

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PAUL JAFFARD

Anneaux d'Adèles

Séminaire N. Bourbaki, 1956, exp. n° 103, p. 23-33

http://www.numdam.org/item?id=SB_1954-1956__3__23_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX D'ADÈLES D'APRÈS IWASAWA

par Paul JAFFARD

1. PF-corps, adèles et idèles.

On dit qu'un corps K est un PF-corps s'il est un corps algébrique de degré fini (cas algébrique) ou une extension algébrique du corps $k_0(t)$ des fonctions rationnelles à une variable à coefficients dans un corps (commutatif) k_0 (cas fonctionnel). Le PF-corps K sera dit spécial s'il est un corps algébrique ou si, dans le cas fonctionnel, k_0 est un corps fini.

K étant un PF-corps, nous aurons à considérer l'ensemble des valuations de K (qui, dans le cas fonctionnel induisent la valuation triviale sur le corps k_0). Nous écrivons ces valuations sous la forme multiplicative.

Soit v une telle valuation : on désigne par K_v le corps complété de K pour la topologie déduite de cette valuation et par \bar{K}_v le corps résiduel correspondant dans le cas où v est une valuation non archimédienne.

Si v est une valuation archimédienne, il existe un isomorphisme σ de K_v sur le corps \mathbb{R} des nombres réels ou le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Si à tout élément $x \in K$ on fait correspondre la valeur absolue $|\sigma(x)|$ dans le cas où K_v est isomorphe à \mathbb{R} et le carré $|\sigma(x)|^2$ dans le cas où K_v est isomorphe à \mathbb{C} , on voit que cette correspondance définit une valuation de K équivalente à v qui sera dite valuation normale.

Si v est une valuation non archimédienne, le corps résiduel \bar{K}_v est un corps fini dans le cas arithmétique et une extension algébrique finie de k_0 dans le cas fonctionnel. On associe à la valuation v la valuation équivalente w ainsi définie :

1) Si K est un PF-corps spécial, on pose :

$$w(x) = (\text{nombre des éléments de } \bar{K}_v)^{-\text{ord}_v x}$$

2) Si K est un PF-corps non spécial, on choisit une fois pour toutes un nombre $c > 1$ et on pose :

$$w(x) = \left[c \left[\bar{K}_v : k_0 \right] \right]^{-\text{ord}_v x}$$

w sera encore dite valuation normale.

K étant un PF-corps, on considère l'ensemble $(v_L)_{L \in I}$ de toutes ses valuations normales et on pose $K_L = K_{v_L}$ et $\bar{K}_L = \bar{K}_{v_L}$.

On voit alors que si x est un élément de K , tous les nombres $v_L(x)$ ($L \in I$) sont égaux à 1 sauf un nombre fini et que l'on a :

$$\prod_{L \in I} v_L(x) = 1$$

C'est la formule du produit d'Artin-Whaples [2]. ARTIN et WHAPLES ont montré en outre la réciproque de cette propriété. Plus précisément : Si on se donne un corps K et un ensemble $(v_L)_{L \in I}$ de valuations non équivalentes sur K tel que pour tout $x \in K$ les valeurs $v_L(x)$ soient égales à 1 sauf un nombre fini d'entre elles et que l'on ait $\prod_{L \in I} v_L(x) = 1$ alors K est un PF-corps et les valuations $(v_L)_{L \in I}$ (élevées s'il le faut à une puissance convenable) sont toutes les valuations normales du PF-corps K .

Soit une famille $(G_L)_{L \in I}$ de groupes topologiques séparés et pour chaque $L \in I$ un sous-groupe invariant ouvert H_L de G_L et G le groupe (non topologique) produit direct $\prod_{L \in I} G_L$. Soient G' et H les sous-groupes de G ainsi définis :

$$x \in G' \Leftrightarrow x_L \in H_L \text{ pour tous les } L \in I \text{ sauf un nombre fini.}$$

$$x \in H \Leftrightarrow x_L \in H_L \text{ pour tous les } L \in I.$$

G' sera dit produit direct local [4] des G_L relativement aux H_L s'il est muni de la topologie suivante (compatible avec sa structure de groupe) :

On munit $H = \prod_{L \in I} H_L$ de la topologie du produit direct et on prend comme système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans G' un système fondamental de voisinages de l'élément neutre dans H . On définit de même le produit direct local des anneaux topologiques $(A_L)_{L \in I}$ relativement à des sous-anneaux ouverts $B_L \subset A_L$.

