(2i|\xi|)^{-1} f(y)dy\, d\xi \quad \text{(intégrale oscillante).}$$

(Le fait que $|\xi|^{-1}$ n'est pas régulier à l'origine est sans importance ; il suffit de tronquer au voisinage de 0 dans l'espace des ξ pour se ramener au cas considéré + un régularisant.) Pour (x,t) fixé, les variables étant ici y et ξ , on a $\varphi = \xi(x-y) + \varepsilon t|\xi|$; Γ_φ est défini par $y - x = \varepsilon t \frac{\xi}{|\xi|}$ et sa projection dans $\mathbb{R}^n_y$ est la sphère $(y-x)^2 = t^2$, ce qui est conforme aux propriétés de "propagation des singularités" de l'équation des ondes.

De même, si l'on considère le noyau associé à l'opérateur $f \longmapsto u$, on voit que son support singulier dans l'espace des (x,y,t) est l'ensemble $(x-y)^2 = t^2$. La théorie des opérateurs de Fourier a, entre autres, pour but d'étendre ces faits à des équations du type le plus général possible.

Remarquons encore qu'on peut "localiser" les définitions précédentes ainsi : soit V un ouvert conique de $X \times \mathbb{R}_+^N$, i.e. V est stable par $(x,\theta) \mapsto (x,t\theta)$ pour tout $t > 0$; soit φ une phase définie sur V et soit $a \in \Sigma^m(X, \mathbb{R}^N)$ ayant son support conique dans V (*) ; alors pour $f \in \mathcal{D}(X)$, l'intégrale oscillante $I_\varphi(af) = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) f(x) d\theta\, dx$ sera bien définie, et définira donc encore une distribution sur X.

Dans la suite, nous supposerons toujours les phases non dégénérées ; alors le résultat principal est en gros le suivant : la classe des distributions de Fourier définies par φ ne dépend que de C_φ . Pour le voir, nous allons commencer par examiner deux cas particuliers importants.

(i) Changement de variables

Le calcul est ici immédiat et servira seulement à préciser comment il faut s'y prendre pour tout écrire de manière invariante : soit $x = u(x')$, $\theta = v(x',\theta')$ avec v homogène en θ', un difféomorphisme de la variété conique (X,V) sur une variété conique (X',V') ; on a l'égalité entre intégrales oscillantes :

$$\int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) f(x) d\theta dx = \int e^{i\bar{\varphi}(x',\theta')}\, \bar{a}(x',\theta') \bar{f}(x') \left| \frac{Du}{Dx'} \right| \left| \frac{Dv}{D\theta'} \right| dx' d\theta'$$

avec $\bar{\varphi}(x',\theta') = \varphi(u(x'), v(x',\theta'))$, et de même pour $\bar{a}$ et $\bar{f}$.

Il est commode ici de poser $b(x,\theta) = a(x,\theta) d\theta \sqrt{dx}$, $g(x) = f(x)\sqrt{dx}$, i.e. de travailler, non avec des fonctions a et f , mais des sections, respectivement des fibrés, $\Omega_\theta \otimes \Omega_{1/2,x}$ et $\Omega_{1/2,x}$, où Ω (resp. $\Omega_{1/2}$)

(*) On appellera "support conique" de a le plus petit fermé conique $F \subset X \times \mathbb{R}_*^N$ tel que $a = 0$ dans $X \times \mathbb{R}_*^N - F$.

désigne le fibré des volumes (ou densités d'ordre 1) et $\Omega_{1/2}$ le fibré des densités d'ordre 1/2 ; on a alors

$$\int e^{i\varphi(x,\theta)} b(x,\theta) g(x) = \int e^{i\bar{\varphi}(x',\theta')} \bar{b}(x',\theta')\bar{g}(x')$$

avec $\bar{b}$ (resp. $\bar{g}$) transformé de b (resp. g) par (u,v) , par définition de Ω et $\Omega_{1/2}$.

