

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

BERNARD MALGRANGE

Équations de Sturm-Liouville

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 65, p. 155-165

http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__155_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EQUATIONS DE STURM-LIOUVILLE,

par Bernard MALGRANGE.

Introduction.

L'exposé a pour but d'étendre au cas du demi-axe positif les résultats classiques concernant le développement des fonctions suivant les fonctions propres d'un opérateur de Sturm-Liouville sur un intervalle borné. H. WEYL a donné une méthode qui part d'une décomposition spectrale de l'opérateur considéré [9]. Ses résultats ont été généralisés par KODAIRA [4] aux opérateurs différentiels formellement autoadjoints d'ordre > 2 .

Une autre méthode, introduite par DELSARTE [1], consiste à associer à un opérateur de Sturm-Liouville une convolution généralisée ; on est alors amené à considérer une certaine algèbre normée commutative, et à lui appliquer le théorème de Plancherel abstrait ; c'est essentiellement la méthode suivie par LEVITAN [5].

1. La méthode de H. WEYL.

On pose $Lf = \frac{d}{dx} (p(x) \frac{df}{dx}) + q(x) f$, $a < x < b$ (a et b finis ou non), avec p et q réelles et continues, et $p > 0$.

Nous supposons dans toute la suite que f est localement à variation bornée dans $]a, b[$ (ceci pour que Lf ait un sens).

Notations :

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

$$[f, g](x) = p(x) (f \frac{dg}{dx} - g \frac{df}{dx})$$

1° La fonction de Green.

Soit λ un nombre complexe, avec $\Im \lambda \neq 0$, et soit D l'ensemble des solutions non nulles de $Lf - \lambda f = 0$, modulo la multiplication par les constantes (D est visiblement une droite projective complexe). Si f est solution de $Lf - \lambda f = 0$, on appelle \tilde{f} son image dans D .

Soient $a < \alpha < \beta < b$; soit D_{β^-} (resp. D_{β} , D_{β^+}) l'ensemble des \tilde{f} qui vérifient :

$$\frac{1}{i\lambda} [f, \bar{f}](\beta) \leq 0 \quad (\text{resp. } = 0, \geq 0)$$

Quel que soit β , ces ensembles sont non vides et compacts (théorème d'existence des solutions des équations différentielles) ; appliquons maintenant la formule de Green, en tenant compte de la relation $Lf = \lambda f$.

$$-2i\lambda \int_{\beta}^{\gamma} f \bar{f} dx = \int_{\beta}^{\gamma} (f L \bar{f} - \bar{f} L f) dx = [f, \bar{f}](\gamma) - [f, \bar{f}](\beta) \quad (\beta < \gamma < b)$$

Par conséquent, on a : $D_{\gamma^+} \subset D_{\beta^+}$; d'où $D_{b^+} = \bigcap_{\beta} D_{\beta^+}$

On vérifie alors que les deux cas suivants sont les seuls à se présenter (détails dans [9]) :

a. D_{b^+} est un point ("Grenzpunkt") ; les f vérifiant : $\tilde{f} \in D_{b^+}$ sont les seuls à être de carré sommable au voisinage de b ; pour un tel f , on a :

$$\lim_{\beta \rightarrow b} [f, \bar{f}](\beta) = D$$

Dans ce cas, nous noterons encore D_b le point D_{b^+} .

b. D_{b^+} est une boule (non réduite à un point !) de la sphère de Riemann associée à b^+ D ("Grenzkreis") ; toutes les solutions de $Lf = \lambda f$ sont de carré sommable au voisinage de b . Notons ici par D_b la frontière de D_{b^+} ; les $\tilde{f} \in D_b$ sont exactement celles qui vérifient :

$$\lim_{\beta \rightarrow b} [f, \bar{f}](\beta) = 0$$

On définit de même $D_{a^-} = D_{a^-}$ et D_a

DÉFINITION. - Etant données $\tilde{f}_a \in D_a$ et $\tilde{f}_b \in D_b$, on appelle fonction de Green associée à \tilde{f}_a et \tilde{f}_b la fonction suivante ($a < x < b$, $a < y < b$) :

$$G(x, y) = \begin{cases} f_a(x) f_b(y) / [f_a, f_b] & \text{si } x \leq y \\ f_b(x) f_a(y) / [f_a, f_b] & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

(Noter que $[f_a, f_b]$ est une constante).

