

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MALGRANGE

Majorations a priori et d'' -cohomologie

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 275, p. 447-452

http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__447_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MAJORATIONS A PRIORI ET d'' -COHOMOLOGIE

par Bernard MALGRANGE

1. Introduction.

Depuis quelque temps, les méthodes de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires ont été appliquées par divers auteurs à la théorie des fonctions de variables complexes. Citons notamment le travail fondamental de MORREY [7] sur le problème de Levi et le plongement des variétés analytiques réelles (contenant d'ailleurs un trou, comblé tout récemment par KOHN [6], puis MORREY lui-même [8]). Le même type de méthodes a récemment permis à ANDREOTTI-VESENTINI [1], [2] et à HÖRMANDER [4] de retrouver les résultats de la théorie des espaces p -convexes et p -concaves (au moins dans le cas des variétés), et à HÖRMANDER, loco citato, d'y apporter des compléments importants relatifs à la "cohomologie des formes différentielles à croissance donnée". Enfin, suivant une idée de SPENCER, KOHN [6] et HÖRMANDER [5] appliquent ces méthodes pour obtenir une nouvelle démonstration du "théorème de Frobenius complexe", dû à NIRENBERG.

Nous nous contenterons ici de traiter, d'après HÖRMANDER [4], la théorie de la d'' -cohomologie dans les ouverts d'holomorphie de \mathbb{C}^n , en renvoyant à la littérature citée pour les autres questions, et notamment pour le lien entre ces méthodes et le "problème de d'' -Neumann", de GARABEDIAN-SPENCER [3].

2. Majoration fondamentale.

Les théorèmes d'existence se déduiront du lemme suivant, qu'on laisse au lecteur le soin de démontrer. Les opérateurs non bornés dans des espaces de Hilbert qui y interviennent sont toujours de domaine (désigné par $D(\cdot)$) dense, et de graphe fermé.

LEMME 1. - Soient H_0, H_1, H_2 , trois espaces de Hilbert et soient T, S, A respectivement des opérateurs $H_0 \rightarrow H_1, H_1 \rightarrow H_2, H_1 \rightarrow H_1$, avec $\text{Im } T \subset \text{Ker } S$ et $D(A) \supset D(T^*) \cap D(S)$. Supposons que, pour tout $x \in D(T^*) \cap D(S)$, on ait

$$(1) \quad |Ax|_1^2 \leq |T^*x|_0^2 + |Sx|_2^2.$$

Alors, pour tout $y = A^*z \in \text{Im } A^* \cap \text{Ker } S$, il existe $u \in D(T)$ tel qu'on ait $Tu = y$ et $|u|_0 \leq |z|_1$.

Remarque. - Lorsque $A = \text{identité}$, l'inégalité (1) est nécessaire et suffisante pour que $\text{Im}(S)$ soit fermé et qu'on ait $\text{Im } T = \text{Ker } S$.

On va chercher à établir une inégalité du type (1) dans la situation suivante :

Ω est un ouvert borné de \mathbb{C}^n , de frontière \mathcal{C}^2 ; φ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 dans $\bar{\Omega}$; H_1 est l'espace des formes différentielles de type $(0, 1)$ à coefficients appartenant à $L^2(\Omega)$, muni de la norme suivante : pour $i = 0$,

$$|f|_{\varphi}^2 = \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi} dX$$

$dX = \text{mesure de Lebesgue}$, et pour $i = 1, 2$ des normes analogues évidentes. Enfin on prend pour T l'opérateur d'' restreint aux $f \in L^2(\Omega)$ telles qu'on ait $d'' f \in H_1$ (i. e. les $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ appartiennent à $L^2(\Omega)$) et on définit S de la même manière.

Étudions d'abord l'opérateur T^* ; pour que $\omega \in H_1$ appartienne au domaine de T^* , il faut et il suffit qu'il existe $g \in H_0$, tel qu'on ait, pour tout $f \in D(T)$

$$(2) \quad \int f \bar{g} e^{-\varphi} dX = \sum_j \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \bar{a}_j e^{-\varphi} dX$$

avec $\omega = \sum a_j d\bar{z}_j$, et l'on aura alors $g = T^* \omega$.

On vérifie immédiatement que (2) équivaut à la propriété suivante : Si l'on désigne par $\tilde{\omega}$ (resp. \tilde{g}) la forme ω (resp. la fonction g) prolongée par 0 en dehors de Ω , on doit avoir au sens des distributions dans \mathbb{C}^n :

$$e^{\varphi} \partial' e^{-\varphi} \tilde{\omega} = \tilde{g} \quad (\text{avec } \partial' \omega = \sum \frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_j}) .$$

Autrement dit, les $\omega \in D(T^*)$ sont celles qui vérifient, au sens des distributions, les conditions suivantes :

$$(3) \quad e^{\varphi} \partial' e^{-\varphi} \omega \in L^2(\Omega) \quad (\text{ou } \partial' \omega \in L^2(\Omega), \text{ ce qui revient au même})$$

(4) Les conditions de Cauchy de ω relativement à ∂' sont nulles sur $\partial\Omega$.