On a par un calcul facile : $\bar{a}(x',\theta') \left|\frac{Dv}{D\theta'}\right| \left|\frac{Du}{Dx'}\right|^{1/2} \in \Sigma^m(X', \mathbb{R}^N)$, ce qu'on écrira :

$$\bar{b}(x',\theta') \in \Sigma^m(X', \mathbb{R}^N ; \Omega_\theta \otimes \Omega_{1/2,x}) .$$

D'autre part, (et cela est plus important), on a $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\theta'} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(u,v)\frac{\partial v}{\partial\theta'}$; donc Γ_φ est le transformé de $\Gamma_{\bar{\varphi}}$ par le difféomorphisme (u,v) ; enfin, sur $\Gamma_{\bar{\varphi}}$, on a $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x'}$: ceci montre que C_φ est le transformé de $C_{\bar{\varphi}}$ par (u,v) à condition de considérer C_φ comme sous-ensemble du <u>cotangent</u> T^*X de X (et "non" de $X \times \mathbb{R}^n$).

Rappelons que T^*X peut être défini comme l'ensemble des couples $(x,(df)_x)$, $x \in X$, $(df)_x$ la différentielle d'une fonction en x ; en coordonnées locales, un point de T^*X sera représenté par $(x_1,\ldots,x_n , \xi_1,\ldots,\xi_n)$ avec $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ représentant la différentielle en x de $\xi_1x_1 + \ldots + \xi_nx_n$ (ou de toute autre fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \xi_i$). Sur T^*X , la forme différentielle $\pi = \Sigma\, \xi_i dx_i$ est invariante par changement de coordonnées, ainsi que sa différentielle extérieure $\omega = \Sigma\, d\xi_i \wedge dx_i$ (nous laissons le lecteur, à titre d'exercice, donner une définition "intrinsèque" de π et de ω). La forme ω définit ce qu'on appelle une "structure symplectique" sur T^*X .

Il importe ici de remarquer que la variété (immergée) C_φ n'est pas quelconque : en effet l'image réciproque de π sur Γ_φ par $i : \Gamma_\varphi \to C_\varphi$ vérifie

$$i^*(\Sigma\, \xi_i dx_i) = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i = d\varphi - \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i} d\theta_i = d\varphi = 0$$

(car $\varphi = 0$ sur Γ_φ par l'identité d'Euler : $\varphi = \Sigma\, \theta_i \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}$). Par suite, <u>la restriction de</u> ω (<u>et même de</u> π) <u>à</u> C_φ <u>est nulle</u> ; C_φ est ce qu'on appelle une <u>variété lagrangienne de</u> T^*X , i.e. une variété (immergée dans T^*X) de dimension maximale n sur laquelle la restriction de ω soit nulle. Réciproquement, il est facile de voir, qu'une variété lagrangienne conique de $T^*X - \{0\}$, peut localement (i.e. dans un voisinage conique de chacun de ses points) être définie par une phase non dégénérée.

(ii) <u>Adjonction de nouvelles variables</u>

(Nous n'utiliserons pas encore ici la discussion qui précède.) Soit φ une phase sur V , ouvert conique de $X\times \mathbb{R}^N$; soit W l'ouvert conique de $X\times \mathbb{R}^{N+1}$ formé des (x,θ,τ) vérifiant $(x,\theta) \in V$, $|\tau| < K|\theta|$ pour un $K > 0$; posons $\bar\varphi(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) + \tau^2/2|\theta|$; on a évidemment $C_{\bar\varphi} = C_\varphi$; soit $a \in \Sigma^m(X , \mathbb{R}^{N+1})$, à support conique dans W ; on a, pour $f \in \mathcal{D}(X)$, par intégrations successives :

$$I_{\bar\varphi}(af) = I_\varphi(bf) , \quad \text{avec } b(x,\theta) = \int e^{i\tau^2/2|\theta|}\, a(x,\theta,\tau)d\tau ,$$

on a ici une intégrale usuelle, puisque $a = 0$ pour $|\tau| \geq K|\theta|$.

