PIERRE DELIGNE

Travaux de Griffiths

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 376, p. 213-237

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__213_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 376 Mai-Juin 1970

TRAVAUX DE GRIFFITHS

par Pierre DELIGNE

Cet exposé contient une partie des résultats fondamentaux de Griffiths sur les familles de structures de Hodge. Il ne contient aucun de ses résultats sur les cycles algébriques.

1. Structures de Hodge.

Soit $H_{\mathbf{R}}$ un espace vectoriel réel de dimension finie.

DÉFINITION 1.1.- *Une structure de Hodge réelle sur* $H_{\mathbf{R}}$ *est une bigraduation de* $H_{\mathbf{C}} = H_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$

$$H_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{p,q} H^{pq}$$

telle que H^{pq} *et* H^{qp} *soient complexes conjugués.*

Les *nombres de Hodge* d'une structure de Hodge réelle H sont les entiers $h^{pq} = \dim_{\mathbf{C}}(H^{pq})$. On dit que H est de *poids* n si $h^{pq} = 0$ pour $p+q \neq n$. Une variante de 1.1 est :

DÉFINITION 1.2.- *Une structure de Hodge réelle de poids* n *sur* $H_{\mathbf{R}}$ *est une filtration finie décroissante* F *de* $H_{\mathbf{C}}$ (*la filtration de Hodge*) *telle que, pour* $p+q = n+1$, *on ait*

(1.2.1) $$F^p(H_{\mathbf{C}}) \oplus \bar{F}^q(H_{\mathbf{C}}) \xrightarrow{\sim} H_{\mathbf{C}} .$$

On passe de 1.1 à 1.2 en posant

$$(1.2.2) \qquad F^p(H_{\mathbf{C}}) = \sum_{p' \geq p} H^{p'q'}$$

et on passe de 1.2 à 1.1 en posant, pour $p+q=n$

$$(1.2.3) \qquad H^{pq} = F^p(H_{\mathbf{C}}) \cap \bar{F}^q(H_{\mathbf{C}}) .$$

1.3. Désignons par $\underline{S}$ le groupe algébrique réel obtenu par restriction des scalaires à la Weil, de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$, du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. On a $\underline{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{C}^*$; on dispose d'un morphisme naturel w de $\mathbb{G}_m$ dans $\underline{S}$ qui, sur les points réels, est l'inclusion de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{C}^*$, et on dispose d'un morphisme naturel t de $\underline{S}$ dans $\mathbb{G}_m$ qui, sur les points réels, est la norme. Le composé tw est l'élévation au carré. Une nouvelle variante de 1.1 est

DÉFINITION 1.4.- _Une structure de Hodge réelle sur $H_{\mathbf{R}}$ est une action (définie sur $\mathbf{R}$) du groupe algébrique $\underline{S}$ sur $H_{\mathbf{R}}$._

Si z désigne l'isomorphisme de définition $z : \underline{S}(\mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^*$, on passe de 1.1 à 1.4 en définissant H^{pq} comme le sous-espace de $H_{\mathbf{C}}$ où $\underline{S}(\mathbf{R})$ agit par multiplication par $z^p\bar{z}^q$.

Si $H_{\mathbf{R}}$ est muni d'une structure de Hodge réelle, on définit l'automorphisme C de Weil comme étant la multiplication par i^{p-q} sur H^{pq}. Cet automorphisme est réel, et n'est autre que l'action de l'élément i de $\underline{S}(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{C}^*$.

DÉFINITION 1.5.- _Une polarisation d'une structure de Hodge réelle, de poids n, H est une forme bilinéaire Ψ sur $H_{\mathbf{R}}$, invariante par le sous-groupe compact Ker(t) de $\underline{S}$, et telle que la forme $\Psi(x,Cy)$ soit symétrique et définie positive._

De l'identité $C^2 = (-1)^n$, on tire que

$$\Psi(x,y) = (-1)^n\,\Psi(x,C^2y) = (-1)^n\,\Psi(Cy,Cx) = (-1)^n\,\Psi(y,x)$$

de sorte que Ψ est alternée ou symétrique selon la parité de n . Les propriétés de variance sous $\underline{S}$ et de positivité s'écrivent :

(1.5.1) l'orthogonal pour Ψ de $F^p(H_{\mathbf{C}})$ est $F^{n-p}(H_{\mathbf{C}})$;

(1.5.2) pour x non nul dans H^{pq} , on a

$$i^{p-q}\,\Psi(x,\bar{x}) > 0$$

(relations bilinéaires de Riemann).

DÉFINITION 1.6.- (i) Une structure de Hodge, de poids n , H consiste en un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini $H_{\mathbf{Z}}$ (le "réseau entier"), et en une structure de Hodge réelle de poids n sur $H_{\mathbf{R}} = H_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$.

(ii) Une polarisation d'une structure de Hodge, de poids n , H est une polarisation Ψ de la structure de Hodge réelle sous-jacente, qui est à valeurs entières sur le réseau entier $H_{\mathbf{Z}}$.

2. Théorie de Hodge.

2.1. Soient $X \subset \mathbb{P}^r(\mathbf{C})$ une variété algébrique complexe projective non singulière, purement de dimension d , et $\eta \in H^2(X,\mathbf{Z})$ la classe de cohomologie d'une section hyperplane de X , i.e. la première classe de Chern de $\mathcal{O}(1)$.

Le complexe de De Rham holomorphe Ω_X^* est une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbf{C}}$ (lemme de Poincaré holomorphe), d'où une suite spectrale

(2.1.1) $$E_1^{pq} = H^q(X\,,\Omega_X^p) \Rightarrow H^{p+q}(X,\mathbf{C}) \;.$$

2.2. La théorie de Hodge affirme que

(A) La suite spectrale (2.1.1) dégénère $(E_1 = E_\infty)$.

(B) La filtration de $H^n(X,\mathbf{C})$ à laquelle elle aboutit est une structure de Hodge de poids n (1.2) sur $H^n(X,\mathbf{R})$.

D'après (A), on a $H^{pq} \simeq H^q(\Omega_X^p)$.

(C) Pour $n \leq d$, désignons par $P^n_{\mathbb{Q}}$ le noyau du cup-produit itéré

$$\eta^{d-n+1} : H^n(X,\mathbb{Q}) \to H^{2d-n+2}(X,\mathbb{Q})$$

(partie primitive de la cohomologie), et par $P^n_{\mathbb{Z}}$ l'intersection de $P^n_{\mathbb{Q}}$ avec l'image de $H^n(X,\mathbb{Z})$ dans $H^n(X,\mathbb{Q})$. La classe η étant de type $(1,1)$, $P^n_{\mathbb{R}} = P^n_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ est une sous-structure de Hodge de $H^n(X,\mathbb{R})$. A un signe ne dépendant que de d et n près, la forme

$$\Psi(x,y) = \int \eta^{d-n} \wedge x \wedge y$$

est une polarisation de la structure de Hodge P^n .

