BERNARD MALGRANGE

# Systèmes différentiels à coefficients constants

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. n° 246, p. 79-89
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__79_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 246

Décembre 1962
[Texte remanié en Mai 1963]

# SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS CONSTANTS

par Bernard MALGRANGE

## 1. Introduction.

Soit V une variété analytique complexe, dénombrable à l'infini, de dimension n ; désignons par $\mathcal{O}$ (resp. ${}^n\Omega$ ) le faisceau des germes de fonctions holomorphes (resp. de formes holomorphes de degré n ) sur V , et par ${}^{p,q}\mathcal{E}$ (resp. ${}^{p,q}\mathcal{D}'$ ) le faisceau des germes de formes différentielles à coefficients distributions de type (p , q) ; désignant par d" la composante de type (0 , 1) de la différentielle extérieure, on a les deux suites exactes suivantes, qui sont en dualité locale (en un sens évident) :

(1) $$0 \to \mathcal{O} \to {}^{0,0}\mathcal{E} \xrightarrow{d''} \dots \xrightarrow{d''} {}^{0,n}\mathcal{E} \to 0$$

(2) $$0 \leftarrow {}^{n,n}\mathcal{D}' \xleftarrow{d''} \dots \leftarrow {}^{n,0}\mathcal{D}' \leftarrow {}^n\Omega \leftarrow 0 \quad .$$

Soit alors $\mathfrak{F}$ un faisceau analytique cohérent sur V . Considérons la suite

(1') $$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F} \otimes {}^{0,0}\mathcal{E} \to \dots \to \mathfrak{F} \otimes {}^{0,n}\mathcal{E} \to 0$$

déduite de (1) par produit tensoriel sur $\mathcal{O}$ , et la suite

(2') $$0 \leftarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{F} , {}^{n,n}\mathcal{D}') \leftarrow \dots \leftarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{F} , {}^{n,0}\mathcal{D}') \leftarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathfrak{F} , {}^n\Omega) \leftarrow 0$$

déduite de (2) par application de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{F} , .)$ (on omet le $\mathcal{O}$ pour simplifier les notations).

On sait, par la théorie de la division des distributions [5], que, en tout point $a \in V$ , ${}^{p,q}\mathcal{E}_a$ est un $\mathcal{O}_a$-module <u>plat</u> (et ${}^{p,q}\mathcal{D}'_a$ un $\mathcal{O}_a$-module <u>injectif</u>). Par suite,

a. (1') est encore exact [11] ; comme ${}^{p,q}\mathcal{E}$ est un faisceau fin, on en déduit que les groupes de cohomologie $H^k(V , \mathfrak{F})$ s'identifient avec les groupes de cohomologie du complexe $\bigoplus_p (\mathfrak{F} \otimes {}^{0,p}\mathcal{E})(V)$ , muni de la différentielle évidente (et la même chose pour les groupes de cohomologie à support dans une famille paracompactifiante).

b. (1') et (2') sont en dualité locale.

En raisonnant comme SERRE [11], on trouve alors ceci : supposons que les applications

$$(\mathfrak{F} \otimes {}^{o,p}\mathcal{E})(V) \to (\mathfrak{F} \otimes {}^{o,p+1}\mathcal{E})(V)$$

soient des homomorphismes (au sens des espaces vectoriels topologiques) pour $p = q$ et $p = q - 1$ ; alors l'espace $H^q(V, \mathfrak{F})$ est muni canoniquement d'une structure d'espace de Fréchet, et son dual topologique est isomorphe à l'espace de cohomologie d'indice $(n, n-q)$ de la suite des sections à support compact de (2'), c'est-à-dire à $\mathrm{Ext}_c^{n-q}(X ; \mathfrak{F}, {}^n\Omega)$.

Dans le paragraphe suivant, on aura $V = \underset{\sim}{C}^n$, $\mathfrak{F}$ = le faisceau analytique associé à un faisceau algébrique cohérent. La différence est qu'au lieu de travailler avec des sections ordinaires de faisceaux, nous serons intéressés à des sections ayant une "croissance convenable" à l'infini.

## 2. Certains espaces de fonctions holomorphes.

Notations.