Pour évaluer b , on applique la méthode de la <u>phase stationnaire</u>, i.e. on écrit d'abord :

$$b(x,\theta) = |\theta| \int e^{i\sigma^2|\theta|/2}\, a(x,\theta,|\theta|\sigma)d\sigma ,$$

d'où, par Fourier

$$b(x,\theta) = \sqrt{\frac{|\theta|}{2\pi}}\, e^{i\pi/4} \int e^{-i\eta^2/2|\theta|}\, \hat a(x,\theta,\eta)d\eta$$

avec $\hat{a}(x,\theta,\eta) = \int a(x,\theta,|\theta|\sigma)e^{-i\sigma\eta}\, d\eta$.

Pour $|\theta| \to \infty$ la partie principale de la dernière intégrale est $\int \hat{a}(x,\theta,\eta)d\eta = 2\pi a(x,\theta,0)$ par Fourier ; de façon plus précise, en utilisant le développement asymptotique

$$|e^{-i\eta^2/2\theta} - \sum_{0}^{p} (-i\eta^2/2|\theta|)^k/k!| \leq (\eta^2/2|\theta|)^{p+1}/(p+1)! \qquad (p \text{ entier}),$$

on montre le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1.- (En dehors d'un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^N$), <u>on a</u> $b(x,\theta) \in \Sigma^{m+1/2}(X , \mathbb{R}^N)$; <u>et</u>, modulo $\Sigma^{m-1/2}(X , \mathbb{R}^N)$, <u>la partie principale de</u> b <u>est</u>

$$\sqrt{2\pi|\theta|}\; e^{i\pi/4}\, a(x,\theta,0) .$$

Si l'on avait pris $\bar{\varphi}(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) - \tau^2/2|\theta|$, dans le résultat on aurait $e^{-i\pi/4}$; plus généralement, si l'on prend

$$\bar{\varphi}(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) - A(\tau,\tau)/2|\theta| ,$$

A une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^p$, on trouve, en éliminant τ par réduction à la forme diagonale et applications successives du résultat précédent :

$$b(x,\theta) \sim (2\pi|\theta|)^{p/2}|\text{dét } A|^{-1/2}\, e^{i\pi\sigma/4}\, a(x,\theta,0) \quad \text{modulo } \Sigma^{m-1+p/2} ,$$

avec σ = signature de A .

(iii) <u>Le cas général</u>

Avant de l'examiner, il faut encore faire une construction qui permette de mettre dans le même sac les deux cas particuliers précédents. Soit φ une phase non dégénérée, définie sur un ouvert conique $V \subset X \times \mathbb{R}^N_*$; l'application $\Gamma_\varphi \to C_\varphi$ est localement un difféomorphisme, du fait que φ est non dégénérée ; en restreignant V , on peut supposer que c'est un difféomorphisme.

Sur Γ_φ , on a un volume μ_φ défini ainsi : soit α_φ la forme différentielle de degré n sur V définie par

$$\alpha_\varphi \wedge d(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}) \wedge \ldots \wedge d(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_N}) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N \ ,$$

alors $\mu_\varphi = |\alpha_\varphi|$; choisissons, au voisinage d'un point de Γ_φ des fonctions sur V , soit $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, telles que les λ_i et les $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$ forment un système de coordonnées locales ; on aura

$$\mu_\varphi = |D(\lambda_i , \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j})/D(x,\theta)|^{-1} \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \ .$$

Pour les gens savants, on peut aussi définir μ_φ par la formule : $\mu_\varphi = \delta(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i})dx\,d\theta$, δ la "fonction" (= courant de degré 0) de Dirac sur $\mathbb{R}^N$.