Pour pouvoir travailler avec cela, on a besoin du résultat suivant, qui se démontre par une variante de la méthode des "ramollisseurs de Friedrichs".

PROPOSITION:1. - Les formes de classe \mathcal{C}^1 sur $\bar{\Omega}$, et vérifiant (4), sont denses dans $D(T^*) \cap D(S)$ pour la "norme du graphe" $|\omega|^2 + |T^* \omega|^2 + |S\omega|^2$.

(L'utilisation de cette proposition est une simplification essentielle apportée par HÖRMANDER, aux travaux antérieurs de MORREY et KOHN, qui utilisent à la place des questions délicates relatives à la régularité au bord du "problème de d'' -Neumann"; quant à ANDREOTTI-VESENTINI, ils utilisent un argument un peu différent, qui les

oblige à munir Ω d'une métrique hermitienne complète.)

Supposons que, au voisinage de $\partial\Omega$, Ω soit défini par l'inégalité $\psi < 0$, ψ étant une fonction de classe C^2 (définie au voisinage de $\partial\Omega$), avec $d\psi$ partout $\neq 0$. Pour une forme $\omega = \sum a_j d\bar{z}_j$ à coefficients appartenant à $C^1(\Omega)$, la condition (4) s'écrit simplement

$$(4 \text{ bis}) \quad \sum a_j \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_j} = 0 .$$

Pour un tel ω , on a la formule fondamentale suivante (due d'abord à MORREY, avec $\varphi = 0$, et à HÖRMANDER en général) :

THÉORÈME 1.

$$\begin{aligned} |T^* \omega|^2 + |S\omega|^2 = \int_{\Omega} \sum_{j,k} \left| \frac{\partial a_j}{\partial \bar{z}_k} \right|^2 e^{-\varphi} dX + \int_{\Omega} \sum a_j \bar{a}_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} e^{-\varphi} dX \\ + \int_{\partial\Omega} \sum a_j \bar{a}_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} e^{-\varphi} dS , \end{aligned}$$

dS étant la restriction à $\partial\Omega$ d'une forme vérifiant $d\psi \wedge dS = dX$.

Ce résultat s'établit au moyen d'une application répétée de la formule de Stokes, joint (pour le calcul de l'intégrale sur $\partial\Omega$) à la condition (4 bis).

Il serait trop long de commenter ici la raison profonde de ce genre de formules. Disons seulement qu'elles sont liées de façon étroite à la théorie de la "convexité par rapport à un opérateur différentiel" ; remarquer aussi l'analogie avec certaines formules de géométrie différentielle, notamment celles qui conduisent aux "vanishing theorems" de BOCHNER et KODAIRA.

3. Théorèmes d'existence.

Supposons maintenant Ω pseudo-convexe ; alors la condition de Levi indique précisément que l'intégrale de surface figurant dans la formule précédente est positive. On aura donc, en utilisant la proposition 1, pour tout $\omega \in D(T^*) \cap D(S)$:

$$(5) \quad \int_{\Omega} \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k e^{-\varphi} dX \leq |T^* \omega|^2 + |S\omega|^2 .$$

Supposons φ "strictement pseudo-convexe" dans $\bar{\Omega}$, i. e. supposons qu'en tout point de $\bar{\Omega}$, la forme

$$\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k$$

soit positive non dégénérée, et appelons (χ_{jk}) la matrice inverse de

$$\phi = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) ;$$

en appliquant (5) et le lemme 1 (avec $A = \phi$), il vient le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Dans les hypothèses précédentes, pour tout $\omega \in \sum a_j dz_j$, avec $a_j \in L^2(\Omega)$, $d'' \omega = 0$, il existe $f \in L^2(\Omega)$ avec $d'' f = \omega$, et

$$\int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi} dX \leq \int_{\Omega} \sum \chi_{j\bar{k}} a_j \bar{a}_k e^{-\varphi} dX .$$

On a donc, sous des hypothèses de régularité et, naturellement, de pseudo-convexité convenables sur Ω , un théorème de trivialité de la d'' -cohomologie des formes L^2 . Mais en fait, on a beaucoup plus, à savoir la dernière inégalité. Cela permet, par des arguments de régularité et de passage à la limite, d'obtenir un résultat beaucoup plus général ; auparavant, rappelons quelques définitions.

a. Si Ω est un ouvert $\subset \mathbb{C}^n$, et φ une fonction localement intégrable dans Ω , à valeurs réelles, φ est dite pseudo-convexe si, pour tout vecteur

$$(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n ,$$

la distribution

$$\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} t_j \bar{t}_k$$

est une mesure positive.

En particulier, φ est nécessairement sous-harmonique. On peut donc, ce que nous ferons dans la suite, la supposer semi-continue supérieurement (en lui donnant éventuellement la valeur $-\infty$). On dira que la matrice hermitienne $A = (a_{i\bar{j}})$, à coefficients continus dans Ω , est un minorant de φ si, pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$, la distribution

$$\sum \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} - a_{j\bar{k}} \right) t_j \bar{t}_k$$

est une mesure positive.