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ désigne un point de } \underset{\sim}{R}^n .$$

$$\zeta = \xi + i\eta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (\xi_1 + i\eta_1, \dots, \xi_n + i\eta_n) \text{ un point de } \underset{\sim}{C}^n .$$

$$\zeta x = \sum \zeta_j x_j .$$

Si $\Gamma$ est un compact convexe $\subset \underset{\sim}{R}^n$, la fonction $\eta \rightsquigarrow \hat{\Gamma}(\eta)$ est définie par

$$\hat{\Gamma}(\eta) = \int_\Gamma e^{\eta x}\, dx \qquad (\, dx = \text{mesure de Lebesgue sur } \underset{\sim}{R}^n \,) .$$

Si $\zeta = \xi + i\eta$, on pose encore $\hat{\Gamma}(\zeta) = \hat{\Gamma}(\eta)$. On supposera dans toute la suite que $\Gamma$ a un point intérieur ; alors $\hat{\Gamma}$ est partout $> 0$. $\mathcal{S}$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide sur $\underset{\sim}{C}^n$ (identifié à $\underset{\sim}{R}^{2n}$) muni de la topologie habituelle, $\mathcal{S}'$ son dual. $\mathcal{S}^\Gamma$ désigne l'ensemble des fonctions $\varphi$ sur $\underset{\sim}{C}^n$ telle que la fonction

$$(\xi, \eta) \rightsquigarrow \frac{1}{\hat{\Gamma}(\eta)} \varphi(\xi, \eta)$$

appartienne à $\mathcal{S}$, muni de la topologie évidente. Son dual peut être identifié à $\mathcal{S}'_\Gamma$, espace des distributions $T$ sur $\underset{\sim}{C}^n$ telles que $\hat{\Gamma}T \in \mathcal{S}'$ ; mais il est préférable, à cause de la formule de Plancherel, de considérer l'antidual de $\mathcal{S}^\Gamma$ plutôt que son dual, et de l'identifier à $\mathcal{S}'_{-\Gamma}$ ($-\Gamma$ désignant, comme il se doit, le symétrique de $\Gamma$ par rapport à l'origine), au moyen de la formule suivante : si $T \in \mathcal{S}'_{-\Gamma}$, $\varphi \in \mathcal{S}^\Gamma$, on pose

$$\langle T | \varphi \rangle = \langle \tilde{\hat{\Gamma}} T , \widetilde{\hat{\Gamma}^{-1} \varphi} \rangle$$

où le crochet au second membre désigne le produit scalaire entre $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$, et où l'on pose

$$\tilde{\psi}(\zeta) = \overline{\psi(\bar{\zeta})} \quad .$$

L'intérêt de ces espaces, a priori bizarres, est le suivant : si $\mathcal{O}^\Gamma$ désigne l'intersection de $\mathcal{S}^\Gamma$ avec l'espace des fonctions holomorphes sur $\underset{\sim}{C}^n$, on a, d'après le théorème de Paley-Wiener

$$\mathcal{O}^\Gamma = \mathfrak{F}\mathcal{D}(\Gamma)$$

( $\mathcal{D}(\Gamma)$, espace des fonctions indéfiniment dérivables dans $\underset{\sim}{R}^n$, à support dans $\Gamma$ ; $\mathfrak{F}$ = Fourier) ; pour étudier cet espace, nous sommes conduits à introduire ${}^{p,q}\mathcal{S}^\Gamma$, espace des formes différentielles de type $(p, q)$ à valeurs dans $\mathcal{S}^\Gamma$, et à considérer la suite

$$0 \to \mathcal{O}^\Gamma \to {}^{0,0}\mathcal{S}^\Gamma \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} {}^{0,n}\mathcal{S}^\Gamma \to 0 \quad .$$

On ignore si cette suite est exacte ; mais considérons, pour $\Omega$ ouvert convexe dans $\underset{\sim}{R}^n$, l'espace $\mathcal{S}^\Omega$ (resp. $\mathcal{O}^\Omega$ ) limite inductive des espaces $\mathcal{S}^\Gamma$ (resp. $\mathcal{O}^\Gamma$ ), $\Gamma$ parcourant l'ensemble des convexes compacts $\subset \Omega$, et désignons par ${}^{p,q}\mathcal{S}^\Omega$ l'espace des formes différentielles de type $(p, q)$ à coefficients dans $\mathcal{S}^\Omega$. Nous avons alors le théorème suivant (voir la démonstration dans [6]) :