Soit alors $a(x,\theta) \in \Sigma^m(X , \mathbb{R}^N)$, à support conique dans V , et soit $\tilde{a}$ la restriction de a à Γ_φ ; d'après le théorème 2.1, si l'on s'intéresse seulement à la "partie principale" de l'opérateur défini par a (i.e., si on travaille modulo les opérateurs définis par des éléments de Σ^{m-1}), seul $\tilde{a}$ nous intéresse ; il sera encore mieux de travailler avec l'image $i(\tilde{a})$ de $\tilde{a}$ par $i : \Gamma_\varphi \to C_\varphi$ puisque nous voulons finalement faire tous les changements de phase (non dégénérée) qui ne changent pas C_φ ; il faut donc voir comment $i(\tilde{a})$ est transformé par les opérations de (i) et (ii).

Cas (i). Le théorème de dérivation des fonctions composées permet de s'assurer immédiatement que la correspondance $a\sqrt{dx\,d\theta} \longmapsto \tilde{a}\sqrt{\mu_\varphi}$ est invariante par les difféomorphismes envisagés. Nous sommes donc amenés à considérer le "symbole principal" de la distribution définie par a et φ doit être défini par $i(\tilde{a}\sqrt{\mu_\varphi})$.

Cas (ii). Soit $\varphi_1(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) + A(\tau,\tau)/2|\theta|$ $(\tau \in \mathbb{R}^P)$ comme en (ii), et soient $a(x,\theta,\tau) \in \Sigma^m(X, \mathbb{R}^{N+P})$ et $b(x,\theta)$ comme en (ii) ; désignons par π la projection $X \times \mathbb{R}^{N+P} \to X \times \mathbb{R}^N$; comme Γ_{φ_1} est défini par $\tau = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i} = 0$, π est un isomorphisme $\Gamma_{\varphi_1} \sim \Gamma_{\varphi}$; on vérifie alors la formule suivante

$$\pi(\tilde{a}\sqrt{\mu_{\varphi_1}}) = c\sqrt{\mu_\varphi}\ , \text{ avec } c = \text{restriction à } \Gamma_\varphi \text{ de } |\theta|^{P/2}|\text{dét}\,A|^{-1/2}a(x,\theta,0)\ .$$

Comparant avec la formule qui donne la partie principale de b, on trouve la même chose à deux "détails" près :

a) Un facteur $(2\pi)^{P/2}$, qu'il est facile d'éliminer en normalisant autrement la définition des distributions de Fourier : dans la suite, à φ, phase sur $X \times \mathbb{R}^N$ et $a \in \Sigma^m(X, \mathbb{R}^N)$, nous ferons correspondre la distribution $A : f \mapsto (2\pi)^{-(n+2N)/4} I_\varphi(af)$, $f \in \mathcal{D}(X)$. Cette normalisation est d'ailleurs aussi cohérente avec celle que nous avons adoptée pour les pseudo-différentiels.

b) Le facteur $e^{i\pi\sigma/4}$, σ = signature de A, qui, lui, ne se laisse pas exorciser, comme on va le voir.

Passons maintenant au cas général : nous examinerons directement la construction "globale" des distributions de Fourier, en supposant toutefois que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (il sera facile ensuite de passer au cas général, où X est une variété). Soit C une sous-variété lagrangienne conique fermée de $T^*X - \{0\}$, et m un entier ≥ 0. On se donne en outre :

a) Des phases non dégénérées φ_j définies chacune dans un ouvert conique $U_j \subset X \times \mathbb{R}_*^{N_j}$, telles que $\Gamma_{\varphi_j} \to C_{\varphi_j}$ soit un isomorphisme, que C_{φ_j} soit un ouvert de C, et que les C_{φ_j} soient un recouvrement de C.

b) Des $a_j \in \Sigma^{m+(n-2N_j)/4}(X, R^{N_j})$ avec "support conique de a_j " $\subset K$, K étant un cône à base compacte de U_j . Soit A_j la distribution de Fourier définie par φ_j et a_j ; on appelle $I^m(X,C)$, l'ensemble des distributions $A = \Sigma A_j$, pour n'importe quel choix des a_j (les φ_j étant fixés). On a d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION 2.4.- $I^m(X,C)$ <u>ne dépend pas du choix des</u> φ_j .