(D) L'application naturelle

$$\bigoplus_{n-2k \leq d} \eta^k \wedge : \bigoplus P^{n-2k}_{\mathbb{Q}} \to H^n(X,\mathbb{Q})$$

est un isomorphisme (décomposition de Hodge-Lepage).

3. Familles de structures de Hodge.

3.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et lisse d'espaces analytiques, purement de dimension relative d . Pour simplifier, on supposera que S est non singulier et que f est muni d'une factorisation par $\mathbb{P}^r_S = S \times \mathbb{P}^r(\mathbb{C})$. Les fibres $X_s = f^{-1}(s)$ forment donc une famille analytique, paramétrée par S , de sous-variétés non singulières de $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$.

3.2. Du point de vue C^∞ , f est une fibration localement triviale. L'algèbre de cohomologie des fibres de f forme donc un système local sur S , qu'on notera

$$R^*_{\mathbb{Z}}(f) = \Sigma\, R^n f_* \mathbb{Z} .$$

Pour tout faisceau abélien F sur S (par exemple $\underline{\mathbb{Q}}$, $\underline{\mathbb{C}}$, $\mathcal{O}$), on posera

(3.2.1) $\qquad R^n_F(f) \;=\; F \otimes R^n_{\mathbb{Z}}(f)$.

Puisque f est propre, on a encore $R^n_F(f) \xrightarrow{\sim} R^n f_*(f^{\cdot}F)$.

Les classes de cohomologie des sections hyperplanes des X_s définissent une section <u>localement constante</u>

(3.2.2) $\qquad \eta \in H^o(S, R^2_{\mathbb{Z}}(f))$.

Pour $n \le d$, les $P^n_{\mathbb{Z}}(X_s)$ forment donc un sous-système local $P^n_{\mathbb{Z}}(f)$ de $R^n_{\mathbb{Q}}(f)$. Posant $P^n_F(f) = F \otimes P^n_{\mathbb{Z}}(f)$, on a par définition

(3.2.3) $\qquad P^n_{\mathbb{Q}}(f) \;=\; \mathrm{Ker}(\eta^{d-n+1}\wedge \;:\; R^n_{\mathbb{Q}}(f) \;\to\; R^{2d-n+2}_{\mathbb{Q}}(f))$

(3.2.4) $\qquad P^n_{\mathbb{Z}}(f) \;=\; P^n_{\mathbb{Q}}(f) \cap \mathrm{Im}(R^n_{\mathbb{Z}}(f) \;\to\; R^n_{\mathbb{Q}}(f))$.

La forme de polarisation 2.2 (C)

(3.2.5) $\qquad \Psi(x,y) \;=\; \pm \int_{X_s} \eta^{d-n} \wedge x \wedge y$

est localement constante sur S , i.e. définit

(3.2.6) $\qquad \Psi : R^n_{\mathbb{Z}}(f) \otimes R^n_{\mathbb{Z}}(f) \;\to\; \underline{\mathbb{Z}}$.

3.3. Pour F un faisceau analytique cohérent sur S , on désignera par $f^{\cdot}F$ son image réciproque faisceautique, et par $f^*F = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{\cdot}\mathcal{O}_S} f^{\cdot}F$ son image réciproque en tant que faisceau de modules. Pour $s \in S$, on désignera par $F_{(s)}$ le $\mathcal{O}_{S,s}$-module des germes de sections de F en s ; on appellera fibre de F en s le vectoriel $F_s = F_{(s)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbf{C}$. Rappelons enfin que le complexe de De Rham relatif $\Omega^*_{X/S}$ est le quotient de Ω^*_X de composantes $\Omega^1_{X/S} = \Omega^1_X / f^*\Omega^1_S$ et $\Omega^p_{X/S} = \bigwedge^p \Omega^1_{X/S}$. Si $T^1_{X/S}$, dual de $\Omega^1_{X/S}$, est le fibré tangent relatif, on dispose d'accouplements "produits contractés" :

(3.3.1) $\qquad \llcorner \;:\; T^1_{X/S} \otimes \Omega^p_{X/S} \;\to\; \Omega^{p-1}_{X/S}$.

3.4. D'après le lemme de Poincaré holomorphe relatif, $\Omega^*_{X/S}$ est une résolution de $f^{\cdot}\mathcal{O}_S$. On dispose donc d'une suite spectrale

(3.4.1) $$E_1^{pq} = R^q f_* \Omega^p_{X/S} \Rightarrow R^n f_*(f^{\cdot}\mathcal{O}_S) = R^n_{\mathcal{O}}(f) .$$

On déduit de 2.2 (A) que les E_1^{pq} sont localement libres, que la suite spectrale (3.4.1) dégénère $(E_1 = E_\infty)$ et que sa formation commute à tout changement de base. La filtration de $R^n_{\mathcal{O}}(f)$ à laquelle elle aboutit (la <u>filtration de Hodge</u>) induit donc sur $R^n_{\mathcal{O}}(f)_s \simeq H^n(X_s, \mathbf{C})$ la filtration de Hodge 2.2 : cette dernière varie de façon holomorphe avec $s \in S$.

DÉFINITION 3.5.- <u>La</u> connexion de Gauss-Manin <u>sur le fibré vectoriel holomorphe</u> $R^n_{\mathcal{O}}(f)$ (<u>identifié ici à son faisceau de sections holomorphes</u>) <u>est la connexion holomorphe et intégrable</u>

$$\nabla : R^n_{\mathcal{O}}(f) \rightarrow \Omega^1_S \otimes R^n_{\mathcal{O}}(f)$$

<u>ayant pour sections locales horizontales</u> $(\nabla v = 0)$ <u>les sections locales de</u> $R^n_{\mathbf{C}}(f)$.

THÉORÈME DE TRANSVERSALITÉ 3.6.- <u>La filtration de Hodge</u> F <u>sur</u> $R^n_{\mathcal{O}}(f)$ <u>vérifie</u>

$$\nabla F^p(R^n_{\mathcal{O}}(f)) \subset \Omega^1_S \otimes F^{p-1}(R^n_{\mathcal{O}}(f)) .$$

<u>Preuve</u> (d'après Katz-Oda [10] et une communication personnelle de Katz). La question est locale sur S. Soit $\underline{U} = (U_i)_{0 \leq i \leq N}$ un recouvrement fini de X par des ouverts de Stein. Pour $Q \subset [0,N]$, soient $U_Q = \bigcap_{i \in Q} U_i$, j_Q l'inclusion de U_Q dans X, et

$$f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S}) = (f j_Q)_*(\Omega^p_{X/S} \mid U_Q) .$$

On désignera par $f_*(\underline{U}, \Omega^*_{X/S})$ le complexe double de faisceaux sur S de composantes

(3.6.1) $$f_*(\underline{U}, \Omega^*_{X/S})^{pq} = \bigoplus_{\# Q = q+1} f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S})$$

de première différentielle induite par la différentielle extérieure, et de seconde différentielle "Čechiste". La suite spectrale 3.4.1 est la suite spectrale de ce double complexe déduite de la filtration par le premier degré.