THÉORÈME 2.1. - <u>Soit</u> $\Omega$ <u>un ouvert convexe</u> $\subset \underset{\sim}{R}^n$. <u>La suite</u>

$$0 \to \mathcal{O}^\Omega \to {}^{0,0}\mathcal{S}^\Omega \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} {}^{0,n}\mathcal{S}^\Omega \to 0$$

<u>est exacte.</u>

Soit maintenant $A$ l'anneau $\underset{\sim}{C}[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes à $n$ indéterminées, qu'on fait opérer "multiplicativement" dans les fonctions sur $\underset{\sim}{C}^n$, i. e.

$$X_j\, f(\zeta) = \zeta_j\, f(\zeta) \quad .$$

On sait, par la théorie de la division des distributions, que $\mathcal{S}$ est un $A$-module plat, et même bien davantage : si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $A$, pour que $\varphi \in \mathcal{S}$ appartienne à $\mathfrak{I}\mathcal{S}$, il faut et il suffit que, $\forall\ a \in \underset{\sim}{C}^n$, la série de Taylor $\varphi_a$ de $\varphi$ au point $a$ appartienne à $\mathfrak{I}\mathfrak{F}_a$, $\mathfrak{F}_a$ désignant les séries formelles en $\zeta - a$, et $\overline{\zeta - a}$ (sur lesquelles $A$ opère de la manière évidente). Pour simplifier, nous dirons qu'un $A$-module de fonctions différentiables sur $\underset{\sim}{C}^n$ (où $A$ opère de la manière indiquée) est "de synthèse harmonique" s'il possède la propriété précédente. Un tel $A$-module est toujours plat (on se ramène immédiatement à la platitude sur $A$ des séries formelles, qui est connue [1]).

Par transport de structure, on voit que $\mathcal{S}^{\Gamma}$ est un A-module de synthèse harmonique ; $\mathcal{S}^{\Omega}$ l'est aussi, par un argument de limite inductive.

THÉORÈME 2.2. - $\Omega$ étant un ouvert convexe $\subset \mathbb{R}^n$ , $\mathcal{O}^{\Omega}$ est un A-module de synthèse harmonique.

Posons

$$^{o,p}\mathcal{B}^{\Omega} = \mathrm{Ker}(^{o,p}\mathcal{S}^{\Omega} \xrightarrow{d''} {}^{o,p+1}\mathcal{S}^{\Omega})$$

d'après le théorème 2.1, on a, $\forall\ p \in \mathbb{N}$ , la suite exacte

$$0 \to {}^{o,p}\mathcal{B}^{\Omega} \to {}^{o,p}\mathcal{S}^{\Omega} \xrightarrow{d''} {}^{o,p+1}\mathcal{B}^{\Omega} \to 0 \quad .$$

Par récurrence descendante, on voit alors immédiatement que $^{o,p}\mathcal{B}^{\Omega}$ est de synthèse harmonique. Le théorème en résulte puisqu'on a :

$$\mathcal{O}^{\Omega} = {}^{o,o}\mathcal{B}^{\Omega} \quad .$$

Remarque. - En utilisant le fait que $\mathcal{O}^{\Omega}$ est un espace de fonctions holomorphes, on voit que le théorème précédent peut s'énoncer un peu autrement : si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $A$ , pour que $\varphi \in \mathcal{O}^{\Omega}$ appartienne à $\mathfrak{I}\mathcal{O}^{\Omega}$ , il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ , l'image de $\varphi$ dans le localisé-complété $\hat{\mathcal{O}}^{\Omega}_{\mathfrak{m}}$ (voir définition dans [1]) appartienne à $\mathfrak{I}\hat{\mathcal{O}}^{\Omega}_{\mathfrak{m}}$ . L'avantage évident de cette formulation est qu'elle est "algébrique", i. e. ne fait intervenir que la structure de A-module de $\mathcal{O}^{\Omega}$ . Dans la suite, nous rencontrerons encore des modules possédant la même propriété ; nous les qualifierons de "totalement plats".