K étant un PF-corps et $(v_L)_{L \in I}$ l'ensemble de ses valuations normales, on désigne par O_L l'anneau des entiers de K_L si v_L est non archimédienne et on pose $O_L = K_L$ si v_L est archimédienne. On appelle alors anneau des adèles de K le produit direct local des anneaux K_L relativement aux sous-anneaux O_L . Les éléments de cet anneau A sont appelés adèles. Si $a \in A$ on pose pour tout $L \in I$: $v_L(a) = v_L(a_L)$.

On appelle idèles les éléments inversibles de l'anneau A . Nous désignerons par J le groupe multiplicatif des idèles qui sera muni de la topologie suivante :

J peut être considéré comme un groupe d'automorphismes de A si on associe à

tout $a \in J$ l'automorphisme $x \rightarrow ax$ de A . Par suite J est un groupe topologique s'il est muni de la topologie de Birkhoff [4]. Un système fondamental de voisinages de 1 dans J est constitué par les sous-ensembles $W(C, U)$ tels que :

$$a \in W(C, U) \Leftrightarrow \{x - ax, x - a^{-1}x \in U; \forall x \in C\}$$

C parcourant les parties compactes de A et U les voisinages de 0 dans A . On peut voir que cette topologie est celle définie par WEIL [9] :

Soit $U_{\mathbb{C}}$ le groupe des unités du corps $K_{\mathbb{C}}$ si $v_{\mathbb{C}}$ est archimédienne, $U_{\mathbb{C}} =$ le groupe multiplicatif $K_{\mathbb{C}}^* = \mathbb{C}^*$ (des éléments non nuls de $K_{\mathbb{C}}$) si $v_{\mathbb{C}}$ est archimédienne complexe et $U_{\mathbb{R}} =$ le groupe des nombres réels positifs si $v_{\mathbb{C}}$ est archimédienne réelle. Alors J est le produit direct local des groupes $K_{\mathbb{C}}^*$ relativement aux sous-groupes $U_{\mathbb{C}}$.

Cette topologie n'est pas celle introduite par CHEVALLEY ([5]). Les propriétés arithmétiques du PF-corps K sont liées profondément aux propriétés topologiques de A et de J , en particulier lorsque K est un PF-corps spécial, c'est-à-dire tel que la théorie du corps de classe lui soit applicable.

Le but d'IWASAWA est de déduire les propriétés topologiques de A et de J de quelques propriétés facilement vérifiables de A (qui le caractérisent) et d'obtenir à partir de là des résultats arithmétiques sur K .

2. V-anneaux.

On dit qu'un anneau topologique A est un V-anneau s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1) A est un anneau commutatif, semi-simple, possédant un élément unité 1.
- 2) A est localement compact, mais n'est ni compact, ni discret.
- 3) A a un sous-corps K contenant 1, tel que K soit discret dans A et que l'espace quotient A/K soit compact.

K est alors appelé corps de base de l'anneau A .

IWASAWA montre l'identité des V-anneaux et des anneaux d'adèles des PF-corps spéciaux (le corps de base du V-anneau étant le PF-corps correspondant).

G étant un groupe localement compact et σ un automorphisme de G , on appelle norme de σ [4] la constante positive ainsi définie :

μ étant une mesure de Haar sur G , et μ' la mesure de Haar définie par $\mu'(E) = \mu(\sigma(E))$, on a $\mu' = k\mu$. Cette norme k ne dépend pas de μ . On la désigne par $N(\sigma, G)$.

Si H est un sous-groupe fermé de G tel que $\sigma(H) = H$, on a :

$$N(\sigma, G) = N(\sigma, G/H) N(\sigma, H),$$

A étant un anneau localement compact qui contient 1 et ξ un élément inversible de A , on note $N(\xi, A)$ la norme $N(\sigma, A)$ de l'automorphisme $\sigma: \alpha \rightarrow \xi\alpha$. Comme cet automorphisme laisse invariant chaque idéal à gauche fermé α de A , on définit sans peine $N(\xi, \alpha)$ et $N(\xi, A/\alpha)$.