Soit v un champ de vecteurs (holomorphe) sur S , et supposons donné sur chaque U_i un champ de vecteurs v_i relevant v . On désignera par $\theta(v_i)$ l'endomorphisme de $f_*(\underline{U}, \Omega^*_{X/S})$, vérifiant, pour $Q = (i_1,\ldots,i_q)$, avec $i_1 < \ldots < i_q$,

$$\theta(v_i)f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S}) \subset f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S}) \oplus \bigoplus_{i_o < i_1} f_*(U_{\{i_o\} \cup Q}, \Omega^{p-1}_{X/S})$$

et de coordonnées la dérivée de Lie

$$\underline{L}_{v_{i_1}} : f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S}) \to f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S})$$

et les produits contractés

$$(-1)^p(v_{i_1} - v_{i_o}) \llcorner : f_*(U_Q, \Omega^p_{X/S}) \to f_*(U_{\{i_o\} \cup Q}, \Omega^{p-1}_{X/S}) .$$

Un calcul facile montre que $\theta(v_i)$ commute à d .

LEMME 3.7.- <u>Sur les faisceaux de cohomologie</u> $R^n_{\mathcal{O}}(f)$ <u>de</u> $f_*(\underline{U}, \Omega^*_{X/S})$, <u>l'endomorphisme</u> $\theta(v_i)$ <u>induit</u> ∇_v .

Soit $\mathcal{O}_\infty$ le faisceau des fonctions C^∞ sur S . Si $f_*(\underline{U}, \Omega^*_{\infty\, X/S})$ est l'analogue C^∞ de (3.6.1), construit en termes du complexe des formes différentielles relatives C^∞ , à valeurs complexes, sur X , on a

$$R^n_{\mathcal{O}_\infty}(f) = \underline{H}^n(f_*(\underline{U}, \Omega^*_{\infty\, X/S})) .$$

Les faisceaux $\Omega^p_{\infty\, X/S}$ étant mous, cette formule reste même valable pour tout recouvrement $\underline{U}'$.

Si les $(v'_i)_{0 \le i \le N}$ sont des relèvements C^∞ de v sur les U_i , la construction 3.6 définit encore des endomorphismes $\theta(v'_i)$ sur $R^n_{\mathcal{O}_\infty}(f)$. Si (v'_i) et (v''_i) sont deux systèmes de relèvements, un calcul facile montre que, au niveau des complexes,

$$(3.7.1) \qquad \theta(v_i') - \theta(v_i'') = dH - Hd ,$$

H ayant pour coordonnées non nulles les produits contractés

$$v_{i_1}' - v_{i_1}'' \llcorner \ : f_*(U_Q , \Omega^p_{\infty\, X/S}) \to f_*(U_Q , \Omega^{p-1}_{X/S})$$

($Q = \{i_1,\ldots,i_q\}$, $i_1 < \ldots < i_q$).

L'endomorphisme $\theta(v_i')$ de $R^n_{\mathcal{O}_\infty}(f)$ est donc indépendant du choix des v_i' ; il est compatible, via l'injection de $R^n_{\mathcal{O}}(f)$ dans $R^n_{\mathcal{O}_\infty}(f)$, à l'endomorphisme $\theta(v_i)$ de 3.7. Il suffit dès lors de vérifier que $\theta(v_i') = \nabla_v$ sur $R^n_{\mathcal{O}_\infty}(f)$. On vérifie que $\theta(v_i')$, indépendant des v_i' , est aussi indépendant de $\underline{U}$. Prenons $\underline{U} = \{X\}$, et pour v' un relèvement de v . On a alors

$$f_*(\underline{U} , \Omega^*_{\infty\, X/S}) = f_*(\Omega^*_{\infty\, X/S}) ,$$

et $\theta(v')$ est la dérivée de Lie selon v' , visiblement égale à ∇_v .

3.8. Achevons la démonstration de 3.6. Par construction, on a

$$(3.8.1) \quad \theta(v_i)\Big(\bigoplus_{p' \geq p} f_*(\underline{U} , \Omega^*_{X/S})^{p',q'}\Big) \subset \bigoplus_{p' \geq p-1} f_*(\underline{U} , \Omega^*_{X/S})^{p',q'} .$$

Puisque la suite spectrale (3.4.1) se déduit du complexe double $f_*(\underline{U} , \Omega^*_{X/S})$, on tire de 3.7 et (3.8.1) que

$$(3.8.2) \qquad \theta(v_i)\, F^p(R^n_{\mathcal{O}}(f)) = \nabla_v\, F^p(R^n_{\mathcal{O}}(f)) \subset F^{p-1}(R^n_{\mathcal{O}}(f)) .$$

Ceci étant vrai localement sur S , et pour tout v , implique 3.6.

3.9. Il résulte de la formule de Leibniz

$$\nabla(fh) = df.h + f.\nabla h$$

que l'application induite par ∇

$$\operatorname{def}(\nabla) : \operatorname{Gr}^p_F(R^n_{\mathcal{O}}(f)) \to \Omega^1_S \otimes \operatorname{Gr}^{p-1}_F(R^n_{\mathcal{O}}(f))$$

est $\mathcal{O}$-linéaire. Elle s'identifie d'après 3.4.1 à

(3.9.1) $\mathrm{def}(\nabla) : R^q f_* \Omega^p_{X/S} \to \Omega^1_S \otimes R^{q+1} f_* \Omega^{p-1}_{X/S}$.

On déduit de la formule 3.7 pour ∇_v que

PROPOSITION 3.10.- *L'homomorphisme* (3.9.1) *est le cup-produit, via l'accouplement* (3.3.1), *avec la classe de Kodaira-Spencer*

$$c \in \Omega^1_S \otimes R^1 f_*(T^1_{X/S})$$

qui exprime comment X_s *se déforme avec* s .

DÉFINITION 3.11.- (i) *Une* famille de structures de Hodge réelles, *de poids* n , H *sur* S *consiste en*

a) *un système local de vectoriels réels* $H_{\mathbf{R}}$ *sur* S ;

b) *une filtration holomorphe finie* F *du faisceau analytique localement libre* $H_{\mathcal{O}} = H_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{R}} \mathcal{O}$,

ces données vérifiant les conditions suivantes :

(H.1) *La connexion naturelle* ∇ *de* $H_{\mathcal{O}}$ *est telle que*

$$\nabla F^p(H_{\mathcal{O}}) \subset \Omega^1_S \otimes F^{p-1}(H_{\mathcal{O}}) .$$

(H.2) *En tout point* $s \in S$, F *définit sur* $(H_{\mathbf{R}})_s$ *une structure de Hodge de poids* n .