Soit maintenant h une fonction continue à support compact $\in]a, b[$; posons

$$Gh = \int_a^b G(x, y) h(y) dy$$

L'opérateur G possède les propriétés suivantes :

- a) $LGh - \lambda Gh = h$ (évident).
 b) $\lim_{\alpha \rightarrow a} [Gh, \bar{G}h](\alpha) = 0$ (utiliser $\lim_{\alpha \rightarrow a} [fa, \bar{f}a](\alpha) = 0$)

Propriété analogue en b .

- c) $(LGh, Gh) = (Gh, LGh)$ (utiliser b) et la formule de Green).

- d) $\|Gh\|_2 \leq \frac{1}{|\lambda|} \|h\|_2$ (résulte facilement de a) et c)).

De d) résulte que G se prolonge en un opérateur continu sur $L^2(a, b)$; et les propriétés précédentes s'étendent sans difficulté à cet opérateur.

2° Décomposition spectrale de L .

Soit H_0 l'ensemble des $f \in L^2(a, b)$ telles que l'on ait : $Lf \in L^2(a, b)$. En général (plus précisément : sauf dans le cas "Grenzkpunkt" en a et en b), L , muni du domaine H_0 n'est pas autoadjoint.

Prenons alors $\tilde{f}_a \in D_a$ et $\tilde{f}_b \in D_b$; soit $G(x, y)$ la fonction de Green associée à \tilde{f}_a et \tilde{f}_b . On vérifie facilement ceci : soit H l'ensemble des $h \in H_0$ qui vérifient $G(L - \lambda)h = h$ (ou, ce qui revient au même, posons : $H = G \circ L^2(a, b)$). Alors, L , muni du domaine H , est autoadjoint.

Pour faire le raccord avec la théorie classique, nous allons maintenant donner une autre interprétation de H . Partons pour cela des résultats suivants :

a. L'adjoint de L (domaine H_0) est la restriction de L à un sous-espace H_0^* de H_0 (peut se voir directement ; il faut faire un peu attention, parce qu'on ne suppose pas $p(x)$ différentiable).

b. Pour $f \in H_0$ et $g \in H_0$, $\lim_{\alpha \rightarrow a} [f, g](\alpha)$ et $\lim_{\beta \rightarrow b} [f, g](\beta)$ existent (utiliser la formule de Green) ; désignons ces limites respectivement par $[f, g](a)$ et $[f, g](b)$. On a alors :

$$(f, Lg) - (Lf, g) = [f, \bar{g}](b) - [f, \bar{g}](a)$$

c. Dans le cas "Grenzkpunkt" en a , et seulement dans ce cas, on a, pour tout $f \in H$ et tout $g \in H$: $[f, g](a) = 0$ (se démontre en partant de la formule : $h = G(L - \lambda)h + k$, où k vérifie $Lk - \lambda k = 0$).

Notons que ce résultat montre, a posteriori, que la distinction "Grenzkpunkt", "Grenzkreis" est indépendante de λ .

Cela étant, pour trouver H , nous procéderons ainsi :

1) Dans le cas "Grenzkreis" en a , nous n'imposerons à h aucune condition en a .

2) Dans le cas "Grenzkreis" en a , soit g_a une fonction réelle $\in H_0$ telle que la forme linéaire $h \rightarrow [g_a, h](a)$ ne soit pas triviale sur H_0 ; nous imposons à h de vérifier : $[g_a, h](a) = 0$.

3) Nous imposerons des conditions analogues en b , et H désignant l'espace des $h \in H_0$ qui vérifient les conditions précédentes, on vérifie que L (domaine H) est autoadjoint.

Cette méthode se raccorde ainsi à la précédente : soit $\tilde{f}_a \in D_a$; \tilde{f}_a vérifiant en outre, dans le cas "Grenzkreis" la condition : $[g_a, \tilde{f}_a](a) = 0$ (on en vérifie facilement l'existence et l'unicité). Soit de même \tilde{f}_b , et soit $G(x, y)$ la fonction de Green associée à \tilde{f}_a et \tilde{f}_b ; on montre que l'espace H qui vient d'être défini coïncide avec $G \circ L^2(a, b)$.