Pour obtenir un résultat plus précis, il faut associer un "symbole principal" à un élément de $I^m(X,C)$. Pour cela, on considère d'abord les $i(\widetilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$, qui sont des densités d'ordre $1/2$ sur C ; compte tenu du fait que $i(\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$ est homogène de degré $N_j/2$ (comme on le voit, en considérant l'action de l'homothétie $\theta \mapsto t\theta$ sur μ_{φ_j}), on peut considérer $i(\widetilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$, avec des définitions plus ou moins évidentes, comme un élément de $\Sigma^{m+n/4}(C\,;\Omega_{1/2})$.

Pour tenir compte des facteurs de phase, une construction supplémentaire est nécessaire : on convient que a_j et a_k définissent "le même symbole" dans un ouvert de $C_{\varphi_j} \cap C_{\varphi_k}$ si, dans cet ouvert, on a

$$e^{\pi i\sigma_j/4}\, i(\widetilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}}) = e^{\pi i\sigma_k/4}\, i(\widetilde{a}_k\sqrt{\mu_{\varphi_k}})$$

avec σ_j = signature de $(\Phi_j)''_{\theta^2}$, σ_k = etc ...

D'une façon plus savante : on montre que $\sigma_j - \sigma_k$ est localement constant dans $C_{\varphi_j} \cap C_{\varphi_k}$ (mais <u>non nécessairement</u> σ_j et σ_k) ; on considère alors le fibré L de fibre-type $\mathbb{C}$ défini par le "cocycle de Maslov" $\alpha_{jk} = e^{\pi i(\sigma_j - \sigma_k)/4}$ (sur lequel on convient que les homothéties agissent trivialement), et on considère les $i(\tilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$ comme des sections de $\Omega_{1/2}\otimes L$, i.e. des éléments de $\Sigma^{m+n/4}(C, \Omega_{1/2}\otimes L)$; le "symbole de A" est alors, par définition, la somme $\Sigma\, i(\tilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$ et l'on a le résultat suivant :

Si A et B, définis comme précédemment (avec éventuellement des systèmes $\{\varphi_j\}$ différents) ont même symbole modulo $\Sigma^{m+n/4-1}$, on a $A - B \in I^{m-1}(X,C)$.

Ce résultat se démontre, en même temps que la proposition 2.4, par réduction aux deux cas particuliers (i) et (ii). On définit ainsi une application

$$\Sigma^{m+n/4}(C,\Omega_{1/2}\otimes L)/\Sigma^{m+n/4-1}(-) \to I^m(X,C)/I^{m-1}(X,C)$$

qui est évidemment surjective, compte tenu de ce qui précède, et le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 2.5.- Cette application est bijective.

A noter que la démonstration de l'injectivité demande encore du travail. Notons aussi que le cocycle α_{jk} est à valeurs dans le groupe des racines huitièmes de l'unité, ou, en notations additives, dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$; en fait, comme on a $\operatorname{sgn}(\Phi_j)''_{\theta^2} - N_j \equiv 0 \pmod 2$, on peut réduire le groupe structural à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en remplaçant α_{jk} par le cocycle équivalent $\alpha_{jk}e^{-i\pi(N_j-N_k)/4}$. Hörmander donne aussi une autre interprétation, plus géométrique, du fibré correspondant, lié à des constructions antérieures de Maslov et Arnold, et montre par un exemple que, en général, on ne peut pas réduire davantage le groupe structural.