(ii) *Une* polarisation *de* H *est une forme bilinéaire localement constante* Ψ *sur* $H_{\mathbf{R}}$ *qui induise en tout point* $s \in S$ *une polarisation de* $(H_{\mathbf{R}})_s$.

3.12. Une *famille de structures de Hodge* H de poids n sur S est un système local de $\mathbf{Z}$-modules libres de type fini $H_{\mathbf{Z}}$ sur S , plus une famille de structures de Hodge réelles sur $H_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes H_{\mathbf{Z}}$. Une *polarisation* de H est une polarisation Ψ de $H_{\mathbf{R}}$ qui soit à valeurs entières sur $H_{\mathbf{Z}}$.

Avec ces définitions, on peut reformuler 2.2 (C) et 3.6 en disant que, sous les hypothèses de 3.1, $P^n_{\mathbb{Z}}(f)$ <u>est une famille polarisée de structures de Hodge sur</u> S .

4. <u>Le théorème de régularité</u>.

4.1. Lorsqu'on part d'un morphisme projectif et lisse $f : X \to S$ de <u>schémas</u> de type fini sur $\mathbb{C}$, tel que $f^{an} : X^{an} \to S^{an}$ vérifie les hypothèses de 3.1, certains des objets construits au n° 3 se déduisent d'objets de nature purement algébrique par application du foncteur de "passage à l'analytique". Ce sont :

a) les faisceaux de modules $R^n_{\mathcal{O}}(f)$, leur filtration de Hodge, la suite spectrale 3.4.1, et la connexion de Gauss-Manin ;

b) la structure d'algèbre (cup-produit) sur $R^*_{\mathcal{O}}(f)$, et la "partie primitive" $P^n_{\mathcal{O}}(f)$;

c) le produit, par une puissance convenable de $2\pi i$, de la forme de polarisation Ψ .

Par contre, le "réseau entier" $R^*_{\mathbb{Z}}(f)$, et la structure réelle qui s'en déduit sur la cohomologie complexe des fibres de f , sont de nature transcendante.

4.2. Soient en effet S un schéma lisse de type fini sur $\mathbb{C}$ et X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^r(\mathbb{C}) \times S$, tel que la projection $f : X \to S$ soit un morphisme lisse purement de dimension relative d .

D'après la variante relative de GAGA, pour tout faisceau algébrique cohérent F sur X , on a

$$(R^n f_* F)^{an} \xrightarrow{\sim} R^n f_*^{an}(F^{an}) .$$

Plus généralement, si K^* est un complexe de faisceaux algébriques cohérents dont les différentielles d_i sont des opérateurs différentiels (algébriques) $f^{\cdot}\mathcal{O}_S$-linéaires, alors les images directes en hypercohomologie vérifient

$$R^n f_*(K^*)^{an} \xrightarrow{\sim} R^n f_*^{an}(K^{*an})$$

(ce cas se ramène au précédent <u>via</u> l'une des suites spectrales d'hypercohomologie).

Prenons pour K le complexe de De Rham algébrique relatif $\Omega^*_{X/S}$. On trouve que (notation de 3.2)

$$(R^n f_* \Omega^*_{X/S})^{an} \xrightarrow{\sim} R^n f_*^{an}(\Omega^{*an}_{X/S}) \xleftarrow{\sim} R^n f_*^{an}(f^{\cdot an}\mathcal{O}_S^{an}) = R^n_{\mathcal{O}}(f) .$$

De plus, la suite spectrale (3.4.1) provient d'une suite spectrale purement algébrique

(4.2.1) $$E_1^{pq} = R^q f_* \Omega^p_{X/S} \Rightarrow R^{p+q} f_* \Omega^*_{X/S} .$$

D'après 3.4, les E_1^{pq} sont localement libres (puisque les $E_1^{pq\,an}$ le sont), la suite spectrale (4.2.1) dégénère et sa formation est compatible à tout changement de base. La filtration de Hodge, à laquelle elle aboutit, est <u>ipso facto</u> algébrique.

Le cup-produit se définit en termes du produit extérieur dans $\Omega^*_{X/S}$. La classe de cohomologie de De Rham d'une section hyperplane pouvant se définir algébriquement (à multiplication par une puissance de $2\pi i$ près), à partir de la différentielle logarithmique $df/f : \mathcal{O}_X^* \to \Omega^1_{X/S}$, la partie primitive $P^n_{\mathcal{O}}(f)$ et Ψ sont aussi de nature algébrique.

Enfin, la construction 3.6 - 3.7 de la connexion de Gauss-Manin se transpose aisément au cas algébrique (Katz-Oda [10]).

4.3. Soient D une surface de Riemann isomorphe au disque unité, 0 un point de D, $D^* = D - \{0\}$, V un fibré vectoriel holomorphe sur D^*, ∇ une connexion holomorphe sur V et V_o le système local des sections horizontales de V. On a

$V \xrightarrow{\sim} V_o \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}$. Le groupe fondamental (commutatif) $\pi_1(D^*) \simeq \mathbf{Z}$ agit sur V_o . On désigne par T la transformation de monodromie, i.e. l'action sur V_o ou V du générateur positif de $\pi_1(D^*)$.

Il existe U tel que

$$T = \exp(2\pi i U) .$$

Soient $z : D \hookrightarrow \mathbf{C}$ une coordonnée, vérifiant $z(0) = 0$, et $\widetilde{D}^*$ le revêtement (universel) de D^* sur lequel $\log z$ est défini. Pour v une section de V_o sur $\widetilde{D}^*$,

$$\exp(-\log z \,.\, U)(v)$$

est l'image réciproque d'une section holomorphe de V sur D^* .

Cette construction définit un isomorphisme

$$m_{U,z} : \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{C}} H^0(\widetilde{D}^*, V_o) \xrightarrow{\sim} V ,$$

et par là un prolongement naturel V_U de V sur D , qui ne dépend que de U . Une section v de V sur D^* sera dite ∇-modérée si, en tant que section de V_U , elle est méromorphe en 0 . Cette notion ne dépend pas du choix de U .

4.4. Soient S le complément dans une courbe projective et lisse $\bar{S}$ d'un ensemble fini T , et V un fibré vectoriel algébrique sur S . Une connexion (algébrique) ∇ sur V est dite <u>régulière</u> si, pour tout $t \in T$, les sections méromorphes de V au voisinage de t sont ∇-modérées.

THÉORÈME 4.5.- <u>Pour</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme de schémas projectif et lisse, la connexion de Gauss-Manin sur</u> $R^n f_* \Omega^*_{X/S}$ <u>est régulière</u>.