Venons-en maintenant au théorème de dualité : désignons par $\mathcal{O}'_{\Gamma}$ (resp. $\mathcal{S}'_{\Gamma}$ ) l'antidual de $\mathcal{O}^{\Gamma}$ (resp. $\mathcal{S}^{\Gamma}$ ), et par $^{p,q}\mathcal{S}'_{\Gamma}$ l'espace des formes différentielles de type $(p , q)$ à coefficients dans $\mathcal{S}'_{\Gamma}$ . Lorsque $M$ est un A-module de type fini, on aimerait avoir la formule suivante, analogue à celle de l'introduction

$$\mathrm{Hom}(M , \mathcal{O}'_{\Gamma}) \simeq \mathrm{Coker}\{\mathrm{Hom}(M , {}^{n,n-1}\mathcal{S}'_{\Gamma}) \xrightarrow{d''} \mathrm{Hom}(M , {}^{n,n}\mathcal{S}'_{\Gamma})\}$$

(ici, et dans la suite, on écrit Hom pour $\mathrm{Hom}_A$ ).

Je ne sais si l'on peut établir ce résultat (ni même le résultat analogue avec $\Gamma$ remplacé par $\Omega$ ). Voici ce qu'on peut établir en s'appuyant sur le théorème 2.1 :

Désignons par $\Delta'_{\Gamma}$ (resp. $\Sigma'_{\Gamma}$ ) la limite inductive des $\mathcal{O}'_{\Gamma'}$ (resp. $\mathcal{S}'_{\Gamma'}$ ) pour $\Gamma'$ parcourant la famille des compacts convexes vérifiant $\mathring{\Gamma}' \supset \Gamma$ , et par $^{p,q}\Sigma'_{\Gamma}$ l'espace des formes différentielles de type $(p , q)$ à support dans $\Sigma'_{\Gamma}$ . On a le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. - Soit $\Gamma$ un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ ,

1° $\Delta'_{\Gamma}$ est un A-module injectif.

2° Si M est un A-module de type fini, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(M\ ,\ \Delta'_{\Gamma}) \approx \mathrm{Coker}\{\mathrm{Hom}(M\ ,\ {}^{n,n-1}\Sigma'_{\Gamma}) \xrightarrow{d''} \mathrm{Hom}(M\ ,\ {}^{n,n}\Sigma'_{\Gamma})\}$$

(ces résultats sont démontrés dans [6] sous une forme légèrement différente).

## 3. Systèmes différentiels à coefficients constants : théorèmes d'existence.

La traduction des résultats précédents en termes d'équations différentielles se fait au moyen des deux opérations suivantes :

1° Transformation de Fourier. - Faisons opérer différentiellement A dans les fonctions et les distributions sur $\mathbb{R}^n$ , i. e. $X_j\ f = -\, i\,\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ . Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , on aura donc

$$X_j\ \mathfrak{F}\varphi = \mathfrak{F}X_j\varphi \quad .$$

Si $\Gamma$ est un compact convexe (resp. un ouvert convexe) de $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\mathfrak{F}\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{O}^{\Gamma} \quad (\text{resp.}\quad \mathfrak{F}\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{O}^{\Omega}) \quad .$$

Désignons d'autre part par $\mathcal{D}'(\Gamma)$ l'espace des distributions au voisinage de $\Gamma$ , qui est la limite inductive des $\mathcal{D}(\Gamma')^*$ (duals de $\mathcal{D}(\Gamma')$ ) pour $\Gamma'$ compact convexe vérifiant $\mathring{\Gamma}' \supset \Gamma$ . La transformation de Fourier établiera donc un isomorphisme entre $\mathcal{D}'(\Gamma)$ et $\Delta'_{\Gamma}$ . Les résultats du paragraphe 2 entraînent alors :

THÉORÈME 3.1.

1° $\mathcal{D}(\Omega)$ est un A-module totalement plat ( $\Omega$ , ouvert convexe).

2° $\mathcal{D}'(\Gamma)$ est un A-module injectif ( $\Gamma$ , compact convexe).

(Il me paraît probable que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est aussi un A-module injectif, mais la méthode suivie ne donne pas ce résultat.)

On déduit de là, par régularisation, (voir les détails dans [6]) :

THÉORÈME 3.2. - Pour tout ouvert convexe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,

(1) $\mathcal{E}'(\Omega)$ est un A-module totalement plat

(2) $\mathcal{E}(\Omega)$ est un A-module injectif .

