SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL DEMAZURE

Structure des groupes réductifs

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 313, p. 5-11

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__5_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI

19e année, 1966/67, n° 313 Novembre 1966

STRUCTURE DES GROUPES RÉDUCTIFS

(d'après BOREL-TITS)

par Michel DEMAZURE

Cet exposé est une liste incomplète des résultats contenus dans l'article de A. BOREL et J. TITS : Groupes réductifs, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., n° 27, p. 55-150. En particulier, les paragraphes 6, 7, 11 et 12 de cet article ne sont pas exposés ci-dessous.

Dans la suite, k désigne un corps commutatif, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, et G un k-groupe réductif connexe. Si H est un k-groupe algébrique, on désigne par $H(k)$ le groupe des points de H rationnels sur k et par $H_{\bar{k}}$ le groupe obtenu par extension du corps de base de k à $\bar{k}$.

1. Groupes paraboliques.

1.1. On appelle sous-groupe parabolique de G un sous-groupe lisse P de G tel que $P_{\bar{k}}$ contienne un sous-groupe de Borel de $G_{\bar{k}}$.

1.2. Un sous-groupe parabolique P de G est connexe, est son propre normalisateur, et G/P est projectif.

1.3. Un sous-groupe parabolique P de G possède un plus grand sous-groupe invariant unipotent connexe, son radical unipotent $R^u(P)$. Le quotient $P/R^u(P)$ est réductif. De plus, P possède des sous-groupes de Levi, c'est-à-dire des sous-groupes L tels que le morphisme composé $L \hookrightarrow P \longrightarrow P/R^u(P)$ soit un isomorphisme.

Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi de P, ils sont conjugués : plus précisément, il existe un unique $x \in R^u(P)(k)$ tel que $L' = x\,L\,x^{-1}$.

1.4. Le groupe $R^u(P)$ possède une suite de composition dont les quotients sont "des espaces vectoriels" ; en particulier $H^1(k,R^u(P)) = 0$.

1.5. Soient P un sous-groupe parabolique de G et L un sous-groupe de Levi de P ; il existe un unique sous-groupe parabolique P' de G tel que $P' \cap P = L$. Le morphisme induit par le produit dans G

$$R^u(P') \times P \longrightarrow G$$

est une immersion ouverte et $G = R^u(P)(k).R^u(P')P$.

1.6. Par conséquent, les fibrations $G \longrightarrow G/P$ et $G \longrightarrow G/L$ sont localement triviales, et $(G/P)(k) = G(k)/P(k)$, $(G/L)(k) = G(k)/L(k)$.

2. Théorèmes de conjugaison.

2.1. Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G. Si $P_{\bar{k}}$ et $P'_{\bar{k}}$ contiennent le même sous-groupe de Borel de G, $P \cap P'$ est un sous-groupe parabolique de G. Si de plus $P_{\bar{k}}$ et $P'_{\bar{k}}$ sont conjugués par un élément de $G(\bar{k})$, alors $P = P'$.

2.2. *Si P et P' sont deux sous-groupes paraboliques de G, il existe $x \in G(k)$ tel que $x\,P\,x^{-1} \cap P'$ soit un sous-groupe parabolique de G.*

2.3. En particulier, si $P_{\bar{k}}$ et $P'_{\bar{k}}$ sont conjugués, alors P et P' sont conjugués.

2.4. Les sous-groupes paraboliques *minimaux* de G sont *conjugués*.

3. Tores triviaux.

3.1. Soit S un sous-tore trivial de G, et L le centralisateur de S. Il existe un sous-groupe parabolique P de G dont L soit un sous-groupe de Levi. Réciproquement, si P est un sous-groupe parabolique de G et L un sous-groupe de Levi de P, L est le centralisateur de l'unique sous-tore trivial maximal de son centre (qui est de type multiplicatif).

3.2. En particulier, les sous-groupes de Levi L des sous-groupes paraboliques minimaux de G et les sous-tores triviaux maximaux S de G se correspondent biunivoquement de la façon suivante : à L correspond son tore central trivial maximal S, à S son centralisateur L. Il en résulte que les sous-tores triviaux maximaux de G sont conjugués.

3.3. Pour que G ne possède aucun sous-groupe parabolique distinct de lui-même, il est donc nécessaire et suffisant qu'il ne possède aucun sous-tore trivial non central.

3.4. On dit que G est anisotrope, s'il ne possède aucun sous-tore trivial non nul ; pour que G soit anisotrope, il est donc nécessaire et suffisant que G ne possède aucun sous-groupe parabolique propre et que son centre soit anisotrope. Cette dernière condition peut se remplacer par $\mathrm{Hom}(G, \underline{G}_{m\,k}) = 0$.

3.5. Si L est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique minimal de G, et si S est son tore central trivial maximal, il existe un unique sous-groupe lisse et connexe M de L tel que le morphisme produit $M \times S \longrightarrow L$ soit une isogénie, c'est-à-dire tel que $L = M.S$ et que $M \cap S$ soit fini sur k ; de plus M est un groupe réductif anisotrope.

3.6. Si P est un sous-groupe parabolique minimal de G, on peut donc écrire $P = M.S.U$, où M est anisotrope, S est un tore trivial maximal de G, et $U = R_u(P)$; on a $M.S \cap U = e$ et $M \cap S$ est fini.

4. Système de racines relatif.

4.1. Soit S un sous-tore trivial maximal de G, et soit L son centralisateur. Notons N le normalisateur de S et $W = N(k)/L(k)$. On a aussi $W = (N/L)(k)$ et N/L est le groupe algébrique constant associé à W.