On a alors le :

LEMME 1. - Supposons que A ait un ensemble d'idéaux bilatères maximaux fermés $(M_\lambda)_{\lambda \in I}$ tel que $\bigcap_{\lambda \in I} M_\lambda = \{0\}$. Si ξ est un élément inversible de A , $N(\xi, A/M_\lambda)$ est égale à 1 presque partout (sauf sur un sous-ensemble fini de I) et on a

$$N(\xi, A) = \prod_{\lambda \in I} N(\xi, A/M_\lambda).$$

On en déduit immédiatement le :

LEMME 2. - Si, dans les mêmes conditions que le lemme 1, $\exists \alpha \in I$ avec

$$N(\xi, A/M_\alpha) \neq 1,$$

alors \exists un idéal bilatère fermé L de A tel que $A = M_\alpha + L$.

Dans le cas où A est un anneau commutatif, A/M est un corps commutatif localement compact K et si $\xi \in K$, ($\xi \neq 0$) $v(\xi) = N(\xi, K)$ est la valuation normale qui induit la topologie de K .

Soit A un V -anneau. Il résulte d'un travail de KAPLANSKY que la semi-simplicité de A implique que l'intersection de tous ses idéaux maximaux fermés se réduit à $\{0\}$.

A partir des hypothèses 2) et 3) on peut facilement montrer que A n'est pas un corps. On peut également voir que $\{0\}$ est le seul idéal compact de A et que A est le seul idéal ouvert de A .

Soit M un idéal maximal fermé de A . Puisque M n'est pas ouvert, A/M est un corps localement compact non discret. D'autre part l'image de K dans l'homomorphisme $A \rightarrow A/M$ est dense dans A/M . Par suite K contient un élément $\xi \neq 0$ tel que $N(\xi, A/M) \neq 1$ et, d'après le lemme 2, A est la somme directe de M et d'un idéal fermé K_M qui est un corps localement compact. On désigne par v_M la valuation normale correspondante de K_M . Si φ_M désigne la projection de A sur K_M et si $a \in A$, on pose encore $v_M(a) = v_M(\varphi_M(a))$. On voit que si a est un élément

inversible de A , on a $v_M(a) = N(a, A/M)$ et que v_M induit sur K une valuation. On peut voir que si M' est un autre idéal maximal fermé de A , les deux valuations v_M et $v_{M'}$ sont inéquivalentes.

Si $x \in K$, on a $N(x, A) = N(x, A/K) N(x, K)$. Comme A/K est compact,

$$N(x, A/K) = 1$$

et comme K est discret $N(x, K) = 1$. Par suite $N(x, A) = 1$. Si $(M_\mathcal{L})_{\mathcal{L} \in I}$ désigne l'ensemble des idéaux maximaux fermés de A , il correspond à cet ensemble un ensemble $(v_\mathcal{L})_{\mathcal{L} \in I}$ de valuations non triviales inéquivalentes de K , tel que, pour tout $x \in K$, on ait $v_\mathcal{L}(x) = 1$ pour tout indice $\mathcal{L} \in I$, sauf pour un nombre fini et tel que $\prod_{\mathcal{L} \in I} v_\mathcal{L}(x) = 1$.

Les résultats d'ARTIN et WHAPLES montrent alors que K est un PF-corps et que $(v_\mathcal{L})_{\mathcal{L} \in I}$ est l'ensemble de toutes les valuations normales de K dans le cas arithmétique et l'ensemble de toutes les valuations de K triviales sur le corps des constantes dans le cas fonctionnel. Mais si ici on choisit un indice spécial $\alpha \in I$, puisque $K_{\mathcal{L}\alpha}$ est localement compact, le corps résiduel (s'il existe) est fini et, comme dans le cas fonctionnel, il doit comprendre le corps des constantes, on voit que K est un PF-corps spécial et que $(v_\mathcal{L})_{\mathcal{L} \in I}$ désigne l'ensemble de toutes les valuations normales de K .

Pour montrer que A est l'anneau des adèles de K , il reste donc à montrer que A est le produit direct local des anneaux $K_\mathcal{L}$ relativement aux sous-anneaux $0_\mathcal{L}$ définis au paragraphe 1. Nous laissons tomber ici cette partie de la démonstration.