Ce théorème est prouvé dans [2]. Une démonstration complètement différente, procédant par voie arithmétique, est due à Katz [9].

4.6. Soient D^* comme en 4.3, H une famille de structures de Hodge réelles sur D^*, T la transformation de monodromie de $H_{\mathbf{C}}$, U une transformation de $H_{\mathbf{C}}$ telle que $T = \exp(2\pi i U)$ et $H_{\mathcal{O},U}$ le prolongement localement libre correspondant de $H_{\mathcal{O}}$ sur D.

On dit que H est <u>régulière</u> en 0 si la filtration de Hodge de $H_{\mathcal{O}}$ se prolonge à $H_{\mathcal{O},U}$. Cette condition ne dépend pas de U. Le théorème 4.5 a le corollaire suivant, de conclusion purement analytique.

COROLLAIRE 4.7.- <u>Sous les hypothèses de 4.5, les familles de structures de Hodge</u> $R^n(f)$ <u>sur</u> S^{an} <u>sont régulières au voisinage de tout point</u> $t \in T$.

On peut espérer que, en fait, toute famille polarisée de structures de Hodge sur D^* soit automatiquement régulière.

5. <u>Espaces modulaires.</u>

5.1. Soient G un groupe algébrique réel, $C \in G(\mathbf{R})$, et V une représentation réelle de G. Une C-<u>polarisation</u> de V est une forme bilinéaire Ψ sur V, G-invariante, et telle que $\Psi(x,Cy)$ soit symétrique et définie > 0.

LEMME 5.2.- <u>Si</u> G <u>est connexe</u> (<u>par quoi on entend que</u> $G(\mathbf{C})$ <u>l'est</u>), <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) G <u>admet une représentation</u> $\rho : G \to GL(V)$ <u>de noyau</u> $\mathrm{Ker}(\rho)$ <u>fini qui soit</u> C-<u>polarisable</u>.

(ii) <u>Toute représentation de</u> G <u>est</u> C-<u>polarisable</u>.

(iii) G <u>est réductif et</u> $\mathrm{ad}\, C$ <u>est une involution de Cartan</u> (<u>de</u> G).

La démonstration est laissée au lecteur.

Remarque 5.3.- Il existe dans $G(\mathbf{R})$ des éléments C vérifiant les conditions de 5.2 si et seulement si G est réductif et admet un tore maximal compact. Dans ce cas :

a) Un tel élément C est contenu dans un seul sous-groupe compact maximal, son centralisateur.

b) Pour G adjoint, la correspondance $C \longmapsto$ (centralisateur de C) est une bijection entre l'ensemble de ces éléments et l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux de $G(\mathbf{R})$.

5.4. Soit G un groupe algébrique réel, muni d'homomorphismes

(5.4.1) $$\mathbb{G}_m \xrightarrow{w} G \xrightarrow{t} \mathbb{G}_m$$

tels que w soit central et que $tw(x) = x^2$. Une représentation $\rho : G \to GL(V)$ sera dite homogène de poids n si $\rho\, w(x) = x^n$.

Par morphisme de S dans G on entendra toujours un homomorphisme $h : \underline{S} \to G$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}_m & \xrightarrow{w} & G & \xrightarrow{t} & \mathbb{G}_m \\ \| & & \downarrow h & & \| \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{w} & G & \xrightarrow{t} & \mathbb{G}_m \end{array} .$$

Si $h : \underline{S} \to G$ est un morphisme et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation réelle de G , on notera h_V la structure de Hodge réelle (1.4) $\rho \circ h$ de V . Pour ρ homogène de poids n , une polarisation de V est une polarisation Ψ de (V, h_V) qui vérifie

(5.4.2) $$\Psi(gx, gy) = t(g)^n\, \Psi(x,y) .$$

On dira que h est positif si toute représentation de G est polarisable.

5.5. Le groupe G, muni de (5.4.1), est uniquement déterminé par $G^o = \mathrm{Ker}(t)$, muni de l'élément central, d'ordre divisant 2, $\varepsilon = w(-1)$. Le groupe G s'identifie en effet au quotient de $\mathbb{G}_m \times G^o$ par le sous-groupe engendré par $(-1, \varepsilon)$.

De ce point de vue, un morphisme $h : \underline{S} \to G$ s'identifie à $h^o : \underline{S}^o \to G^o$ tel que $h^o(-1) = \varepsilon$. Une représentation homogène de poids n de G s'identifie à une représentation ρ de G^o telle que $\rho(\varepsilon) = (-1)^n$, et une polarisation de cette représentation s'identifie à une $h^o(i)$-polarisation (5.1). D'après 5.2, si G^o est connexe, h est un morphisme positif si et seulement si G est réductif et que $\mathrm{ad}\, h^o(i)$ est une involution de Cartan de G^o.

5.6. <u>On suppose désormais que</u> G^o <u>est réductif connexe</u>.

Soit h un morphisme de S dans G. Pour $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G, on désigne par F_h la filtration de Hodge de $V_{\mathbb{C}}$ déduite de h_V. Pour la représentation adjointe $\mathrm{Lie}(G)$,

$$F_h^o(\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})^{p,-p} \tag{5.6.1}$$

est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe parabolique $P(h)$ de $G_{\mathbb{C}}$. Pour toute représentation $\rho : G \to GL(V)$ de G, $P(h)$ respecte la filtration de Hodge F_h de $V_{\mathbb{C}}$; si $\mathrm{Ker}(\rho) \cap G^o$ est central, alors $P(h)$ est exactement le sous-groupe de G qui respecte cette filtration.

Enfin, on désigne par $H(h)$ le centralisateur de h dans $G(\mathbb{R})$.

5.7. Soit X une classe de conjugaison de morphismes de $\underline{S}$ dans G. On désignera par $\check{X}$ l'ensemble des conjugués dans $G(\mathbb{C})$ de $P(h)$, pour $h \in X$.

LEMME 5.8.- <u>L'application</u> $G(\mathbb{R})$-<u>équivariante</u> $P : h \longmapsto P(h)$ <u>identifie</u> X <u>à un ouvert de l'espace de drapeaux</u> $\check{X}$.

Soient $h \in X$ et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation homogène de G telle que $Ker(\rho) \cap G^o$ soit fini. L'ensemble X s'identifie à l'ensemble des structures de Hodge sur V, conjuguées sous $G(\mathbf{R})$ à h_V, tandis que $\check{X}$ s'identifie à l'ensemble des filtrations sur $V_{\mathbf{C}}$, conjuguées sous $G(\mathbf{C})$ à F_h. Une structure de Hodge homogène étant déterminée par sa filtration de Hodge, l'application P est injective. Elle s'identifie à l'application

$$G(\mathbf{R})/H(h) \quad \to \quad G(\mathbf{C})/P(h)$$

de différentielle à l'origine

$$\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(H) \quad \to \quad \mathrm{Lie}(G_{\mathbf{C}})/\mathrm{Lie}(P(h)) \ ,$$

i.e. $\quad \mathrm{Lie}(G)/(F^o \cap \bar{F}^o)(\mathrm{Lie}(G)) \quad \to \quad F^{-\infty}/F^o(\mathrm{Lie}(G_{\mathbf{C}}))$.