Réciproquement, tout ouvert connexe vérifiant (1) ou (2) est convexe. En effet (1) $\Longrightarrow$ (2) par dualité (immédiat) et (2) entraîne ceci (entre autres) :

(3) $\qquad \forall\ P \in A\ ,\ P\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ (voir plus bas) .

Or, il est élémentaire de vérifier que " $\frac{\partial}{\partial x_1}\ \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$ " équivaut (si $\Omega$ est connexe) à " $\Omega$ convexe dans la direction $Ox_1$ " (*). Donc (3) $\Longrightarrow$ " $\Omega$ convexe".

Il est probable que le théorème 3.2 (2) est encore vrai lorsqu'on remplace $\mathcal{E}(\Omega)$ par $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou $\mathcal{D}'^F(\Omega)$ (espace des distributions d'ordre fini dans $\Omega$ ).

2° Utilisation d'une présentation de $M$ . - Soit $A^q \to A^p \to M \to 0$ une présentation de $M$ ; désignons par $P^* \in \mathrm{Hom}(A^q\ ,\ A^p)$ la première application, et soit $P \in \mathrm{Hom}(A^p\ ,\ A^q)$ l'application transposée. Si $\Omega$ est un ouvert $\subset R^n$ , on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(M\ ,\ \mathcal{E}(\Omega)) \to [\mathcal{E}(\Omega)]^p \xrightarrow{P} [\mathcal{E}(\Omega)]^q$$

donc $\mathrm{Hom}(M\ ,\ \mathcal{E}(\Omega))$ s'identifie à l'ensemble des $F \in [\mathcal{E}(\Omega)]^p$ vérifiant $PF = 0$ ; la même chose vaut pour $\mathcal{D}'(\Gamma)$ , $\mathcal{D}'(\Omega)$ , etc., et réciproquement, tout système différentiel à coefficients constants peut s'écrire de cette manière.

Ceci posé, soit $Q^* \in \mathrm{Hom}(A^r\ ,\ A^q)$ tel que la suite

$$A^r \xrightarrow{Q^*} A^q \xrightarrow{P^*} A^p$$

soit exacte, et soit $Q \in \mathrm{Hom}(A^q\ ,\ A^r)$ la transposé de $Q^*$ .

On considère la suite "transposée"

$$[\mathcal{E}(\Omega)]^p \xrightarrow{P} [\mathcal{E}(\Omega)]^q \xrightarrow{Q} [\mathcal{E}(\Omega)]^r$$

on a évidemment $QP = 0$ ; et, par définition

$$\mathrm{Ext}^1(M\ ,\ \mathcal{E}(\Omega)) = \mathrm{Ker}(Q)/\mathrm{Im}(P) \quad .$$

Or, $\mathcal{E}(\Omega)$ est injectif si et seulement si, pour tout A-module $M$ de type fini, on a

$$\mathrm{Ext}^1(M\ ,\ \mathcal{E}(\Omega)) = 0 \quad .$$

Par conséquent, si $\Omega$ est convexe, l'équation

$$PF = G \qquad (G \in [\mathcal{E}(\Omega)]^q\ ,\ \ F \in [\mathcal{E}(\Omega)]^p)$$

aura une solution pour tout $G$ vérifiant $QG = 0$ . Réciproquement, si cela a lieu pour tout $P$ , $\Omega$ sera convexe. (Sous cette forme, les résultats ci-dessus sont annoncés par EHRENPREIS [2], [3].)

On peut, si l'on y tient, traduire une partie des résultats précédents en termes de faisceaux : soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{D}'$ ) le faisceau $\Omega \rightsquigarrow \mathcal{E}(\Omega)$ (resp.

---

(*) Voir aussi paragraphe 5.

$\Omega \rightsquigarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ ) ; pour $M$ , A-module de type fini (considéré comme faisceau constant), on pose

$$\mathcal{E}^M = \underline{\mathrm{Hom}}(M , \mathcal{E}) \qquad (\text{resp. } \mathcal{D}'^M = \ldots) \qquad ;$$

on a évidemment

$$\mathcal{E}^M(\Omega) = \mathrm{Hom}(M , \mathcal{E}(\Omega)) , \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^M_c(\Omega) = \mathrm{Hom}(M , \mathcal{D}(\Omega))$$

et de même avec $\mathcal{D}'$ au lieu de $\mathcal{E}$ .