Tout V-anneau est donc l'anneau des adèles d'un PF-corps spécial.

Pour montrer que, réciproquement, tout anneau d'adèles d'un PF-corps spécial K est un V-anneau, on commence par le montrer dans le cas où K est soit le corps \mathbb{Q} des rationnels, soit le corps $k_0(t)$ des fonctions rationnelles sur un corps fini k_0 :

Si $K = \mathbb{Q}$, on voit immédiatement que l'anneau A des adèles est localement compact, commutatif, a un élément unité et tel que l'intersection de tous ses idéaux maximaux fermés soit égale à $\{0\}$, ce qui implique la semi-simplicité de A . Reste à montrer que K est un sous-corps discret de A et que A/K est compact.

Soit V l'ensemble de tous les adèles a tels que $a_\mathcal{L} \in 0_\mathcal{L}$ si $v_\mathcal{L}$ est une valuation non archimédienne et $v_\mathcal{L}(a) \leq 1/2$ si $v_\mathcal{L}$ est archimédienne. V est un voisinage compact de 0 dans A tel que $V \cap K = \{0\}$. Par suite K est discret dans A .

Pour montrer que A/K est compact, on montre que $A = K + V$; soit $a \in A$. Si

v_L est une valuation non archimédienne, a_L est un nombre p-adique

$$a_L = \sum_{n \leq m < \infty} \alpha_{L,m} p^m$$

$\alpha_{L,m}$ étant l'un des nombres $0, 1, \dots, p-1$.

On appelle partie principale de a_L le nombre :

$$\begin{aligned} a'_L &= \sum_{n \leq m < -1} \alpha_{L,m} p^m && \text{si } n < 0 \\ a'_L &= 0 && \text{si } n \geq 0 \end{aligned}$$

a'_L est un nombre rationnel qui est égal à 0 sauf pour un nombre fini de coefficients L . $\alpha' = \sum_{L \in I_0} a'_L$ (où I_0 indique l'ensemble des indices non archimédiens) est un nombre rationnel. Si on pose $\alpha = \alpha' + [|a| - \alpha' + 1/2]$ où $|a|$ désigne la valeur absolue de la composante archimédienne de a et $[t]$ le plus grand entier $\leq t$, on voit que $\alpha \in K$ et $a - \alpha \in V$.

L'anneau des adèles de \mathbb{Q} est donc bien un V-anneau. On montrerait de la même manière que l'anneau des adèles de $k_0(t)$ (k_0 fini) est aussi un V-anneau.

Pour montrer que tout anneau des adèles d'un PF-corps spécial est un V-anneau il suffit maintenant de montrer que si A est un anneau de corps de base K et si K' est une extension algébrique de degré fini de K , le produit tensoriel sur K : $A' = A \otimes K'$ est un V-anneau ayant pour corps de base K' s'il est muni de la topologie suivante : $\omega_1, \dots, \omega_n$ étant une base de K' sur K , est encore une base de A' sur A . Elle détermine une correspondance biunivoque de A' sur A^n . On prend comme topologie sur A' l'image de la topologie habituelle de A^n . On voit facilement que A' vérifie les critères d'un V-anneau ayant pour corps de base K' . Seule la semi-simplicité demande une étude un peu approfondie.

3. Propriétés des V-anneaux.

Nous allons étudier maintenant certaines propriétés des V-anneaux, c'est-à-dire des anneaux d'adèles de PF-corps spéciaux.

K désigne un PF-corps spécial, A l'anneau d'adèles correspondant et $(v_L)_{L \in I}$ l'ensemble de toutes ses valuations normales. Si K a pour caractéristique 0 (cas arithmétique), on appelle valuations à l'infini de K ses valuations archimédiennes. Si K a une caractéristique non nulle (cas fonctionnel), on choisit un élément t de K transcendant sur le corps des constantes k_0 et on appelle valuations à l'infini de K celles pour lesquelles t a une valeur strictement supérieure à 1. On voit que dans les deux cas K a un nombre fini non nul r de valuations à l'infini. On note A_∞ le sous-anneau formé par tous les éléments de A dont les composantes

finies sont nulles et par A_0 le sous-anneau formé par tous les éléments dont les composantes infinies sont nulles. On a :

$$A = A_0 \bar{+} A_\infty$$

Soit χ un caractère non nul du groupe additif A qui s'annule sur K . A tout élément a de A , on fait correspondre le caractère $\chi_a = \bar{\Psi}(a)$ ainsi défini : $\chi_a(x) = \chi(ax)$.