III. NOYAUX DE FOURIER

On applique les constructions précédentes, avec X remplacé par $X \times Y$, X (resp. Y) ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) – ou, plus généralement, avec X et Y des variétés, mais peu importe. Soit alors $A \in I^m(X \times Y, C)$, C une variété conique lagrangienne fermée dans $T^*(X \times Y) - \{0\}$; A est une distribution sur $X \times Y$, ou plus précisément une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(X \times Y, \Omega_{1/2})$, en tenant compte des conventions précédentes. Par suite (théorème des noyaux), A définit une application continue $\mathcal{D}(Y, \Omega_{1/2}) \to \mathcal{D}'(X, \Omega_{1/2})$ qu'on notera encore A ; localement, A sera défini par la formule

$$\langle Af, g\rangle = (2\pi)^{-(n+p+2N)/4} \int e^{i\varphi(x,y,\theta)}\, a(x,y,\theta)\, f(y)\, g(x)\, dx\, dy\, d\theta$$

avec $a \in \Sigma^{m+(n+p-2N)/4}(X \times Y, \mathbb{R}^N)$, et φ une phase non dégénérée sur $X \times Y \times \mathbb{R}^N$ (ou sur un ouvert conique V de cet espace, a étant à support conique dans V).

Il est plus commode ici de considérer l'ensemble $C' \subset T^*(X \times Y) - \{0\}$ obtenu à partir de C par l'application $(x,y,\xi,\eta) \to (x,y,\xi,-\eta)$; sur C' la restriction de la forme $\omega_X - \omega_Y$ est nulle, ω_X (resp. ω_Y) désignant la 2-forme canonique de $T^*(X)$ (resp. T^*Y). Si, <u>par exemple</u>, et c'est souvent le cas dans les applications, C' est le graphe d'une application $F : T^*Y \to T^*X$, on a $F^*(\omega_X) = \omega_Y$, c'est-à-dire que F est une <u>transformation canonique</u>. Par exemple, dans le cas d'un opérateur pseudo-différentiel, on a $X = Y$, C' est la diagonale de $(T^*X)^2$, et F est l'identité.

Un cas particulier important est celui où C (ou C', cela revient au même), est contenu dans $[T^*X - \{0\}] \times [T^*Y - \{0\}]$; on dira alors que C est une <u>relation canonique</u> (homogène de T^*Y dans T^*X). Si $\varphi(x,y,\theta)$ est une fonction définissant localement C , cela veut dire qu'en tout point (x,y,θ) où l'on a $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$, on a $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \neq 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$. Utilisant la première inégalité, on voit que, pour $f \in \mathcal{D}(Y)$ et x fixé, l'intégrale oscillante

$$\int e^{i\varphi(x,y,\theta)}\, a(x,y,\theta) f(y)\, dy\, d\theta$$

sera définie, et on voit facilement (par le même raisonnement qui définit les intégrales oscillantes) qu'elle dépend de manière $\mathcal{C}^\infty$ de x ; donc A envoie (continuement) $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{C}^\infty(X)$; de même, la 2e inégalité nous montre que le transposé A' de A envoie $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{C}^\infty(Y)$, donc en transposant A envoie $\mathcal{E}'(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ et finalement A est un noyau régulier (mais non très régulier, sauf si la projection de C sur $X \times Y$ est contenu dans la diagonale).

Les résultats importants de ce paragraphe concernent (i) les adjoints (ou les transposés) (ii) la composition. Le point (i) est immédiat, (il suffit essentiellement de permuter le rôle des variables x et y). Nous insisterons un peu plus sur (ii), sans toutefois entrer dans tous les détails. Supposons que C_1 et C_2 soient deux relations canoniques, respectivement de T^*Y dans T^*X et de T^*Z dans T^*Y ; grâce aux nouveaux programmes des lycées et collèges, tous les enfants savent aujourd'hui ce que signifie le composé $C_1 \circ C_2$; rappelons quand même que c'est l'ensemble des (x,ξ,z,ζ) tels qu'il existe (y,η) avec $(x,\xi,y,\eta) \in C_1$ et $(y,\eta,z,\zeta) \in C_2$. Une meilleure manière de dire les choses est de considérer la "diagonale" $\Delta \subset T^*X \times (T^*Y)^2 \times T^*Z$, i.e. les points dont les deux composantes dans T^*Y sont égales, de prendre $C_1 \times C_2 \cap \Delta$, et de le projeter dans $T^*X \times T^*Z$. Supposons que $C_1 \times C_2$ rencontre transversalement Δ ; on voit alors que $C_1 \times C_2 \cap \Delta$ est une bonne variété, de dimension $\dim X + \dim Z$, et que sa projection dans $T^*X \times T^*Z$ est une immersion (i.e. la différentielle de la dite projection est partout de rang maximum) ; si nous supposons en outre cette projection injective et propre, son image $C_1 \circ C_2$ sera une sous-variété de $T^*X \times T^*Z$ dont on voit facilement que c'est une relation canonique homogène de T^*Z dans T^*X. Sous les hypothèses précédentes, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.- Soient $A_1 \in I^{m_1}(X \times Y, C_1')$ et $A_2 \in I^{m_2}(Y \times Z, C_2')$, à supports propres. On a alors : $A_1 A_2 \in I^{m_1+m_2}(X \times Z, (C_1 \circ C_2)')$.