4.2. Soit V le $\underline{\underline{Q}}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(S, \underline{\underline{G}}_{m,k}) \otimes \underline{\underline{Q}}$ et soit R l'ensemble des poids non nuls de la représentation adjointe de S sur l'algèbre de Lie de G. Le groupe W opère fidèlement sur V et laisse R stable. Alors (V, R, W) est un système de racines : pour chaque $r \in R$, il existe un unique $r^* \in V^*$ tel que $r^*(R) \subset \underline{\underline{Z}}$ et que $x \longmapsto x - r^*(x)\, r$ soit un élément de W. Ce système de racines n'est pas nécessairement réduit.

4.3. Pour tout sous-groupe H de G contenant L, notons $R(H)$ l'ensemble des poids de S dans l'algèbre de Lie de H. Alors $P \longmapsto R(P)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques (minimaux) de G de groupe de Levi L sur l'ensemble des systèmes de racines positives de R.

4.4. De même, si P est un sous-groupe parabolique (minimal) de sous-groupe de Levi L, l'application $Q \longmapsto R(Q)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques Q de G contenant P sur l'ensemble des parties closes de R contenant $R(P)$; en vertu de la théorie des systèmes de racines, ces parties correspondent bijectivement aux parties de l'ensemble des racines simples de $R(P)$.

4.5. En vertu des théorèmes de conjugaison, on peut énoncer le résultat précédent comme suit : l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques de G est naturellement isomorphe à l'ensemble des parties d'un système de racines simples de R ; par exemple, aux sous-groupes paraboliques minimaux correspond la partie vide, au groupe G la partie pleine.

4.6. On peut montrer que le groupe G est déterminé à isomorphisme près par la partie anisotrope M de L et par le système de racines relatif convenablement tordu par l'action du groupe de Galois de $\bar{k}/k$.

Remarque.- A la terminologie près, tous les résultats précédents sont valables lorsque k est un anneau semi-local connexe, par exemple un anneau local ; $\bar{k}$ désigne alors une extension étale (ou fidèlement plate) convenable de k , par exemple une clôture strictement locale de k (voir S.G.A.D., XXVI). En revanche les résultats du n° suivant sont particuliers au cas d'un corps de base.

5. Théorème de Bruhat relatif.

5.1. Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G ; si $P(k) = P'(k)$ alors $P = P'$. Si $\bar{P}$ est un sous-groupe de $G(k)$ contenant l'ensemble des points rationnels d'un sous-groupe parabolique de G , alors $\bar{P} = P(k)$ pour un sous-groupe parabolique convenable P de G .

5.2. L'intersection de deux sous-groupes paraboliques de G contient toujours le centralisateur d'un tore trivial maximal.

5.3. Soient P un sous-groupe parabolique minimal de G , L un sous-groupe de Levi de P , S son tore central trivial maximal, N le normalisateur de S .

Alors $(P(k),N(k))$ est une (BN)-paire au sens de Tits dans $G(k)$ (ou une paire de Tits au sens de B(ourbaki)N(icolas)), dont le groupe de Weyl est W.

5.4. En particulier, l'application $n \longmapsto P(k).n.P(k)$ de $N(k)$ dans l'ensemble des parties de $G(k)$, induit une bijection de W sur l'ensemble des doubles classes de $G(k)$ modulo $P(k)$.

5.5. En vertu de 5.1, sous-groupes paraboliques de G et sous-groupes paraboliques de $G(k)$ (au sens de la paire de Tits précédente) se correspondent bijectivement par $P \longmapsto P(k)$.

Remarque.- Tous les résultats de ce n° sont déjà faux pour le groupe $\underline{\underline{SL}}_2$ sur l'anneau artinien local $\underline{\underline{Z}}/4\underline{\underline{Z}}$.

6. Compléments et applications.

6.1. Supposons k parfait. Alors les sous-groupes trigonalisables (resp. unipotents) lisses connexes maximaux de G sont conjugués.

6.2. Si k est de caractéristique 0, les sous-groupes unipotents maximaux de G sont les radicaux unipotents des sous-groupes paraboliques minimaux de G. En particulier G est anisotrope si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées : $\mathrm{Hom}(G,\underline{\underline{G}}_{m,k}) = 0$, tout élément de $G(k)$ est semi-simple.

6.3. Si k est localement compact et de caractéristique 0, un sous-groupe H de G contient un sous-groupe trigonalisable lisse connexe maximal si et seulement si $(G/H)(k)$ est compact (ou encore $G(k)/H(k)$ est compact). En particulier, G est anisotrope si et seulement si $G(k)$ est compact.

6.4. Si k est une extension finie de $\underline{\underline{Q}}_p$, $G(k)$ est engendré par une partie compacte.

6.5. Supposons enfin $k = \underline{\underline{R}}$. Soit K un sous-groupe compact maximal de $G(\underline{\underline{R}})$, et soit $G(\underline{\underline{R}}) = K.A.N$ une décomposition d'Iwasawa de $G(\underline{\underline{R}})$. Alors il existe un tore trivial maximal S de G et un sous-groupe parabolique minimal P de groupe de Levi le centralisateur de S , tels que $N = R^u(P)(\underline{\underline{R}})$ et A soit la composante neutre du groupe topologique $S(\underline{\underline{R}})$. En particulier W et R s'identifient au groupe de Weyl et à l'ensemble des racines de la paire symétrique $(G(\underline{\underline{R}}),K)$.

ERRATUM

Page 313-05 - Supprimer les lignes 6, 7 et 8.