On dira enfin que φ est strictement pseudo-convexe si elle possède un minorant A qui soit inversible en tout point $Z \in \Omega$.

b. On dira qu'un ouvert Ω de \mathbb{C}^n est pseudo-convexe s'il existe une fonction ψ pseudo-convexe dans Ω telle que, $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{Z \in \Omega \mid \psi(Z) < a\}$ soit relativement compact dans Ω .

Cela étant, on déduit du théorème 2 le résultat suivant :

THÉORÈME.3. - Soit Ω un ouvert pseudo-convexe $\subset \mathbb{C}^n$; soient φ une fonction strictement pseudo-convexe dans Ω , A un minorant inversible de φ , et $B = A^{-1}$.
 Pour toute forme $\omega = \sum a_j d\bar{z}_j$ avec $d'' \omega = 0$, et

$$\int_{\Omega} b_{jk} a_j \bar{a}_k e^{-\varphi} dX < +\infty ,$$

il existe une fonction f vérifiant $d'' f = \omega$, et

$$\int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi} dX \leq \int_{\Omega} b_{jk} a_j \bar{a}_k e^{-\varphi} dX .$$

Exemple. - Prenons ψ pseudo-convexe dans Ω , et appliquons le résultat précédent à $\varphi = \psi + 2 \log(1 + |Z|^2)$; comme on a

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log(1 + |Z|^2) t_j \bar{t}_k \geq \frac{|t|^2}{(1 + |Z|^2)^2}$$

on pourra prendre ici $a_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{(1 + |Z|^2)^2}$.

On trouve alors : Pour tout ω vérifiant $d'' \omega = 0$, et

$$\sum \int_{\Omega} |a_j|^2 e^{-\psi} dX < +\infty ,$$

il existe f vérifiant $d'' f = \omega$ et

$$\int |f|^2 \frac{e^{-\psi}}{(1 + |Z|^2)^2} dX \leq \sum \int |a_j|^2 e^{-\psi} dX ,$$

résultat qui, même dans le cas $\Omega = \mathbb{C}^n$, est beaucoup plus précis que ceux que l'on connaissait jusqu'ici.

Bien entendu, les mêmes résultats valent aussi pour la d'' -cohomologie de type (p, q) ; nous l'avons seulement écrit dans le cas du type $(0, 1)$ pour raccourcir l'exposé.

On déduit de là que la d'' -cohomologie usuelle (= sans condition de croissance) est triviale dans tout ouvert pseudo-convexe, ce qui entraîne qu'un tel ouvert est un ouvert d'holomorphie (solution du problème de Levi). Prenons en effet une forme différentielle ω , de type $(0, 1)$ pour fixer les idées, à coefficients localement L^2 ; il suffit d'établir qu'il existe φ pseudo-convexe dans Ω , tel que l'on ait

$$\sum \int |a_j|^2 e^{-\varphi} dX < +\infty \quad (\omega = \sum a_j d\bar{z}_j)$$

Pour cela, prenons ψ pseudo-convexe dans Ω , et tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

l'ensemble $\{Z \in \Omega \mid \psi(Z) < a\}$ soit relativement compact dans Ω ; si χ est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et convexe, il est connu que $\chi(\psi)$ est encore pseudo-convexe ; il suffit alors de prendre χ "assez rapidement croissante", et de poser $\varphi = \chi(\psi)$.

Enfin, les mêmes majorations, jointes à un argument standard de bidualité, conduisent à des théorèmes d'approximation, notamment le "théorème de Runge", et ses analogues pour les formes différentielles, et aussi à des théorèmes d'approximation plus fins, dont voici un exemple :

THÉORÈME 4. - Soit φ une fonction de classe C^2 , pseudo-convexe dans \mathbb{C}^n . L'ensemble des fonctions f holomorphes dans \mathbb{C}^n , et vérifiant pour un $\lambda \in \mathbb{R}$ (dépendant de f),

$$\int |f|^2 \frac{e^{-\varphi}}{(1 + |Z|^2)^\lambda} dX < + \infty ,$$

est dense dans l'espace des fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n , muni de sa topologie usuelle.

(Ceci entraîne en particulier que ledit ensemble n'est pas réduit à 0, ce qui est loin d'être trivial !)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREOTTI (A.) et VESENTINI (E.). - Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets, Séminaire Ehresmann, t. 4, 1962-1963.
- [2] ANDREOTTI (A.) and VESENTINI (E.). - Carleman estimates for the $\bar{\partial}$ -operator, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques (à paraître).
- [3] GARABEDIAN (P. R.) and SPENCER (D. C.). - Complex boundary value problems, Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p. 223-242.
- [4] HÖRMANDER (L.). - Existence theorems for the $\bar{\partial}$ -operator by L^2 -methods (à paraître).
- [5] HÖRMANDER (L.). - The Frobenius-Nirenberg theorem (à paraître).
- [6] KOHN (J. J.). - Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I., Annals of Math., t. 78, 1963, p. 112-148 ; II. (à paraître).
- [7] MORREY (C. B.). - The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds, Annals of Math., t. 68, 1958, p. 159-201.
- [8] MORREY (C. B.). - The $\bar{\partial}$ -Neumann problem on strongly pseudo-convex manifolds (à paraître).