On montre que $\bar{\Psi}$ définit un isomorphisme de groupe topologique du groupe A et de son dual \hat{A} .

Cette auto-dualité de A peut être mise en évidence en posant pour tout couple d'éléments $a, b \in A$: $\langle a, b \rangle = \chi(ab)$. L'annihilateur H' du sous-groupe fermé H de A est le groupe des caractères de A/H' et $(H')' = H$.

$\chi(K) = 0$ implique $K \subset K'$ et $KK' \subset K'$. La compacité de A/K montre que K' est discret et que K'/K est compact. Donc K'/K est fini et comme K' est un K -module, on a $K' = K$.

TATE a montré que l'auto-dualité de A et $K' = K$ jouent un rôle essentiel dans la théta-formule du corps K .

\mathcal{Q} étant un idéal fermé de A , son annihilateur \mathcal{Q}' est un autre idéal fermé tel que $A = \mathcal{Q} \bar{+} \mathcal{Q}'$. En particulier :

$$M' = K_M \quad K'_M = M \quad ; \quad A'_0 = A_\infty \quad A'_\infty = A_0$$

Nous allons maintenant montrer l'existence d'un élément ζ de K vérifiant certaines relations particulières :

soit U_1 le voisinage compact de 0 défini par :

$$a \in U_1 \iff \{v_L(a) \leq 1 \quad \forall L \in I\}$$

Soit un voisinage compact V de 0 tel que $V - V \subset U_1$ et supposons que a soit un élément inversible de A tel que $aU_1 \cap K = \{0\}$. Alors, quel que soit $b \in A$, l'ensemble $(aV) \cap (b + K)$ contient au plus un élément. Si μ , μ' et μ'' désignant les mesures de Haar respectives sur A , A/K et K , si f désigne la fonction caractéristique de aV dans A et $\bar{F}(P)$ la fonction caractéristique de l'image de aV dans A/K , on a :

$$\mu(aV) = \int_A f(x) dx = \int_{A/K} dP \int_K f(b + \zeta) d\zeta = \int_{A/K} \bar{F}(P) dP \leq \int_{A/K} dP = \mu'(A/K)$$

par conséquent :

$$N(a, A) \mu(V) \leq \mu'(A/K) \quad \text{ou} \quad N(a, A) \leq$$

$\delta = \mu'(A/K) / \mu(V)$ étant une constante positive indépendante de a . Par suite :

LEMME 3. - Si la norme $N(a, A)$ de l'adèle inversible a est supérieure à une certaine constante $\delta > 0$, il existe un élément ξ non nul de K tel que

$$v_L(\xi) \leq v_L(a) \quad \forall L \in I.$$

Ceci est l'équivalent du théorème de Riemann sur les fonctions algébriques.

Si α est un idéal fermé de A , \downarrow l'idéal fermé α' tel que $A = \alpha + \downarrow$. On pose $1 = e' + e''$ ($e' \in \alpha$, $e'' \in \downarrow$) et $\alpha^* = J(\alpha) + e''$ si $J(\alpha)$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau α (on a $J = J(A)$).

α^* est un sous-groupe fermé de J qui est isomorphe à $J(\alpha)$ considéré comme groupe d'automorphismes du groupe additif α .

On définit de même \downarrow^* et on voit que $J = \alpha^* \times \downarrow^*$ (produit direct). En particulier si M est un idéal maximal fermé de A : $J = M^* \times K_M^*$ où K_M^* est le groupe multiplicatif du corps K_M . Sur K_M^* les deux topologies coïncident. On a aussi $J = J_0 \times J_\infty$ avec $J_0 = A_0^*$ et $J_\infty = A_\infty^* = K_1^* \times \dots \times K_r^*$. L'application $a \rightarrow N(a, A)$ du groupe localement compact J dans le groupe multiplicatif des nombres réels > 0 est un homomorphisme de J sur R_+^* dans le cas arithmétique et un homomorphisme de J sur un sous-groupe discret de R_+^* dans le cas fonctionnel. Par suite si J_1 est le noyau de cet homomorphisme, J/J_1 est isomorphe suivant les cas au groupe additif des réels ou au groupe additif des entiers.