EXEMPLE. - Dans le cas classique (a et b finis, p et q continus au bord) on impose à h pour appartenir à H , les conditions suivantes :

$$\alpha h(a) + \beta h'(a) = 0 ; \quad \gamma h(b) + \delta h'(b) = 0$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ réels, } (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \neq 0) .$$

REMARQUE. - La méthode précédente, qui, en gros, consiste à imposer à h des conditions indépendantes en a et en b , n'est pas la seule méthode pour obtenir des sous-espaces de H_0 sur lesquels L soit autoadjoint. Exemple :

$$L = \frac{d^2}{dx^2}, \quad a = 0 ; b = 1 ; \text{ imposer : } h(0) = h(1) ; h'(0) = h'(1) !$$

Maintenant : étant donné un $H \subset H_0$ sur lequel L est autoadjoint, il lui correspond une décomposition spectrale de L ; en interprétant les opérateurs de projection qui interviennent, on démontre le :

THÉORÈME 1. - On peut trouver :

1° Pour chaque λ réel une solution $\varphi(x, \lambda)$ de $L\varphi = \lambda\varphi$

2° une mesure > 0 , $d\rho(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

tels que

a. l'application $f(x) \rightarrow \hat{f}(\lambda) = \int_a^b f(x) \varphi(x, \lambda) dx$ (f continue à support compact dans $]a, b[$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(a, b)$ sur l'espace \hat{L}^2 des fonctions de carré sommable pour $d\rho(\lambda)$. On aura en particulier ("formule de Plancherel") :

$$\int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx = \int \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{g}(\lambda)} d\rho(\lambda)$$

b. pour $f \in H$, on ait : $\hat{L}f = \lambda \hat{f}$.

REMARQUES.

a. Du théorème précédent résulte, pour f convenable (le lecteur précisera) la "formule d'inversion de Fourier"

$$f(x) = \int \hat{f}(\lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda)$$

b. Les $\varphi(x, \lambda)$ et la mesure $d\rho(\lambda)$ ne sont pas déterminés de manière unique par H . Par exemple, soit $\omega(\lambda)$ une fonction continue et > 0 de $\lambda \in \mathbb{R}$; on pourrait aussi bien prendre $\omega(\lambda) \varphi(x, \lambda)$ et $\frac{1}{\omega^2} d\rho(\lambda)$ au lieu de $\varphi(x, \lambda)$ et $d\rho(\lambda)$.

c. Pour $f \in H_0$, $f \notin H$, on ne peut pas avoir $\hat{L}f = \lambda f$ (sinon, dans \hat{L}^2 , l'opérateur de multiplication par λ et de domaine \hat{H} , ne serait pas autoadjoint).

2. La méthode de Levitan.

1° Définition de la convolution généralisée.

Nous étudierons seulement le cas où l'on a :

$$Lf = \frac{d^2 f}{dx^2} - r(x) f \quad (0 \leq x < +\infty);$$

$r(x)$ étant réel, continu et borné.

REMARQUE. - On vérifie alors aisément qu'on se trouve alors dans le cas du "Grenzpunkt" pour $+\infty$; cela explique pourquoi nous n'imposerons de conditions que pour $x = 0$.

Soit A un opérateur continu de $L^2(0, +\infty)$; c'est un noyau au sens de L. SCHWARTZ [7]. Cherchons à quelles conditions A permute à L (en tant qu'opérateur sur les fonctions assez dérivables à support compact); pour cela, on doit avoir :

$$L_x A_{x,y} = A_{x,y} L_y$$

comme L est formellement autoadjoint :

$$A_{x,y} L_y = L_y A_{x,y}$$

d'où la condition :

$$L_x A_{x,y} = L_y A_{x,y}$$

Soit maintenant \mathcal{A} l'espace des fonctions $f(x)$ deux fois continuellement différentiables à support compact dans $[0, +\infty[$, qui vérifient $hf(0) - f'(0) = 0$ (h est un nombre réel fixé une fois pour toutes). A tout $g \in \mathcal{A}$, nous allons associer un noyau A_g défini par la fonction $A_g(x, y)$ ($x \geq 0, y \geq 0$) vérifiant les conditions suivantes (existence et unicité de A_g par la théorie des équations hyperboliques à deux variables) :