La démonstration, en gros, se fait ainsi : en omettant le facteur de normalisation, on écrit, après avoir pris quelques précautions de support :

$$A_1 \circ A_2 f(x) = \int e^{i[\varphi_1(x,y,\theta) + \varphi_2(y,z,\tau)]} a_1(x,y,\theta) a_2(y,z,\tau) f(z) dy\, dz\, d\theta\, d\tau ,$$

on pose $\sigma = (\sqrt{|\theta|^2 + |\tau|^2}\, y, \theta, \tau)$ et l'on considère $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ et $a = a_1 a_2$ comme fonctions de (x,z,σ). On voit alors que C_φ est bien l'ensemble qu'on cherche, i.e. $(C_1 \circ C_2)'$; la difficulté est qu'il n'est pas "tout à fait" vrai que a soit un symbole de l'ordre voulu, mais on arrive à s'en sortir par une troncature.

Le symbole principal de $A_1 A_2$ s'obtient à partir du même calcul ; nous ne donnerons pas la formule complète pour ne pas allonger encore cet exposé, et nous omettrons les densités et le fibré de Maslov (qui, d'ailleurs ne changent les choses que par un facteur "universel", i.e. ne dépendant que des C_i et non des A_i) ; à cette restriction près, on voit que le symbole principal de $A_1 A_2$ s'obtiendra ainsi : on prend le produit des symboles de A_1 et A_2 sur $C_1 \times C_2'$, on prend la restriction à $C_1 \times C_2 \cap \Delta$, et on projette sur

$C_1 \circ C_2$; moyennant des conventions convenables, cette manière de faire garde un sens pour les symboles "exacts", à valeurs dans $\Omega_{1/2} \otimes L$.

Un cas particulièrement simple est celui où les relations canoniques C_1 et C_2 sont des "graphes canoniques locaux", i.e. leurs projections sur T^*X et T^*Y (resp. T^*Y et T^*Z) sont des difféomorphismes locaux (ceci implique en particulier que X , Y , Z ont même dimension) ; alors sur C_1 et C_2 , on a un volume canonique obtenu par image réciproque à partir de celui de T^*Y (ou T^*X pour C_1 , ou T^*Z pour C_2), donc on peut identifier les densités d'ordre $1/2$ à des fonctions, donc les symboles principaux de A_1 et A_2 à des <u>fonctions</u> sur C_1 et C_2 (éventuellement tordues par le fibré de Maslov) ; c'est en particulier ce qui se passe pour les pseudo-différentiels, où le fibré de Maslov est par dessus le marché trivial.

On peut voir qu'alors la construction précédente du symbole principal de A_1A_2 est exactement la bonne.