D'après la formule d'Artin-Whaples K^* est un sous-groupe discret de J_1 (la topologie des idèles étant plus fine que celle induite par les adèles).

THEOREME. - J_1/K^* est compact.

Soit $a_0 \in J$ tel que $N(a_0, A) > \delta$ (où δ a la signification donnée plus haut). Pour tout $a \in J_1$ on a $N(a^{-1}a_0, A) > \delta$, donc $\exists \xi \in K^*$ tel que

$$v_L(\xi) \leq v_L(a^{-1}a_0)$$

pour tout $L \in I$, c'est-à-dire

$$a \xi \in a_0 U_1$$

(U_1 étant toujours le sous-ensemble de A défini par : $a \in U_1 \iff v_L(a) \leq 1$ pour tout $L \in I$).

On a donc $\xi \in a^{-1}a_0 U_1 \cap K$.

$(a\xi)^{-1} \in J_1$ entraîne également l'existence de $\xi' \in K^*$ tel que $(a\xi)^{-1} \xi' \in a_0 U_1$.

Donc $\bar{\xi}' \in a_0^2 U_1^L$. Mais $a_0^2 U_1^2$ étant compact, K fermé et discret dans A , l'ensemble $a_0^2 U_1^2 \cap K$ n'a qu'un nombre fini d'éléments $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$. Par suite $(a\bar{\xi})^{-1}$ est contenu dans l'un des ensembles $\bar{\xi}_i^{-1} a_0 U_1$. Donc si C est la réunion de $a_0 U_1$ et des ensembles $\bar{\xi}_i^{-1} a_0 U_1$, on voit que $(a\bar{\xi}), (a\bar{\xi})^{-1} \in G$. Par suite si nous désignons par C' l'ensemble des éléments b de J_1 tels que b et $b^{-1} \in C$, nous avons $J_1 = K^* C'$.

C étant compact, on peut montrer que C' est compact. Il en résulte alors le théorème.

Soit E le groupe des idèles dont toutes les composantes ont pour norme 1,

$$a \in E \Leftrightarrow \{v_L(a) = 1 \quad \forall L \in I\}$$

E est un sous-groupe compact de J_1 . Si on pose $E_0 = E \cap J_0$ et $E_\infty = E \cap J_\infty$, on a $E = E_0 \times E_\infty$.

E_0 est un sous-groupe ouvert et compact de J_0 . Posons en outre :

$$J_{\infty,1} = J_\infty \cap J_1 \quad \text{et} \quad H = (E_0 \times J_\infty) \cap J_1 = E_0 \times J_{\infty,1}$$

et considérons la suite de groupes :

$$J_1 \supset HK^* \supset EK^* \supset K^*$$

E étant compact et K^* fermé, EK^* est fermé dans J_1 . Comme $E_0 \times J_\infty$ est ouvert dans J , H et HK^* sont des sous-groupes ouverts de J_1 . La compacité de J_1/K^* entraîne celles de J_1/HK^* et de HK^*/EK^* ; mais HK^* étant ouvert dans J_1 , le groupe J_1/HK^* est discret, donc fini.

$$J_1/HK^* = J_1/K^* [(E_0 \times J_\infty) \cap J_1]$$

est isomorphe à

$$J_1(E_0 \times J_\infty)/K^*(E_0 \times J_\infty) = J/K^*(E_0 \times J_\infty)$$

qui est lui-même isomorphe au groupe des classes d'idéaux de K .

Par suite dans un PF-corps spécial, les classes d'idéaux sont en nombre fini.

Supposons maintenant que K soit un corps de nombres. Alors $J_{\infty} \cong R^{*r_1} \times C^{*r_2}$.
 L'isomorphisme $H/E \cong J_{\infty,1}/E_{\infty}$ montre que H/E est isomorphe à l'espace vectoriel R^{r-1} avec $r = r_1 + r_2$.