Cette différentielle est bijective, d'où 5.8.

On a vu en passant que

(5.8.1) $\qquad H(h) = G(\mathbf{R}) \cap P(h)$.

5.9. Soient V une représentation réelle de G, $V(\check{X}, \mathbf{R})$ le faisceau constant sur $\check{X}$ de valeur V, $V(\check{X}, \mathbf{C}) = \mathbf{C} \otimes V(\check{X}, \mathbf{R})$, $V(\check{X}, \mathcal{O}) = \mathcal{O} \otimes_{\mathbf{C}} V(\check{X}, \mathbf{C})$ et ∇ la connexion intégrable naturelle de $V(\check{X}, \mathcal{O})$. L'application $G(\mathbf{R})$-équivariante $h \to h_V$ de X dans les structures de Hodge sur V se prolonge de façon unique en une application $G(\mathbf{C})$-équivariante et donc holomorphe de $\check{X}$ dans les filtrations de $V_{\mathbf{C}}$. Celle-ci correspond à une filtration F de $V(\check{X}, \mathcal{O})$, la <u>filtration de Hodge</u>. Le système $(V(\check{X}, \mathcal{O}), \nabla, F)$ est $G(\mathbf{C})$-équivariant. La structure réelle $V(\check{X}, \mathbf{R})$ de $V(\check{X}, \mathbf{C})$ est $G(\mathbf{R})$-équivariante. Enfin, en $h \in X$, F induit sur $V_{\mathbf{C}}$ la filtration de Hodge F_h.

5.10. L'action de $G(\mathbf{C})$ sur $\check{X}$ définit un morphisme

(5.10.1) $\quad \mathrm{Lie}(G)(\check{X}, \mathcal{O}) \to T_{\check{X}}$,

où $T_{\check{X}}$ est le fibré tangent. En $h \in X$, le noyau de (5.10.1) est $\mathrm{Lie}(P(h)) = F_h^o(\mathrm{Lie}(G_{\mathbf{C}}))$ (5.6), de sorte que (5.10.1) se factorise par un isomorphisme $G(\mathbf{C})$-équivariant

(5.10.2) $\quad F^{-\infty}/F^o(\mathrm{Lie}(G)(\check{X}, \mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} T_{\check{X}}$.

On désigne par $T^1_{\check{X}}$ le sous-fibré holomorphe de $T_{\check{X}}$ image de $F^{-1}(\mathrm{Lie}(G)(\check{X}, \mathcal{O}))$. On vérifie facilement que si v est une section locale de $T^1_{\check{X}}$, alors

$$\nabla_v(F^p(V(\check{X}, \mathcal{O}))) \subset F^{p-1}(V(\check{X}, \mathcal{O})) ,$$

quelle que soit la représentation $\rho : G \to GL(V)$. La réciproque est vraie pour $\mathrm{Ker}(\rho) \cap G^o$ central.

5.11. Supposons maintenant que X soit une classe de conjugaison de morphismes <u>positifs</u> de S dans G . Pour $h \in X$, on posera $C_h = h(i)$ et on désignera par $K(h)$ le centralisateur de C_h dans $G(\mathbf{R})$. Le groupe $K^o(h) = K(h) \cap G^o(\mathbf{R})$ est compact. Soient V une représentation de G et Ψ une forme bilinéaire G-invariante sur V . Si Ψ est une polarisation de (V , h_V) pour un $h \in X$, alors Ψ est une polarisation de (V , h_V) pour tout $h \in X$. En effet, posant $\Phi_h(x,y) = \Psi(x,C_h y)$, on a

(5.11.1) $\quad \Phi_{gh} = g(\Phi_h)$.

On dira que Ψ est alors une <u>polarisation de</u> V . Par hypothèse, toute représentation de G est polarisable.

5.12. Soit Ψ une polarisation de la représentation adjointe de G sur $\mathrm{Lie}(G)$. D'après 5.10.2, Ψ induit en chaque point $h \in X$ une forme hermitienne définie positive sur

$$(5.12.1)\qquad (T_X)_h \simeq F_h^{-\infty}/F_h^0(\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}) \simeq \bigoplus_{p<0} \mathrm{Lie}(G)^{p,-p} .$$

La polarisation Ψ définit donc une structure hermitienne, invariante sous $G(\mathbb{R})$, sur X.

Si Z est le centre de G, on a déjà

$$(5.12.2)\qquad F^{-\infty}/F^0(\mathrm{Lie}(G/Z)(\check{X}, \Theta)) \xrightarrow{\sim} T_{\check{X}}$$

et une polarisation Ψ de $\mathrm{Lie}(G/Z)$ définit déjà une structure de variété hermitienne sur X. On peut prendre pour Ψ l'opposé de la forme de Killing de G/Z.

Posons

$$(5.12.3)\qquad \begin{cases} (T_X^v)_h = \bigoplus_{p<0} (\mathrm{Lie}(G/Z))^{2p,-2p} \\ (T_X^h)_h = \bigoplus_{p<0} (\mathrm{Lie}(G/Z))^{2p-1,-2p+1} \end{cases} .$$

On obtient ainsi une décomposition orthogonale C^∞ du fibré tangent en deux sous-fibrés complexes. On a

$$(5.12.4)\qquad (T_X^1)_h \subset (T_X^h)_h \qquad\qquad (h \in X) .$$

5.13. Le sous-groupe $K(h)_{\mathbb{C}} \cap P(h)$ de $K(h)_{\mathbb{C}}$ est parabolique, de sorte que $K(h)_{\mathbb{C}} \subset K(h).P(h)$ et que $K(h).h = K(h)_{\mathbb{C}}.h$ est une sous-variété analytique complexe compacte de X. Ces variétés sont les fibres de la fibration C^∞ $G(\mathbb{R})$-équivariante

$$X = G/H(h) \to G/K(h) .$$

On vérifie facilement que T_X^v est le fibré tangent à cette fibration.

5.14. Rappelons que sur un fibré hermitien holomorphe F, il existe une et une seule connexion hermitienne ∇ telle que $\nabla'' = \partial''$. La courbure R du fibré est par définition la courbure de cette connexion. C'est une forme de type $(1,1)$ à valeur dans l'algèbre de Lie du groupe unitaire du fibré.