- a) $L_x A_g(x, y) = L_y A_g(x, y)$
- b) $A_g(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial}{\partial y} A_g(x, 0) = hg(x)$
- c) $A_g(y, x) = A_g(x, y)$

Pour f continue à support compact, on pose $A_g f = f * g = \int_0^{+\infty} A_g(x, y) f(y) dy$

On démontre alors le :

THÉOREME 2. - L'application $(f, g) \rightarrow f * g$ définit sur \mathcal{A} une structure de \mathbb{C} -algèbre commutative munie de l'involution $f \rightarrow \bar{f}$. De plus, pour $f \in \mathcal{A}$, on a :

$$L(A_g f) = A_g(Lf)$$

2° Une majoration.

On utilise le résultat suivant (je n'ai pu trouver la référence indiquée par LEVITAN ; de toute façon, cela ne doit pas être bien difficile) .

La fonction de Riemann de l'opérateur $L_x - L_y$, ainsi que ses dérivées du premier ordre sont majorées en valeur absolue par $C e^{\sqrt{2}y}$ (C une constante > 0).

Démontrons alors le :

THÉOREME 3. - Il existe une fonction $\alpha(x) = \beta + \gamma x e^{\sqrt{2}x}$ (β et γ constantes > 0) telles que, pour tout couple $(f, g) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ et tout p ($1 \leq p \leq +\infty$), on ait :

$$\|f * g\|_p \leq \|\alpha f\|_1 \|g\|_p$$

Il suffit de démontrer que, pour tout $h(x) \in \mathcal{A}$, on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} f * g(x) f(x) dx \right| (= |f * g * h(0)|) \leq \| \alpha f \|_1 \| g \|_p \| h \|_p, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1 \right)$$

Or :

$$A_f(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)] + \int_{x-y}^{x+y} w(x, y, t) f(t) dt \quad \text{si } y \leq x$$

$$= A_f(y, x) \quad \text{si } y \geq x$$

w étant la fonction de Riemann de $L_x - L_y$. Il suffit de majorer l'intégrale :

$$\left| \int_0^y \int_{x-y}^{x+y} f(y) g(x) dy dx \int_{x-y}^{x+y} w(x, y, t) h(t) dt \right|$$

Par un changement de variables, elle s'écrit :

$$\left| \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(y) g(\xi + y) d\xi dy \int_0^{2y} w(\xi + y, y, \xi + r) h(\xi + r) dr \right|$$

$$\leq C \int_0^{+\infty} |f(y)| e^{\sqrt{2}y} dy \int_0^{2y} dr \int_0^{+\infty} |g(\xi + y) h(\xi + r)| d\xi$$

$$\leq 2C \int_0^{+\infty} |f(y)| y e^{\sqrt{2}y} dy \|g\|_p \|h\|_p,$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE. - Pour $f \in \mathcal{A}$, l'application $g \rightarrow f * g$ se prolonge en un opérateur continu de $L^2(0, +\infty)$.

La norme de cet opérateur sera désignée par $\| |f| \|$.

3° Etude des caractères de \mathcal{A} .

Soit \mathcal{A}_0 l'espace des caractères de \mathcal{A}

a. Non nuls.

b. Hermitiens (i.e. $\overline{\chi(f)} = \chi(\bar{f})$)

c. Continus pour la norme $\| | \cdot \|$

D'après le théorème 3, on a $|\chi(f)| \leq \| |f| \| \leq \| \alpha f \|_1$, donc on a :

$$\chi(f) = \int_0^{+\infty} \varphi_\chi(x) f(x) dx$$

où $\varphi_\chi(x)$ est une fonction mesurable et (essentiellement) bornée sur tout compact.