Les isomorphismes :

$$HK^*/EK^* \cong H/E(H \cap K^*) \quad \text{et} \quad E(H \cap K^*)/E \cong H \cap K^*/E \cap K^*$$

montrent que $H/E(H \cap K^*)$ est compact, et $E(H \cap K^*)/E$ est discret. Donc, dans la suite :

$$H \supset E(H \cap K^*) \supset E$$

le groupe $H/E(H \cap K^*)$ est compact, $E(H \cap K^*)/E$ est discret et H/E est isomorphe à R^{r-1} . Il s'ensuit que $E(H \cap K^*)/E$ est un groupe abélien libre à $r - 1$ générateurs ([3], chapitre 7). Il en est donc de même de $H \cap K^*/E \cap K^*$. Mais $H \cap K^*$ est le groupe multiplicatif des unités du corps K et $E \cap K^*$ est le groupe des racines de l'unité contenues dans le corps K . Par suite nous obtenons le :

THÉOREME de Dirichlet : K étant un corps algébrique fini, le groupe des unités du corps K est le produit direct du groupe des racines de l'unité du corps K et d'un groupe abélien libre à $r_1 + r_2 - 1$ générateurs.

Un raisonnement analogue pourrait être fait dans le cas fonctionnel..

TATE s'est servi de la compacité de J_1/K^* pour démontrer la première inégalité du corps de classes.

4. V'-anneaux.

On peut généraliser certaines de ces propriétés à des anneaux d'adèles ayant pour corps de base un PF -corps non spécial en remplaçant la notion de compacité par celle de compacité linéaire d'un espace vectoriel [8]. Pour tout automorphisme d'un espace linéairement compact S sur un corps F , IWASAWA définit une norme qui a des propriétés analogues à celles de la norme d'un automorphisme d'un groupe localement compact. Un V'-anneau est un anneau topologique A satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1') A est un anneau compact, semi-simple, possédant un élément unité 1.
- 2') A est un espace vectoriel sur un sous-corps F , il est localement linéairement compact, mais n'est ni linéairement compact ni discret.
- 3') A a un sous-corps K contenant F tel que K soit discret dans A et que l'espace quotient A/K soit linéairement compact.

K est encore appelé corps de base de A .

IWASAWA montre l'identité des V' -anneaux et des anneaux d'adèles d'un PF-corps fonctionnel. Le corps de base K du V' -anneau est le PF-corps et le sous-corps F le corps des constantes.

L'anneau des adèles d'un PF-corps spécial de caractéristique 0 est donc à la fois un V -anneau et un V' -anneau.

Un V' -anneau est encore auto-dual à condition de considérer uniquement ses caractères linéaires (prenant leurs valeurs dans F). Quant au lemme 3, il est précisé par le théorème de Riemann-Roch que l'on peut déduire des propriétés topologiques du V' -anneau.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (Emil). - Algebraic numbers and algebraic functions, I. - Princeton University, New-York University, 1950-1951.
- [2] ARTIN (E.) and WHAPLES (G.). - Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations, Bull. Amer. math. Soc., t. 51, 1945, p. 469-492.
- [3] BOURBAKI (Nicolas). - Livre III : Topologie générale, Chapitres 5 à 8. - Paris, Hermann, 1947 (Actualités scient. et ind. n° 1029 ; Eléments de Mathématique 5).
- [4] BRACONNIER (Jean). - Sur les groupes topologiques localement compacts, J. Math. pures et appl., t. 27, 1948, p. 1-85.
- [5] CHEVALLEY (Claude). - La théorie du corps de classes, Annals of Math., Series 2, t. 41, 1940, p. 394-418.
- [6] CHEVALLEY (Claude). - Class field theory. - Nagoya, Nagoya University, 1953-1954.
- [7] IWASAWA (Kenkichi). - On the ring of valuation vectors, Annals of Math., Series 2, t. 57, 1953, p. 331-356.
- [8] LEFSCHETZ (Solomon). - Algebraic topology. - New-York, American mathematical Society, 1942. (Amer. math. Soc. Colloquium Publications, n° 27).
- [9] WEIL (André). - Sur la théorie du corps de classes, J. math. Soc. Japan, t. 3, 1951, p. 1-35.
- [10] WEIL (André). - Conférences faites à l'Ecole Normale Supérieure (Hiver 1953).