Cela étant, pour tout $a \in \underset{\sim}{R}^n$ , le A-module $\mathcal{E}_a$ (resp. $\mathcal{D}'_a$ ) est injectif d'après le théorème 3.2 (resp. 3.1). On en déduit les isomorphismes

$$H^k(\Omega , \mathcal{E}^M) \approx \mathrm{Ext}^k(M , \mathcal{E}(\Omega))$$

$$H^k_c(\Omega , \mathcal{E}^M) \approx \mathrm{Ext}^k(M , \mathcal{D}(\Omega))$$

(l'indice c désignant la famille des compacts $\subset \Omega$ ).

Si $\Omega$ est convexe, on aura donc

a. $H^k(\Omega , \mathcal{E}^M) = 0$ pour $k \geq 1$ , puisque $\mathcal{E}(\Omega)$ est injectif

b. $H^k_c(\Omega , \mathcal{E}^M) \approx \mathrm{Ext}^k(M , A) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ , puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est plat

Supposant $\Omega$ convexe relativement compact, et désignant par $\partial\Omega$ sa frontière, on a la suite exacte.

$$H^0(\bar{\Omega} , \mathcal{E}^M) \to H^0(\partial\Omega , \mathcal{E}^M) \to H^1_c(\Omega , \mathcal{E}^M) \to H^1(\bar{\Omega} , \mathcal{E}^M) , \quad \text{etc.}$$

le dernier terme écrit ici est nul ; donc

PROPOSITION 3.3. - Pour que l'application $\mathcal{E}^M(\bar{\Omega}) \to \mathcal{E}^M(\partial\Omega)$ soit surjective, il faut et il suffit qu'on ait

$$\mathrm{Ext}^1(M , A) = 0 \qquad .$$

(Ce raisonnement est dû essentiellement à EHRENPREIS.)

On trouvera dans [7] et [8] d'autres résultats du même type.

## 4. Théorèmes d'approximation et de représentation intégrale.

THÉORÈME 4.1. - Soit $P \in \mathrm{Hom}(A^p , A^q)$ , et soit $\mathcal{E}^P(\Omega)$ le noyau de l'application

$$P : [\mathcal{E}(\Omega)]^p \to [\mathcal{E}(\Omega)]^q \qquad .$$

Si $\Omega$ est un ouvert convexe, l'ensemble des exponentielles polynômes contenus dans $\mathcal{E}^P(\Omega)$ y forme un système total.

Soit en effet $\Phi$ un élément de $[\mathcal{E}'(\Omega)]^q$, orthogonal aux exponentielles polynômes appartenant à $\mathcal{E}^P(\Omega)$ (pour le produit scalaire $\langle\Phi|f\rangle = \langle\Phi , \overline{f}\rangle$ ) ; il suffit d'établir que l'on a

$$\Phi = \overline{P}^* \Psi \quad ,$$

avec $\Psi \in [\mathcal{E}'(\Omega)]^p$, car alors $\Phi$ sera orthogonal à $\mathcal{E}^P(\Omega)$.

Or, par transformation de Fourier, l'hypothèse exprime exactement ceci : en tout point $a \in \underset{\sim}{C}^n$, le développement de Taylor de $\mathfrak{F}\Phi$ en $a$ est de la forme $P^* U_a$, avec $U_a \in \{\underset{\sim}{C}[[\zeta - a]]\}^q$. La propriété voulue se déduit alors du fait que $\mathcal{E}'(\Omega)$ est totalement plat.

Le même résultat, avec la même démonstration, vaut pour $\mathcal{D}'(\Omega)$ ou $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