χ se prolonge aux fonctions continues à support compact, en particulier aux L_f ($f \in \mathcal{A}$) ; on a donc :

$$\chi(Lf) \chi(g) = \chi(Lf * g) = \chi(f * Lg) = \chi(f) \chi(Lg)$$

Enfin, puisque χ n'est pas nul, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que $\chi(g) \neq 0$; par conséquent :

$$\chi(Lf) = \frac{\chi(Lg)}{\chi(g)} \chi(f) = \lambda \chi(f) \quad \lambda \text{ indépendant de } f.$$

On déduit facilement de là :

THÉORÈME 4. - Pour tout $\chi \in \hat{\mathcal{A}}_0$, il existe une fonction $\varphi(x, \lambda)$ ($0 \leq x < +\infty$, λ réel) telle que l'on ait :

$$\chi(f) = \int f(x) \varphi(x, \lambda) dx$$

et $\varphi(x, \lambda)$ possède les propriétés suivantes :

- a) $L_x \varphi = \lambda \varphi$
 b) $\varphi(0, \lambda) = 1$; $\varphi'_x(0, \lambda) = h$

Enfin, l'application $\chi \rightarrow \lambda$ est un isomorphisme (topologique) de $\hat{\mathcal{A}}_0$ sur un sous-ensemble fermé de \mathbb{R} .

4° Le théorème de Plancherel.

Nous allons appliquer les résultats de Godement sur le "théorème de Plancherel abstrait".

Sur \mathcal{A} , la forme linéaire $\mu(f) = f(0)$ possède les propriétés suivantes :

- a. Elle est hermitienne positive (i.e. $\overline{\mu(f * \bar{g})} = \mu(\bar{f} * g)$; $\mu(f * \bar{f}) \geq 0$)
 Cela résulte de la formule :

$$\mu(f * g) = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

- b. Elle est unitaire (i.e. $\mu(f * \bar{f} * g * \bar{g}) \leq M_f \mu(g * \bar{g})$)

Cela résulte du théorème 3.

LEMME. - Pour tout $f \in \mathcal{A}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{A}$ tel que l'on ait : $\|g * f - f\| < \varepsilon$ (prendre pour g une fonction positive, nulle en dehors d'un intervalle $[0, \eta]$ assez petit, et appliquer le théorème 3).

Alors d'après GODEMENT :

THÉORÈME 5. - Il existe une mesure positive $d\rho(\lambda)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$) et un isomorphisme isométrique $f(x) \rightarrow \hat{f}(\lambda)$ entre :

- l'espace L^2 des fonctions de carré sommable sur $(0, +\infty)$ pour dx .
- l'espace \hat{L}^2 des fonctions de carré sommable pour $d\rho(\lambda)$;

cet isomorphisme prolongeant l'application $f \rightarrow \hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x) \varphi(x, \lambda) dx$ ($f \in \mathcal{Q}$) où $\varphi(x, \lambda)$ désigne la fonction vérifiant :

$$L\varphi = \lambda \varphi, \quad \varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'_x(0, \lambda) = h$$

En particulier, on a la "formule de Plancherel" :

$$\int_0^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{g}(\lambda)} d\rho(\lambda)$$

Enfin, si $Lf \in L^2$ et $hf(0) - f'(0) = 0$, on a : $\hat{Lf} = \lambda \hat{f}$

3. - Autres problèmes.

1° On peut chercher à généraliser les notions de fonction de type positif, ou de fonction presque-périodique, et leurs propriétés. Voir DELSARTE [1], LEVITAN [5].

2° On peut chercher à améliorer les majorations précédentes, en imposant à $r(x)$ des conditions plus précises. Voici, par exemple, les résultats de POVZNER [6] :

Dans les hypothèses de la 2e partie, avec $h = 0$:

- Si $r(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\varepsilon}}\right)$ ($\varepsilon > 0$), les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. Il existe K tel que $|\varphi(x, 0)| \leq K$

b. Il existe K' tel que $|\varphi(x, \lambda)| \leq K' \quad \forall \lambda \geq 0$

c. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

- Si $r(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\varepsilon}}\right)$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|\varphi(x, \lambda)| \leq K(|x| + 1) \quad \forall \lambda \geq 0$$

et, si l'on pose

$$\|f\| = \int_0^{+\infty} (1+t) |f(t)| dt$$

on a :

$$\|f * g\| \leq C \|f\| \cdot \|g\|$$

3° h étant fixé et $d\rho(\lambda)$ étant donné, on peut inversement, chercher s'il existe un opérateur $\frac{d^2}{dx^2} - r$. La question a été entièrement résolue par MARCENKO, KREIN, GEL'FAND et LEVITAN, qui ont démonté ceci [2] :

Soit $\rho(\lambda)$ une fonction monotone croissante qui possède les propriétés suivantes :

a. $\int_{-\infty}^0 e^{x\sqrt{|\lambda|}} d\rho(\lambda) < +\infty$ pour tout $x > 0$

b. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x\sqrt{\lambda}}{\lambda} d\rho(\lambda)$ est quatre fois continuellement différentiable (on pose

$$\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) \text{ si } \lambda \leq 0, \quad = \rho(\lambda) - \frac{2}{11}\sqrt{\lambda} \text{ si } \lambda \geq 0)$$

c. $d\rho(\lambda)$ n'est pas discrète (cela, pour éliminer le cas "Grenzkreis" à l'infini).