Si F est le fibré constant défini par un vectoriel F_o, et si la forme hermitienne s'écrit

(5.14.1) $\quad \Phi(x,y) \;=\; \Phi_o(hx,y)$,

alors, pour $x : S \to F_o$ une section C^∞ de F , on a

(5.14.2) $\quad \nabla x \;=\; \partial x + h^{-1}\partial' h.x$.

On en tire que, pour u et v deux champs tangents,

(5.14.3) $R(u,v) = \partial_u(h^{-1}\partial'_v h) - \partial_v(h^{-1}\partial'_u h) - h^{-1}\partial'_{[uv]}h + [h^{-1}\partial'_u h\, ,\, h^{-1}\partial'_v h]$.

5.15. Soit F le fibré tangent d'une variété analytique complexe hermitienne. Pour u un vecteur tangent à S , on désignera par $u_{1,0}$ et $u_{0,1} = \overline{u_{1,0}}$ ses composantes de type (1,0) et (0,1) dans le complexifié du fibré tangent. On appelle <u>courbure holomorphe</u> de S dans la direction u le nombre réel

(5.15.1) $\quad R(u) \;=\; \Phi(R(u_{1,0}\, ,\, u_{0,1})(u)\, ,\, u)/\Phi(u,u)^2$.

Si on munit X de la structure hermitienne 5.12, on a le résultat fondamental ([8], § 9) :

THÉORÈME 5.16.- <u>Il existe</u> $\lambda < 0$ <u>telle que</u> $R(u) \leq \lambda$ <u>dans toute direction appartenant à</u> T^h_X .

<u>Preuve</u> (une esquisse) : Par homogénéité, il suffit de prouver 5.16 en un point $e \in X$. Posons $H = H(e)$, $P = P(e)$, soit N^+ le radical unipotent de P et soit N^- le sous-groupe complexe conjugué d'algèbre de Lie

$$\underline{n}^- \;=\; \bigoplus_{p<0} \mathrm{Lie}(G)^{p,-p} .$$

Dans les calculs qui suivent, on identifiera, près de e , X à N^- par les applications

$$X \;=\; G/H \hookrightarrow G(\mathbf{C})/P \hookleftarrow N^- .$$

Les translations à <u>gauche</u> sur N^- permettent d'identifier le fibré tangent à n^- . On désignera par t^+ , t^o et t^- les projections orthogonales de $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbf{C}}$ sur $\underline{n}^-$, Lie($H_{\mathbf{C}}$) et $\underline{n}^+ = \mathrm{Lie}(N^+)$. Pour $g = np$ ($g \in G(\mathbf{R})$, $n \in N^-$, $p \in P$) , la différentielle, en e , de l'action de g sur X s'identifie à

$$t^- \text{ ad } p : \underline{n}^- \to \underline{n}^- .$$

La structure hermitienne s'écrit donc

$$\Phi_n(x,y) = \Phi_e(t^- \text{ ad } p^{-1}x , t^- \text{ ad } p^{-1}y) .$$

Désignant par Ψ la forme de polarisation et par C l'involution de Cartan associée à e , on a

$$\begin{aligned}\Phi_n(x,y) &= \Psi(t^- \text{ ad } p^{-1}x , t^-C\, \overline{\text{ad } p^{-1}y})) \\ &= \Psi(t^- \text{ ad } p^{-1}x , \text{ad } C(\bar{p})^{-1} . C\bar{y}) \\ &= \Psi(\text{ad } C(\bar{p}) . t^- . \text{ad } p^{-1} . x , C\bar{y}) \\ &= \Phi_e(\text{ad } C(\bar{p}) . t^- . \text{ad } p^{-1} . x , y) .\end{aligned}$$

On vérifie que pour $n = \exp(u)$ avec $u \sim 0$, on a <u>au 3ème ordre près</u>

$$p = \exp(\bar{u} - \tfrac{1}{2} t^0[u,\bar{u}] - t^+[u,\bar{u}])$$

et $$h = \text{ad } C(\bar{p})\, t^- \text{ ad } p^{-1} = \exp(H)$$

pour $$H = t^- \circ \text{ad}(Cu - \bar{u} + [u,\bar{u}]) - \tfrac{1}{2}[t^- \text{ ad } Cu , t^- \text{ ad } \bar{u}] .$$

Sous les hypothèses de 5.14, si $h = \exp(H)$ et si $H = 0$ en $s_o \in S$, on déduit de 5.14.3 que, en s_o

$$R(u,v) = (\partial''_u\partial'_v - \partial''_v\partial'_u)H - \tfrac{1}{2}[\partial''_u H , \partial'_v H] + \tfrac{1}{2}[\partial''_v H , \partial'_u H] + (\partial'_u\partial'_v - \partial'_v\partial'_u - \partial'_{[uv]})H .$$

Appliquant cette formule, on voit que la courbure est donnée, en e , par

$$R(u,v)_e = S(u , \bar{v}) - S(v , \bar{u}) ,$$

avec
$$\begin{aligned} S(u , \bar{v}) &= - t^- \circ \text{ad}[u , \bar{v}] + \tfrac{1}{2}[t^- \text{ ad } Cu , t^- \text{ ad } \bar{v}] \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}[-t^- \text{ ad } \bar{v} , t^- \text{ ad } Cu] \\ &= [t^- \text{ ad } Cu , t^- \text{ ad } \bar{v}] - t^- \circ \text{ad}[u , \bar{v}] .\end{aligned}$$

Quels que soient $u , v \in \underline{n}^-$, si u_{10} et u_{01} sont les composantes de type (10) et (01) de u comme en 5.15, on a grâce à l'invariance de Ψ ,

$$\begin{aligned}\Phi(R(u_{10}, u_{01})(v), v) &= \Psi(S(u, \bar{u})(v), C\bar{v}) \\ &= \Psi([Cu, t^{-}[\bar{u}, v]] - t^{-}[\bar{u}[Cu, v]] - t^{-}[[u\bar{u}], v], C\bar{v}) \\ &= -\Psi(t^{-}[\bar{u}, v], [Cu, C\bar{v}]) + \Psi([Cu, v], [\bar{u}, C\bar{v}]) - \Psi([u,\bar{u}], [v, C\bar{v}]) .\end{aligned}$$

Pour $u = v \in T_X^h$, on a $Cu = -u$ et

$$\begin{aligned}\Phi(R(u_{10}, u_{01})(u), u) &= \Psi(t^{-}[u, \bar{u}], [u, \bar{u}]) + \Psi([u, \bar{u}], [v, \bar{v}]) \\ &= -\Phi(t^{-}[u, \bar{u}], t^{-}[u, \bar{u}]) - \Phi([u, \bar{u}], [u, \bar{u}]) < 0 ,\end{aligned}$$

ce qui prouve 5.16.