Pour terminer, donnons quelques exemples importants pour les applications :

(i) Supposons que C soit le graphe d'un difféomorphisme canonique, et soit $A \in I^0(X \times Y , C)$; alors on a $A^* \in I^0(Y \times X , C^{*}{}')$, où $C^* = C$ (mais en faisant jouer à X et Y des rôles permutés). On aura $A^*A \in I^0(Y \times Y , \Delta')$, i.e. A^*A est un <u>pseudo-différentiel d'ordre</u> 0 sur Y ; d'après une propriété des pseudo-différentiels (que j'ai omis de rappeler, mais qui se démontre aussi avec les considérations du § 1), A^*A opère continuement de $L^2 \cap \mathcal{E}'$ dans (L^2 local) ; par suite, A possèdera la même propriété.

(ii) Supposons $X = Y = Z$; soit C le graphe d'un difféomorphisme canonique, et soit $A \in I^m(X,C')$, le symbole principal de A étant inversible ; et soient P et Q deux pseudo-différentiels de symbole principal p et q

respectivement, tels qu'on ait $PA = AQ$; alors si $(x,\xi) = F(y,\eta)$ est l'équation définissant C, on aura : $p(F(x,\xi)) = q(x,\xi)$, donc p et q se déduisent l'un de l'autre par la transformation canonique F. Ce résultat est fondamental pour les applications, car il permet souvent de simplifier considérablement la partie principale des pseudo-différentiels. Il a été établi d'abord (dans un cas un peu moins général) par Egorov [2].

Donnons un exemple ; soit H l'opérateur pseudo-différentiel défini par (1.1), avec $a(x,\xi) = |\xi|$ (peu importe ce qui se passe au voisinage de 0 dans l'espace des ξ, cela ne change les choses que par un régularisant). Soit F_t la solution du problème de Cauchy pour la "demi-équation des ondes" : $-i\dfrac{dF_t}{dt} = HF_t$, avec $F_0 = f$; par transformation de Fourier en x, on a

$$F_t = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i(t|\xi| + x\xi)}\,\hat{f}(\xi)d\xi \qquad \text{(intégrale ordinaire)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i(t|\xi| + \langle x-y\,,\,\xi\rangle)} f(y)dyd\xi \qquad \text{(intégrale oscillante)}$$

i.e. pour t fixé, F_t est donné par $U_t f$, U_t un opérateur de Fourier de phase $\varphi_t = \langle x - y\,,\,\xi\rangle + t|\xi|$; alors C'_{φ_t} est donné par

$$\begin{cases} x = y + t\dfrac{\xi}{|\xi|} \\ \eta = \xi\,, \end{cases}$$

le groupe à un paramètre de transformations canoniques qui fait passer de (y,η) à (x,ξ) est celui qu'on obtient en résolvant les équations canoniques correspondant au hamiltonien H, comme on voit tout de suite ; par suite, si P est un pseudo-différentiel (on aurait envie de dire "un observable"), le symbole principal de $U_t P U_t^{-1}$ est lié à celui de P par la transformation canonique précédente.

Le lecteur se doute que l'exemple précédent n'a pas été choisi au hasard ; en fait, il est typique d'une partie des applications de la théorie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. J. DUISTERMAAT and L. HÖRMANDER - Fourier integral operators, II, à paraître.

[2] Yu. V. EGOROV - Sur les transformations canoniques des opérateurs pseudo-différentiels [en russe], Usp. Mat. Nauk, 25 (1959), p. 235-236.

[3] L. GÅRDING, T. KOTAKE et J. LERAY - Uniformisation etc... (Problème de Cauchy, I bis et VI), Bull. Soc. Math. de France, 92 (1964), p. 263-361.

[4] L. HÖRMANDER - Fourier integral operators, I, Acta Math., 127 (1971), p. 79-183.

[5] L. HÖRMANDER - On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, L'Enseignement Math. (1971).

[6] P. D. LAX - Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24 (1957), p. 473-508.

[7] V. MASLOV - Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques [en russe], Moscou 1965.

[8] V. MASLOV - The characteristics of pseudo-differential operators and difference schemes, Actes Congrès Int. Math. 1970, vol. 2, p. 755-769.

[9] M. SATO - Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations, Actes Congrès Int. Math. 1970, vol. 2, p. 785-794.