Alors, il existe une fonction $r(x)$ continue et une seule, telle que $d\rho(\lambda)$ soit la "mesure spectrale" de l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2} - r$, avec la condition initiale $hf(0) - f'(0) = 0$.

(Précision : dans l'énoncé du théorème 1, la mesure $d\rho(\lambda)$ présente un certain arbitraire ; ici, GEL'FAND et LEVITAN la fixent, comme nous l'avons fait dans 2, en prenant pour $\varphi(x, \lambda)$ la solution de $L\varphi = \lambda\varphi$ qui vérifie $\varphi(0, \lambda) = 1$ et $\varphi'(0, \lambda) = h$: la même remarque vaut pour ce qui suit).

Réciproquement, soit $r(x)$ une fonction une fois continuellement dérivable sur $[0, +\infty[$. Et supposons que l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2} - r$ soit dans le cas "Grenzkreis" à l'infini. Alors, la mesure spectrale $d\rho(\lambda)$ correspondant à la condition initiale $hf(0) - f'(0) = 0$ vérifie a et b.

D'autres cas limites (Grenzkreis à $+\infty$, intervalle borné) sont aussi étudiés.

[Revu et corrigé en Octobre 1957]

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DELSARTE (J.). - Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr, Acta math., t. 69, 1938, p. 259-317.
- [2] GEL'FAND (I.M.) et LEVITAN (B.M.). - Sur la définition d'une équation différentielle par sa fonction spectrale [en russe], Izv. Akad. Nauk Ser. Mat., t. 15, 1951, p. 309-360.
- [3] GODEMENT (Roger). - Sur la théorie des représentations unitaires, Annals of Math., Series 2, t. 53, 1951, p. 68-124.
- [4] KODAIRA (Kunihiko). - On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer. J. Math., t. 72, 1950, p. 502-544.

- [5] LEVITAN (B.M.). - Application des opérateurs de translation généralisés ... [en russe], Uspekhi mat. Nauk, t. 4 (29), 1949, p. 3-112.
- [6] POVZNER (A.). - O differencial'nykh uravnenjjakh tipa Šturma-Liuuillja na poluosi, Recueil math. Akad. Sc. Moscou (Mat. Sbornik), t. 65, 1948, p. 3-52.
- [7] SCHWARTZ (Laurent). - Mémoire de K. Kodaira ; Harmonic fields in Riemann manifolds (generalized potentiel theory), I., Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.
- [8] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des Distributions. - Paris, Hermann, 1950-1951 (Act. scient. et ind. n° 1091 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg n° 9).
- [9] WEYL(H.). - Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Annalen, t. 68, 1910, p. 220-269.

ADDITIF

Les questions abordées dans l'exposé précédent ont fait l'objet, depuis 1952, de nombreux travaux dont il est impossible de rendre compte ici ; nous nous bornerons à renvoyer à quelques articles et ouvrages :

- 1) Pour la théorie spectrale des opérateurs différentiels ordinaires, à
NAJMARK (M.A.). - Linejnye differencial'nye operatory. - Moscou, 1954.
- 2) Pour le développement des fonctions suivant les fonctions propres d'un opérateur autoadjoint, à
GEL'FAND (I.M.) et SILOV (G.E.). - Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées, J. Math. pures et appl., t. 35, 1956, p. 383-413 (paragraphes 9-11).
CARTIER (Pierre). - Développements de fonctions arbitraires suivant les fonctions propres d'un opérateur différentiel, Séminaire Bourbaki, t. 7, 1954/55.
- 3) Pour d'autres applications de la convolution généralisée de Delsarte, à
LIONS (J.L.). - Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes, Bull. Soc. math. France, t. 84, 1956, p. 9-95.

[Octobre 1957]