Une généralisation du lemme de Schwarz permet de déduire de 5.16 (voir [1], III, n° 10) :

COROLLAIRE 5.17.- *Soit* $f : D \to X$ *une application holomorphe du disque unité dans* X . *Munissons* D *de la métrique hyperbolique* d *pour laquelle il est de courbure* -1 , *et* X *de la métrique 4.12. Alors, si* $f(D)$ *est tangent aux* T_X^h , *on a*

$$d(f(x), f(y)) \leq |\lambda|\, d(x,y) .$$

6. Le théorème de monodromie, d'après A. Borel.

6.1. Soient S une variété analytique complexe connexe, munie d'un point base $s_o \in S$, et $p : \tilde{S} \to S$ son revêtement universel. Soit H une famille polarisée de structures de Hodge de poids n sur S . On désignera par H_o la structure de Hodge polarisée fibre de H en s_o .

La polarisation Ψ est une forme bilinéaire sur $H_{o\mathbb{Q}}$. On désignera par G^o le groupe algébrique, défini sur $\mathbb{Q}$, composante neutre du groupe des automorphismes de $(H_{o\mathbb{Q}}, \Psi)$, par $\varepsilon \in G^o$ l'homothétie de rapport $(-1)^n$, par G le groupe déduit, par le procédé 5.5 de (G^o, ε) et par Γ le groupe discret des automorphismes de $(H_{o\mathbf{Z}}, \Psi)$. On dispose de

(6.1.1) $\qquad T : \pi_1(S, s_o) \rightarrow \Gamma$.

6.2. Pour chaque point $s \in \tilde{S}$, on dispose d'un isomorphisme naturel $H_{o\mathbf{Z}} \simeq H_{p(s), \mathbf{Z}}$, et la structure de Hodge $H_{p(s)}$ s'identifie à une structure de Hodge sur $H_{o, \mathbf{Z}}$, définie par $h(s) : \underline{S} \rightarrow G_{\mathbf{R}}$. Les morphismes $h(s)$ sont positifs, et conjugués entre eux, car ils forment une famille continue connexe et que G est réductif. Si X est l'espace modulaire correspondant, défini au § 5, on dispose donc d'une application

$$h : \tilde{S} \rightarrow X .$$

La famille H est l'image réciproque par h du système de structures de Hodge sur X défini (5.9) par la représentation de poids n naturelle de G dans H_o .

Le morphisme h est équivariant, via (5.5.1), pour les actions de $\pi_1(S, s_o)$ et Γ sur $\tilde{S}$ et X .

D'après 3.4 et 3.6, l'application h est holomorphe et $\mathrm{Im}(dh) \subset T^1_X$ (cf. 5.10).

6.3. Supposons que S soit le disque unité épointé

$$D^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$$

et prenons pour revêtement universel de D^* le demi-plan de Poincaré Y , muni de

$$\exp(2\pi i y) : Y \rightarrow D^* .$$

Si $T \in \Gamma$ est la transformation de monodromie (4.3) de $H_{\mathbf{Z}}$, l'application h vérifie

(6.3.1) $\qquad h(y+1) = T h(y)$.

Choisissons $h_o \in X$. Si $h(y) = g_y . h_o$, la distance dans X , pour une métrique (5.12), vérifie

(6.3.2) $\quad d(h(y+1), h(y)) = d(Tg_y h_o, g_y h_o) = d(g_y^{-1} T g_y h_o, h_o)$.

D'après 5.17, si Y est muni de sa distance hyperbolique naturelle, l'application h décroît les distances (convenablement normalisées). Dans Y, on a

$$d(y\,,\,y+1) \sim (\mathrm{Im}(y))^{-1}$$

et donc

$$d(g_y^{-1}Tg_yh_o\,,\,h_o) \quad \to \quad 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad \mathrm{Im}(y) \to \infty\,. \tag{6.3.3}$$

Le même argument s'applique à T^2 ; de plus, $T^2 \in G(\mathbf{R})$, et (6.2.3) implique qu'une limite de conjugués de T^2 se trouve dans le sous-groupe compact $H(h_o)$ de $G(\mathbf{R})$. Les valeurs propres de T^2 (et de T) sont donc toutes de valeur absolue 1. Ces valeurs propres forment un ensemble d'entiers algébriques stable par conjugaison. Or,

LEMME 6.4.- <u>Si tous les conjugués complexes d'un entier algébrique</u> α <u>sont de valeur absolue</u> 1, <u>alors</u> α <u>est une racine de l'unité</u>.

Les valeurs propres de T sont donc des racines de l'unité, ce qui prouve

THÉORÈME DE MONODROMIE 6.5 (A. Borel).- <u>Soit</u> H <u>une famille de structures de Hodge polarisée sur le disque épointé</u> D^*. <u>Il existe des entiers</u> N <u>et</u> M <u>tels que la transformation de monodromie</u> T <u>vérifie</u>

$$(T^N - I)^M = 0\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. A. GRIFFITHS - Periods of integrals on algebraic manifolds.

I (Construction and properties of the modular Varieties), Am. J. Math., XC 2, 1968, p. 568-626.

II, Am. J. Math., XC 3, 1968, p. 805-865.

III (Some global differential-geometric properties of the period mapping), à paraître aux Publ. I.H.E.S.

[2] P. A. GRIFFITHS - Some results on Moduli and Periods of Integrals on Algebraic Manifolds III, Notes miméographiées de Princeton.

[3] P. A. GRIFFITHS - On the periods of integrals on algebraic manifolds, Rice un. studies, 54, 4, 1968.

Cet article résume, sans démonstration [1] I, II.

[4] P. A. GRIFFITHS - On the periods of certain rational integrals, I, II, Annals of Maths., 90 (1969), p. 460-541. III, à paraître aux Annals of Maths.

[5] P. A. GRIFFITHS - A theorem on periods of integrals on algebraic manifolds, Notes miméographiées de Yale.

[6] P. A. GRIFFITHS - Some results on algebraic cycles on algebraic manifolds, in Bombay Colloquium 1968, Oxford University Press.

[7] P. A. GRIFFITHS - Periods of integrals on algebraic manifolds (Summary of main results and discussions of open problems and conjectures), Bull. Am. Math. Soc., 75, 2, (1970), p. 228-296.

Cet article est très intéressant par les nombreuses conjectures qu'il discute.

[8] P. A. GRIFFITHS and W. SCHMID - Locally homogeneous complex manifolds, Acta Mathematica, 1970, p. 253-302.

Cet article, très lisible, contient beaucoup d'informations sur les espaces définis au § 5 et la cohomologie de leurs quotients par des sous-groupes discrets.

[9] N. KATZ - Nilpotent connections and the monodromy theorem, Applications of a results of Turrittin, à paraître aux Publ. I.H.E.S.

[10] N. KATZ and T. ODA - On the differentiation of De Rham cohomology classes with respect to parameters, J. Math. Kyoto Univ., 8, 2, 1968, p. 199-213.