On peut retrouver ces résultats d'une autre manière. Soit $S$ un élément de ${}^{n,n}\Sigma'_{\Gamma}$, identifié de manière évidente à $\Sigma'_{\Gamma}$, et soit $\hat{T}$ l'image de $S$ dans $\Delta'_{\Gamma}$ (qui est évidemment un quotient de $\Sigma'_{\Gamma}$) ; par transformation de Fourier, $\hat{T}$ donne un élément $T$ de $\mathcal{D}'(\Gamma)$, qu'on appelle "transformé de Fourier-Ehrenpreis" de $S$. D'une manière plus explicite : on prend un voisinage $\Gamma'$ de $\Gamma$ tel que $S$ provienne d'un $S_1 \in \mathcal{S}'_{\Gamma}$ ; on appelle alors $T_1$ l'élément de $\mathcal{D}(\Gamma')^*$ défini par la formule

$$\forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Gamma') \ : \ \langle T_1 , \overline{\varphi}\rangle = \langle\langle S_1 | \mathfrak{F}\varphi\rangle$$

et $T$ est la restriction de $T_1$ à $\mathcal{D}'(\Gamma)$. Naturellement, pour $T$ donné, $S$ n'est unique que modulo $d''\,{}^{n,n-1}\Sigma'_{\Gamma}$.

Prenons alors $P \in \mathrm{Hom}(A^p , A^q)$, et posons, comme au paragraphe 3,

$$M = \mathrm{Coker}\{A^q \xrightarrow{P^*} A^p\}$$

on déduit immédiatement du théorème 2.3 le résultat suivant :

THÉORÈME (de représentation intégrale) 4.2.

1. Tout $T \in [\mathcal{D}'(\Gamma)]^p$ vérifiant $PT = 0$ est transformé de Fourier-Ehrenpreis d'un $S \in [{}^{n,n}\Sigma'_{\Gamma}]^p$ vérifiant $PS = 0$.

2. Si $S$ et $S'$ vérifient la condition précédente, on a $S - S' = d'' U$, avec $U \in [{}^{n,n-1}\Sigma'_{\Gamma}]^p$, et $PU = 0$.

La première partie de l'énoncé est annoncée sous une forme plus précise (due au choix que (2) autorise), par EHRENPREIS [2], [3] et, plus récemment, par PALAMODOV ([10], dans le cas particulier $p = q = 1$ ; dans le cas général, communication personnelle).

A noter que ces auteurs travaillent en "cohomologie de Čech", sans utiliser la division des distributions, ni la d"-cohomologie.

Comme l'a indiqué EHRENPREIS (loco citato) il convient de placer ce résultat au centre de toute cette théorie ; d'une part, il entraîne immédiatement le théorème 4.1 (dans $\mathcal{D}'(\Gamma)$ , ce qui l'entraîne trivialement pour les autres espaces considérés) grâce au théorème de synthèse harmonique dans $\mathcal{S}'$ de WHITNEY-SCHWARTZ ; joint à l'injectivité de $\mathcal{S}'$ , il entraîne les résultats du paragraphe 3 ; enfin il peut servir à d'autres usages, notamment à la caractérisation des systèmes elliptiques, hypoelliptiques, etc. (voir [3], [7], [8]).

## 5. Pseudo-convexité.

Soit $M$ un $A$-module de type fini ; disons provisoirement qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est $M$-convexe si l'on a, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathrm{Ext}^k(M\ ,\ \mathcal{E}(\Omega)) = 0 \quad .$$

Dans certains cas, on connait des propriétés du type suivant :

1° Pour que $\Omega$ soit $M$-convexe, il faut et il suffit que la $(M\ ,\ \Omega)$-enveloppe (définie convenablement) de tout compact $K \subset \Omega$ soit compacte.

2° L'intersection de deux ouverts $M$-convexes est $M$-convexe.

3° Si $\Omega$ est un "bon ouvert" dont le bord $\partial\Omega$ est une variété de classe $C^2$ , la $M$-convexité est entraînée par certaines inégalités différentielles strictes vérifiées par $\partial\Omega$ ; et inversement, elle entraîne les mêmes inégalités élargies.

Ce type de propriétés est connu dans les deux cas suivants :

a. $M = A/\mathfrak{P}$ , $\mathfrak{P}$ un idéal principal : si $P^* \subset A$ est un générateur de $\mathfrak{P}$ , la $M$-convexité signifie simplement qu'on a

$$P\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$$

(1) et (2) sont alors connus, ainsi que (3) lorsque la partie principale de $P$ est à coefficients réels (voir [4] et [9]).

b. $M$ est le module associé au système de Cauchy-Riemann, i. e. $n = 2m$ , $M = A/\mathfrak{P}$ , $\mathfrak{P}$ engendré par les $X_j + iX_{m+j}$ . Les ouverts en question sont alors les ouverts d'holomorphie, ou "pseudo-convexes" [12].

Par contre, en général, ce genre de propriétés est faux (contre-exemple immédiat $M = A/\mathfrak{P}$ , $\mathfrak{P}$ l'idéal engendré par $X_1$ , ... , $X_n$ ; i. e. $M$ est associé au système $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ et alors

$$\mathrm{Ext}^k(M\,,\,\mathcal{E}(\Omega)) \approx H^k(\Omega\,,\,\underset{\sim}{C})$$

la famille des ouverts dont tous les nombres de Betti sont nuls ne vérifie aucune des propriétés (1), (2), (3) !).

Il parait plus raisonnable d'aborder la question de la pseudo-convexité généralisée de la manière suivante :

Soit $B = \underset{\sim}{C}[Y_1\,,\,\ldots\,,\,Y_p]$, et $\rho : B \to A$ un homomorphisme de $\underset{\sim}{C}$-algèbres, tel que $A$ soit un $B$-module plat (peut-être faut-il même supposer "fidèlement plat", et encore d'autres choses ?). Alors $B$ opère de manière évidente dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et on dira que $\Omega$ est $(B\,,\,\rho)$-convexe si $\mathcal{E}(\Omega)$ est un $B$-module injectif.

(L'hypothèse de platitude permet d'affirmer, grâce au théorème 3.2, que tout ouvert convexe est $(B\,,\,\rho)$-convexe.)

Cette notion de "convexité" donne-t-elle lieu à des propriétés du type (1), (2), (3) ? Pour l'instant, je ne connais la réponse (affirmative) que dans les cas suivants

a'. $p = 1$ (cela résulte immédiatement de (a)).

b'. Les $\rho(Y_j)$ sont des polynômes du premier degré. Ici, il y a essentiellement deux cas intéressants (en fait, ce sont les seuls que j'ai regardés jusqu'à maintenant) les autres étant "mixtes" :

Le cas où $n = p$, $\rho(Y_j) = X_j$ : on trouve alors les <u>convexes</u> ordinaires (théorème 3.2).

Le cas $n = 2p$, $\rho(Y_j) = X_j + iX_{j+p}$ : on trouve alors les <u>ouverts d'holomorphie</u> (la démonstration se fait en combinant les théorèmes A et B de CARTAN-OKA avec les résultats précédents. Voir [8]).

Naturellement, il faudrait aussi étudier les systèmes différentiels à coefficients variables (dans le cas d'une équation "de type principal", des résultats pratiquement définitifs ont été obtenus par HÖRMANDER [4]).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1-2, 3-4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290-1293 ; Eléments de Mathématique, 27-28).

[2] EHRENPREIS (Leon). - A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coefficients and some of its applications, Proceedings of the symposium on linear space [1960. Jérusalem] ; p. 161-174. - Jérusalem, Academic Press, 1961.

[3] EHRENPREIS (Leon). - The structure of solutions of systems of partial differential equations. - Stanford, Stanford University, 1961 (multigraphié).

[4] HÖRMANDER (Lars). - Linear differential operators. - Berlin, J. Springer (à paraître).

[5] MALGRANGE (Bernard). - Division des distributions, I-IV, Séminaire Schwartz, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy, Division des distributions, n° 21-25.

[6] MALGRANGE (Bernard). - Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Leray, 1961/62 : Equations aux dérivées partielles, n° 8, 13 p. ; Colloque sur les équations aux dérivées partielles [1962. Collège de France, Paris].

[7] MALGRANGE (Bernard). - Sur les systèmes différentiels à coefficients constants (suite), Séminaire Leray, 1961/62, n° 8 bis, 12 p.

[8] MALGRANGE (Bernard). - Nouveaux résultats sur les systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Leray, 1962/63 (en projet).

[9] MALGRANGE (Bernard). - Sur les ouverts convexes par rapport à un opérateur différentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1962, p. 614-615.

[10] PALAMODOV (V. P.). - Sur la forme générale des solutions d'une question différentielle à coefficients constants [en russe], Doklady Akad. Nauk S. S. S. R., t. 137, 1961, p. 776-777.

[11] SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de dualité, Comment. Math. Helvet., t. 29, 1955, p. 9-26.

[12] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables [1953. Bruxelles]; p. 57-68. - Liège, G. Thone ; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).